

Механика материалов: прочность, ресурс, безопасность

Materials mechanics: strength, durability, safety

DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2020-86-2-44-53>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА В СЛОИСТОМ КОМПОЗИТЕ

© Юрий Иванович Дударьков, Михаил Валерьевич Лимонин*

ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского», Россия, 140180, г. Жуковский, Московская обл., ул. Жуковского 1; *e-mail: mikhail.limonin@tsagi.ru

*Статья поступила 25 июня 2019 г. Поступила после доработки 27 июля 2019 г.
Принята к публикации 1 октября 2019 г.*

Предложена инженерная методика расчета напряжений поперечного сдвига в слоистом композиционном пакете. В ее основе лежит известная формула Д. И. Журавского для вычисления этих напряжений в изотропной балке при ее поперечном изгибе. В общем случае применение данной формулы к балке из композиционного материала является некорректным в силу неоднородности структуры балки. Согласно предлагаемой методике, на первом этапе ее реализации выполняется переход к эквивалентной модели однородной балки, для которой формула Журавского применима. Переход осуществляется путем изменения формы поперечного сечения балки при условии сохранения ее изгибной жесткости и обобщенного модуля упругости. Вычисленные напряжения поперечного сдвига в эквивалентной балке затем преобразуются к значениям напряжений в исходной композиционной балке из условия сохранения уравнений равновесия. Приведены основные соотношения методики и аналитическая формула для определения напряжений поперечного сдвига в композиционной балке. Верификация методики выполнена на основе сравнения результатов аналитического решения с данными, полученными при численном решении задачи по методу конечных элементов (МКЭ). Показано, что укладка монослоев по толщине пакета оказывает существенное влияние как на характер распределения напряжений поперечного сдвига, так и на их величину. Исследованы границы применимости полученной методики, связанные с условиями выполнения гипотезы прямой нормали. Отмечено, что при выполнении этой гипотезы напряжения поперечного сдвига не зависят от модуля сдвига монослоев, что объясняет отсутствие этого параметра в полученной формуле. Классическая теория слоистых композитов базируется на аналогичных предположениях, что дает основание применить данную формулу для приближенной оценки напряжений поперечного сдвига в слоистом композиционном пакете.

Ключевые слова: слоистый композит; расслоение; поперечный сдвиг; инженерная методика; метод конечных элементов (МКЭ); критерий прочности.

DETERMINATION OF THE TRANSVERSE SHEAR STRESS IN LAYERED COMPOSITES

© Yuriy I. Dudarkov, Mikhail V. Limonin*

N. E. Zhukovsky Central Aerohydrodynamic Institute, 1, ul. Zhukovskogo, Zhukovsky, Moscow oblast, 140180, Russia;
*e-mail: mikhail.limonin@tsagi.ru

Received June 25, 2019. Revised July 27, 2019. Accepted October 1, 2019.

An engineering approach to estimation of the transverse shear stresses in layered composites is developed. The technique is based on the well-known D. I. Zhuravsky equation for shear stresses in an isotropic beam upon transverse bending. In general, application of this equation to a composite beam is incorrect due to the heterogeneity of the composite structure. According to the proposed method, at the first stage of its implementation, a transition to the equivalent model of a homogeneous beam is made, for which the Zhuravsky formula is valid. The transition is carried out by changing the shape of the cross section of the beam, provided that the bending stiffness and generalized elastic modulus remain the same. The calculated shear stresses in the equivalent beam are then converted to the stress values in the original composite beam from the equilibrium condition. The main equations and definitions of the method as well as the analytical equation for estimation of the transverse shear stress in a composite beam are presented. The method is verified by comparing the analytical solution and the results of the numerical solution of the

problem by finite element method (FEM). It is shown that laminate stacking sequence has a significant impact both on the character and on the value of the transverse shear stress distribution. The limits of the applicability of the developed technique attributed to the conditions of the validity of the hypothesis of straight normal are considered. It is noted that under this hypothesis the shear stresses do not depend on the layer shear modulus, which explains the absence of this parameter in the obtained equation. The classical theory of laminate composites is based on the similar assumptions, which gives ground to use this equation for an approximate estimation of the transverse shear stresses in a layered composite package.

Keywords: layered composite; delamination; transverse shear; engineering approach; finite element method (FEM); strength criterion.

Введение

Одной из специфических особенностей композиционных структур является наличие моды разрушения, связанной с их расслоением. Такой вид разрушения характерен для элементов конструкции, работающих в условиях продольно-поперечного изгиба, при котором в композите возникают напряжения поперечного сдвига. В ряде случаев напряжения поперечного сдвига могут возникать и при нагружении композиционного пакета в его плоскости. Примером могут служить краевые эффекты, возникающие на свободных кромках конструкций из слоистого композита [1 – 3]. В основном именно напряжения поперечного сдвига определяют прочность межслоевого интерфейса. Под интерфейсом здесь понимается тонкая изотропная прослойка между смежными монослоями с характеристиками матрицы (связующего). В металлических конструкциях проблема расслоения отсутствует в силу однородности материала и его достаточно высоких характеристик прочности на сдвиг, однако для композита эта проблема весьма актуальна, поскольку характеристики прочности матрицы, как правило, весьма низкие и разрушение интерфейса может произойти при достаточно низком уровне действующих напряжений. Таким образом, возникает вопрос определения напряжений поперечного сдвига в композиционном пакете. В общем случае анализ прочности композиционного пакета сводится к определению напряженно-деформированного состояния (НДС) его слоев и вычислению их коэффициентов запаса по тем или иным критериям. Минимальный из них определяет запас прочности композиционного пакета в целом [4, 5]. Большинство критериев прочности композита, наиболее используемых на практике, основаны на предположении работы монослоя в условиях плосконапряженного состояния (критерии Цая – Хилла [6, 7], Цая – Ву [8] и др.) и не учитывают напряжений поперечного сдвига. Лишь некоторые из них учитывают этот факт (критерии Хашина – Ротема [9, 10], Пака [11]) и дают возможность приближенно оценить моды разрушения, связанные с расслоением композита. Однако в этом случае необходимо располагать данными по величине действующих в монослое напряжений поперечного сдвига. Экспериментальные ме-

тоды определения характеристик поперечного сдвига композиционного пакета [5, 12, 13] не дают возможности судить о реальном распределении напряжений сдвига в нем, поэтому в этой ситуации теоретические методы расчета приобретают особое значение. Вопросы расчета напряжений поперечного сдвига в композиционном пакете рассматриваются в ряде литературных источников. Прежде всего следует отметить работы [14, 15], где, в частности, дано точное решение задачи определения напряжений поперечного сдвига в слоистом композите при цилиндрическом изгибе. В работе [16] частично рассматриваются вопросы межслойной прочности композитов. В теоретическом руководстве к программе конечно-элементного анализа NASTRAN приводится методика расчета напряжений поперечного сдвига, основанная на последовательном интегрировании уравнений равновесия монослоев с учетом условий их совместного деформирования. В большинстве случаев эти методики весьма громоздки и труднодоступны для инженерной практики. Поэтому для определения напряжений поперечного сдвига в композитах часто используются подходы, такие же, как к изотропным материалам, что, как будет показано ниже, может приводить к не совсем корректным результатам.

Методика расчета напряжений поперечного сдвига в слоистом композите

В данной работе предлагается инженерная методика приближенного расчета напряжений поперечного сдвига в слоистом композиционном пакете. Основой для построения этой методики послужила формула Д. И. Журавского (1), которая известна из курса сопротивления материалов [17] и широко используется для расчета напряжений поперечного сдвига в балках из изотропного материала при анализе их прочности. Согласно этой методике, напряжения поперечного сдвига в сечении балки вычисляются по следующей формуле:

$$\tau = \frac{QS^*}{Jb}, \quad (1)$$

где Q — приложенное поперечное усилие; S^* — статический момент отсеченной части сечения

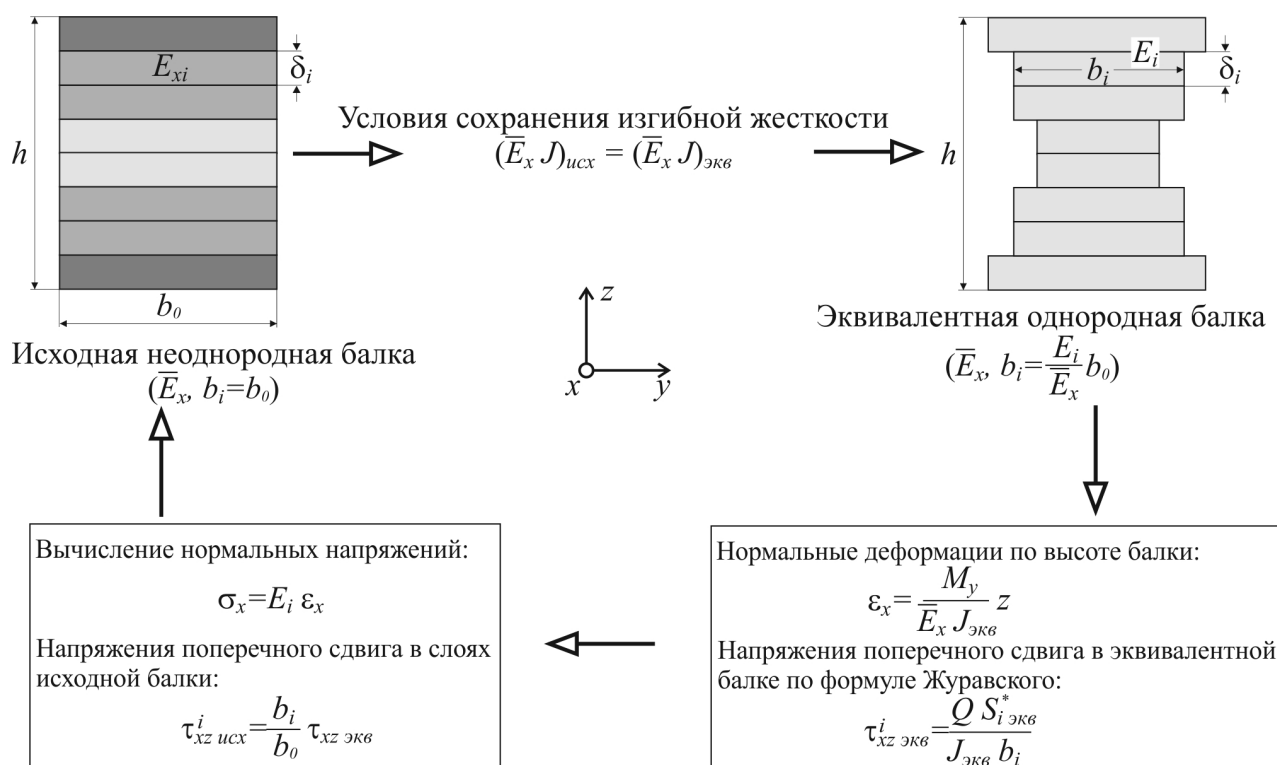


Рис. 1. Схема расчета напряжений поперечного сдвига в слоях композиционного пакета

Fig. 1. Scheme of calculating the transverse shear stresses in the layers of a composite package

относительно нейтральной оси; J — момент инерции сечения балки; b — ширина сечения балки. Однако эта формула применима только для однородной балки, т.е. выполненной из однородного изотропного материала. Для слоистого композиционного пакета эта формула не применима, поскольку жесткости монослоев различные. В связи с этим рассмотрим схему определения напряжений, показанную на рис. 1. Она предполагает следующие этапы вычисления напряжений.

1. Приведем исходную неоднородную балку (композиционный пакет) к модели однородной эквивалентной балки с сохранением ее изгибной жесткости и обобщенного модуля упругости $\bar{E}_x$. Эта операция выполняется за счет изменения конфигурации поперечного сечения балки, а именно — изменения ширины монослоя b_0 исходной балки. Изгибная жесткость исходной балки определяется с учетом модулей упругости монослоев и их распределения по ее высоте по формуле

$$(\bar{E}_x J)_{исх} = \sum_{i=1}^n E_i b_0 \delta_i \xi_i^2,$$

где E_i — модуль упругости i -го монослоя (в координатах балки); b_0 — толщина исходной балки; δ_i — толщина монослоя; ξ_i — координата центра жесткости монослоя. Собственным моментом

инерции монослоя пренебрегаем ввиду его малой толщины.

Изгибная жесткость эквивалентной балки составит

$$(\bar{E}_x J)_{экв} = \sum_{i=1}^n \bar{E}_x b_i \delta_i \xi_i^2.$$

Равенство изгибных жесткостей обеспечивается при $b_i = b_0 E_i / \bar{E}_x$.

Таким образом, мы получаем эквивалентную по изгибной жесткости, но однородную по высоте балку, к которой можно применить формулу Журавского для вычисления напряжений поперечного сдвига. Эта балка является ортотропной, так как ее модуль сдвига не связан с продольным модулем упругости известным соотношением.

2. Оставаясь в рамках этой же теории, определяем продольные деформации балки по известной формуле

$$\varepsilon_x = \frac{M_y}{\bar{E}_x J_{экв}} z.$$

Нормальные напряжения в монослоях (в координатах балки) находим умножением полученных деформаций на модули упругости монослоев:

$$\sigma_x = \frac{E_i M_y}{\bar{E}_x J_{экв}} z.$$

3. Распределение напряжений поперечного сдвига в эквивалентной однородной балке найдем, используя формулу Журавского:

$$\tau_{xz \text{ экв}}^i = \frac{QS_{i \text{ экв}}^*}{J_{\text{экв}} b_i},$$

где $S_{i \text{ экв}}^*$ — статический момент отсеченной части сечения эквивалентной балки относительно нейтральной оси; $J_{\text{экв}}$ — момент инерции сечения эквивалентной балки; b_i — текущая ширина i -го слоя эквивалентной балки.

4. Полученное распределение напряжений поперечного сдвига в сечении эквивалентной балки удовлетворяет условиям равновесия как по изгибающему моменту, так и по перерезывающему усилию. При расчете напряжений поперечного сдвига в исходной балке будем исходить из условия сохранения условий равновесия по перерезывающей силе, т.е. $\tau_{xz \text{ экв}}^i b_i \delta_i = \tau_{xz \text{ исх}}^i b_0 \delta_i$. Таким образом, для его определения необходимо полученное распределение напряжений поперечного сдвига в эквивалентной балке умножить на отношение ширин эквивалентной и исходной балок —

$$\tau_{xz \text{ исх}}^i = \frac{b_i}{b_0} \tau_{xz \text{ экв}}^i.$$

Остановимся на вопросе вычисления статического момента отсеченной части эквивалентной балки. По высоте ширина сечения этой балки b_i скачкообразно меняется, отражая жесткостные характеристики n монослоев исходной балки. В случае симметричной укладки пакета статический момент отсеченной части с координатой z относительно нейтральной линии в i -м элементе балки можно представить как сумму статических моментов предшествующих элементов сечения S_{i-1}^* (монослоев) плюс статический момент i -го элемента (рис. 2).

Статический момент отдельного элемента сечения балки рассчитывается как

$$S_i = b_i \int_z^{h_i/2} z dz = \frac{b_i}{2} \left(\frac{h_i^2}{4} - z^2 \right).$$

Таким образом, формула для вычисления статического момента отсеченной части сечения эквивалентной балки может быть записана в следующем виде:

$$S_{i \text{ экв}}^* = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + b_i \int_z^{h_i/2} z dz =$$

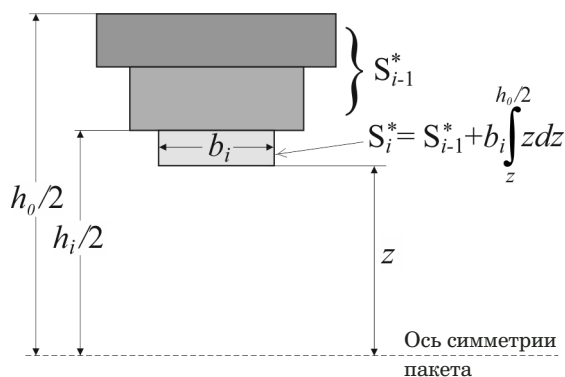


Рис. 2. Схема расчета статического момента эквивалентной балки

Fig. 2. Scheme of calculating the static moment of an equivalent beam

$$= \sum_{n=1}^{n=i-1} S_n + \frac{b_i}{2} \left(\frac{h_i^2}{4} - z^2 \right).$$

При переходе через нейтральную ось сечения пределы интегрирования меняются, поэтому члены в скобках необходимо поменять местами.

Вернемся к параметрам исходной балки:

$$\tau_{xz \text{ исх}}^i = \frac{b_i}{b_0} \tau_{xz \text{ экв}}^i = \frac{b_i}{b_0} \frac{QS_{i \text{ экв}}^*}{J_{\text{экв}} b_i} = \frac{QS_{i \text{ экв}}^*}{J_{\text{экв}} b_0}.$$

При одинаковых толщинах монослоев исходной и эквивалентной балок статические моменты каждого элемента сечения связаны соотношением

$$S_{i \text{ экв}} = \frac{E_i}{E_x} S_{i \text{ исх}}.$$

Используя это соотношение, получаем модифицированную формулу Журавского для определения напряжений поперечного сдвига в композиционном пакете:

$$\tau_{xz}^i = \frac{Q(ES^*)_i}{\bar{E}_x J_{\text{экв}} b_0}, \quad (2)$$

где E_i — модуль упругости i -го слоя пакета в координатах балочной модели; $\bar{E}_x$ — обобщенный модуль упругости исходной балки; $J_{\text{экв}}$ — момент инерции эквивалентной балки; S_i^* — статический момент инерции отсеченной части исходной балки; b_0 — ширина исходной балки.

В данном случае выбранная ширина балки b_0 не имеет значения, поскольку она входит и в статический момент S_i^* , поэтому можно принять $b_0 = 1$.

Обобщенный модуль упругости исходной балки $\bar{E}_x$ вычисляют обычным способом через модуль упругости монослоев и их преобразования при повороте системы координат к осям ортотропии пакета. Момент инерции эквивалентной балки можно определить, не используя ее параметры:

$$J_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^n b_i \delta_i \zeta_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{\bar{E}_x} b_i \delta_i \zeta_i^2.$$

Значения $(ES^*)_i$ рассчитывают по формуле, аналогичной приведенной ранее для эквивалентной балки, т.е.

$$(ES^*)_i = \sum_{n=1}^{i=n-1} E_n S_n + \frac{E_i b_0}{2} \left(\frac{h_i^2}{4} - z^2 \right).$$

При $i = 1$ получаем $n = 0$, что означает отсутствие отсеченной части сечения балки.

Пример применения методики к расчету напряжений поперечного сдвига в квазиизотропном композиционном пакете

Приведем пример расчета напряжений поперечного сдвига в композиционном пакете. Пакет содержит восемь монослоев углепластика с квазиизотропной укладкой $[0; 45; -45; 90]_8$. Упругие характеристики монослоя приведены ниже:

$$E_{11} = 133\,760 \text{ МПа}; E_{22} = 8540 \text{ МПа};$$

$$G_{12} = 4370 \text{ МПа}; \nu_{12} = 0,32; \delta = 0,2 \text{ мм}.$$

Пакет нагружен поперечным усилием $Q = 10 \text{ Н}$. Полагаем, что ширина пакета $b_0 = 1,0 \text{ мм}$. Обобщенный модуль упругости такого пакета — $\bar{E}_x = 51\,000 \text{ МПа}$; эквивалентный момент инерции пакета —

$$J_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{\bar{E}_x} b_i \delta_i \zeta_i^2 = 0,56 \text{ мм}^4.$$

При указанных параметрах формула (2) для расчета напряжений поперечного сдвига принимает вид

$$\tau_{xz}^i = 0,00035(ES^*)_i.$$

Ниже приведены результаты расчетного анализа напряжений поперечного сдвига в монослоях по толщине композиционного пакета.

Монослой № 1 ($i = 1$), угол ориентации $\theta = 0^\circ$:

$$E_{\theta=0} = 133\,760 \text{ МПа}; h_1 = 1,6 \text{ мм}; z = 0,8 \text{ мм};$$

$$(ES^*)_{1,z=0,8} = 0 + 133\,760/2(1,6^2/4 - 0,8^2) = 0;$$

$$\tau_{xz}^{1,z=0,8} = 0;$$

$$(ES^*)_{1,z=0,6} = 0 + 133\,760/2(1,6^2/4 - 0,6^2) = 18\,726;$$

$$\tau_{xz}^{1,z=0,6} = 6,55 \text{ МПа}.$$

Монослой № 2 ($i = 2$), угол ориентации $\theta = 45^\circ$. Модуль упругости монослоя в координатах пакета находим путем преобразования его упругих характеристик при повороте системы координат монослоя на угол $\theta = 45^\circ$. В результате вычислений получаем:

$$E_{\theta=45} = 15\,645 \text{ МПа}; h_1 = 1,2 \text{ мм}; z = 0,6 \text{ мм};$$

$$(ES^*)_{2,z=0,6} = 18\,726 +$$

$$+ 15\,645/2(1,2^2/4 - 0,6^2) = 18\,726;$$

$$\tau_{xz}^{2,z=0,6} = 6,55 \text{ МПа};$$

$$(ES^*)_{2,z=0,4} = 18\,726 +$$

$$+ 15\,645/2(1,2^2/4 - 0,4^2) = 20\,291;$$

$$\tau_{xz}^{2,z=0,4} = 7,10 \text{ МПа}.$$

Монослой № 3 ($i = 3$), угол ориентации $\theta = -45^\circ$. Модуль упругости монослоя в координатах пакета находим аналогично предыдущей итерации:

$$E_{\theta=-45} = 15\,645 \text{ МПа}; h_3 = 0,8 \text{ мм}; z = 0,4 \text{ мм};$$

$$(ES^*)_{3,z=0,4} = 20\,291 +$$

$$+ 15\,645/2(0,8^2/4 - 0,4^2) = 20\,291;$$

$$\tau_{xz}^{3,z=0,4} = 7,10 \text{ МПа};$$

$$(ES^*)_{3,z=0,2} = 20\,291 +$$

$$+ 15\,645/2(0,8^2/4 - 0,2^2) = 21\,230;$$

$$\tau_{xz}^{3,z=0,2} = 7,43 \text{ МПа}.$$

Монослой № 4 ($i = 4$), угол ориентации $\theta = 90^\circ$:

$$E_{\theta=90} = 8540 \text{ МПа}; h_3 = 0,4 \text{ мм}; z = 0,2 \text{ мм};$$

$$(ES^*)_{4,z=0,2} = 21\,230 +$$

$$+ 8540/2(0,4^2/4 - 0,2^2) = 21\,230;$$

$$\tau_{xz}^{4,z=0,2} = 7,43 \text{ МПа};$$

$$(ES^*)_{4,z=0} = 21\,230 + 8540/2(0,4^2/4 - 0,0^2) = 2140;$$

$$\tau_{xz}^{4,z=0} = 7,49 \text{ МПа}.$$

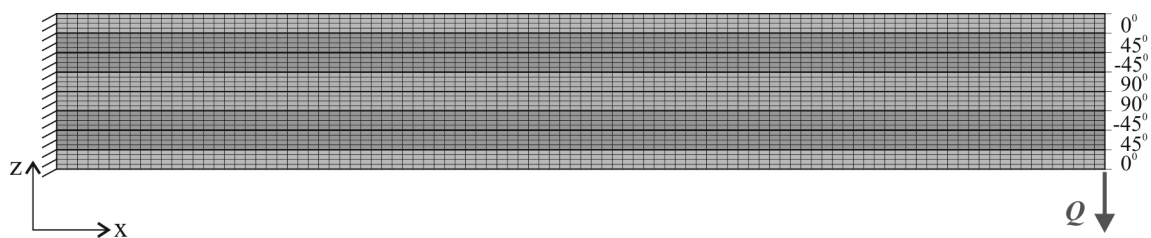


Рис. 3. КЭ модель балки

Fig. 3. FE model of the beam

В силу симметричной укладки пакета распределение напряжений при $z < 0$ симметрично.

Верификация методики. Обсуждение результатов

Обратимся к вопросу верификации полученных результатов. Верификацию выполним на основе метода конечных элементов (МКЭ). Для этого построим КЭ модель балки с характеристиками рассмотренного в примере композиционного пакета. Расчетная модель балки показана на рис. 3.

Балка консольно закреплена и нагружена перерезывающей силой $Q = 10$ Н. При формировании модели использовали ортотропные конечные элементы. Ширина балки — 1 мм, высота 1,6 мм, что соответствует толщине пакета. Продольные модули упругости конечных элементов соответствовали характеристикам жесткости

монослоев в координатах балки — $E_{11} = [133\,760; 15\,645; 15\,645; 8540]_s$, поперечные — $E_{22} = 8540$ МПа. Модули сдвига задавали также в координатах балки по результатам их теоретического расчета: $G_{12} = [4370; 2063; 2063; 1350]_s$. Результаты конечно-элементного анализа балки и аналитического расчета, приведенного выше, представлены в таблице, где $G_0 = G_{12} = [4370; 2063; 2063; 1350]_s$ — модули поперечного сдвига по слоям исходной МКЭ модели; $\tau_{исх}$ и $\tau_{экв}$ — напряжения поперечного сдвига в исходной и эквивалентной балке, полученные по результатам аналитического расчета при G_0 . Деформированное состояние балки показано на рис. 4.

Сравнение КЭ расчета и аналитического решения по формуле (2) показывает практически полное совпадение результатов. В расчетную формулу (2) не входят модули поперечного сдвига, т.е. напряжения поперечного сдвига определяются только модулями упругости монослоев и

Результаты КЭ расчета и аналитического решения

Comparison between FE calculation and analytical solution

Z	Аналитический расчет		МКЭ				
	$\tau_{экв}(G_0)$	$\tau_{исх}(G_0)$	$\tau(G_0)$	$\tau(10G_0)$	$\tau(0,5G_0)$	$\tau(0,2G_0)$	$\tau(0,1G_0)$
0,80	0,0	0,0	0,92	0,92	0,927	1,01	1,22
0,70	1,34	3,50	3,49	3,48	3,52	3,75	4,29
0,60	2,50	6,55	6,23	6,22	6,25	6,41	6,73
0,50	22,31	6,85	6,84	6,84	6,86	6,95	7,08
0,40	23,15	7,10	7,09	7,09	7,09	7,10	7,10
0,30	23,75	7,29	7,28	7,28	7,27	7,19	7,02
0,20	24,22	7,43	7,41	7,41	7,39	7,22	6,90
0,10	44,75	7,47	7,46	7,46	7,43	7,23	6,84
0,0	44,88	7,49	7,48	7,47	7,44	7,23	6,82
-0,10	44,75	7,47	7,46	7,46	7,43	7,23	6,84
-0,20	24,22	7,43	7,41	7,41	7,39	7,22	6,91
-0,30	23,75	7,29	7,28	7,28	7,27	7,19	7,02
-0,40	23,15	7,10	7,09	7,09	7,09	7,11	7,10
-0,50	22,31	6,85	6,84	6,84	6,86	6,95	7,08
-0,60	2,50	6,55	6,23	6,23	6,25	6,42	6,73
-0,70	1,34	3,50	3,49	3,49	3,52	3,75	4,29
-0,80	0,0	0,0	0,92	0,92	0,927	1,01	1,22

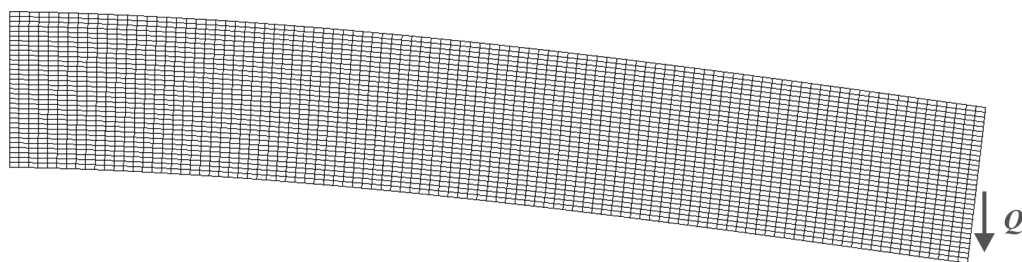


Рис. 4. Деформированное состояние балки

Fig. 4. A deformed state of the beam

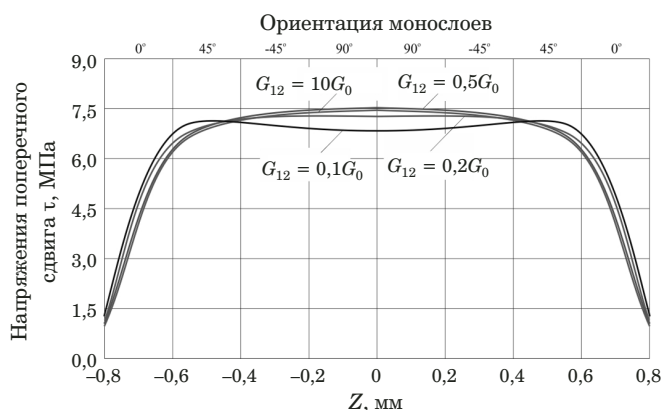


Рис. 5. Распределение напряжений поперечного сдвига по высоте балки при различных значениях модулей сдвига G

Fig. 5. Distribution of the transverse shear stresses in the height of the beam at different values of the shear modulus G

структурой композиционного пакета. Для подтверждения этого факта были выполнены дополнительные расчеты КЭ модели при различных величинах модулей поперечного сдвига G ($10G_0$, $0,5G_0$, $0,2G_0$ и $0,1G_0$). Результаты этих расчетов отражены в правой части таблицы и представлены в виде графика распределения напряжений поперечного сдвига по высоте балки при различных значениях модулей сдвига (рис. 5).

Видно, что при увеличении модулей поперечного сдвига результат практически не меняется. Уменьшение величин модулей начинает сказываться

на результатах при $G < 0,2G_0$. При таких значениях модулей поперечного сдвига вид деформации балки начинает приобретать преимущественно сдвиговой характер (рис. 6). Это дает возможность сделать некоторые выводы о границах применимости полученной формулы (2). Она будет справедлива, пока балка работает в рамках выполнения гипотезы прямой нормали.

На рис. 7 показано распределение напряжений поперечного сдвига по высоте балки в предположении изотропии и ортотропии ее материала. В данном случае применение формулы Журавского (1) в исходном виде к балке из композиционного материала может приводить к существенным погрешностям при оценке напряжений поперечного сдвига и характера их распределения по толщине пакета.

Покажем, как структура пакета влияет на характер распределения напряжений поперечного сдвига в балке. Для этого были выполнены расчеты напряжений поперечного сдвига при различных укладках композиционного пакета — с использованием МКЭ модели. Результаты этих расчетов показаны на рис. 8. Нетрудно видеть, что укладка монослоев по толщине пакета оказывает существенное влияние как на характер распределения напряжений поперечного сдвига, так и на их величину. Во многом это связано с положением 0-го слоя относительно нейтральной линии пакета. Чем он ближе к нейтральной линии, тем больше максимальные напряжения сдвига. При всех комбинациях укладки монослоев макси-

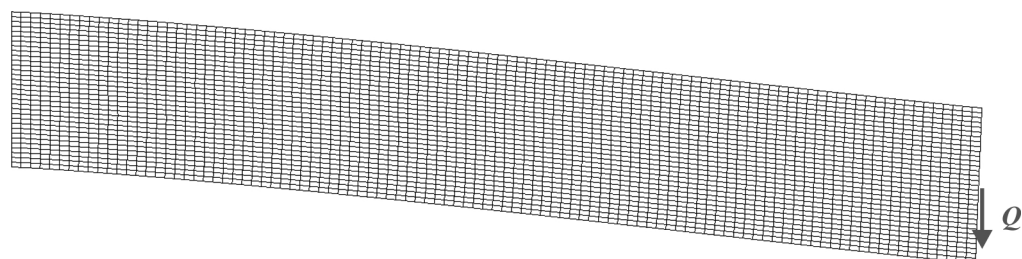


Рис. 6. Деформация балки при $G = 0,1G_0$

Fig. 6. Deformation of the beam at $G = 0.1G_0$

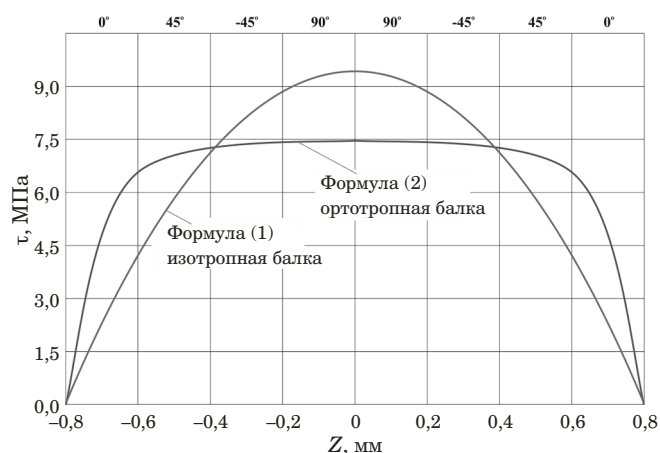


Рис. 7. Напряжения поперечного сдвига в изотропной и ортотропной балках

Fig. 7. Transverse shear stresses in isotropic and orthotropic beams

мальные напряжения сдвига достигаются на нейтральной оси композиционного пакета.

На рис. 9 приведены для сравнения результаты МКЭ решений и расчетов по аналитической формуле (2) для различных вариантов укладки монослоев в композиционном пакете: $[0; 45; -45; 90]_s$ (а); $[0; 90; 45; -45]_s$ (б); $[45; -45; 0; 90]_s$ (в); $[90; 45; -45; 0]_s$ (г). Для укладок $[0; 45; -45; 90]_s$ и $[0; 90;$

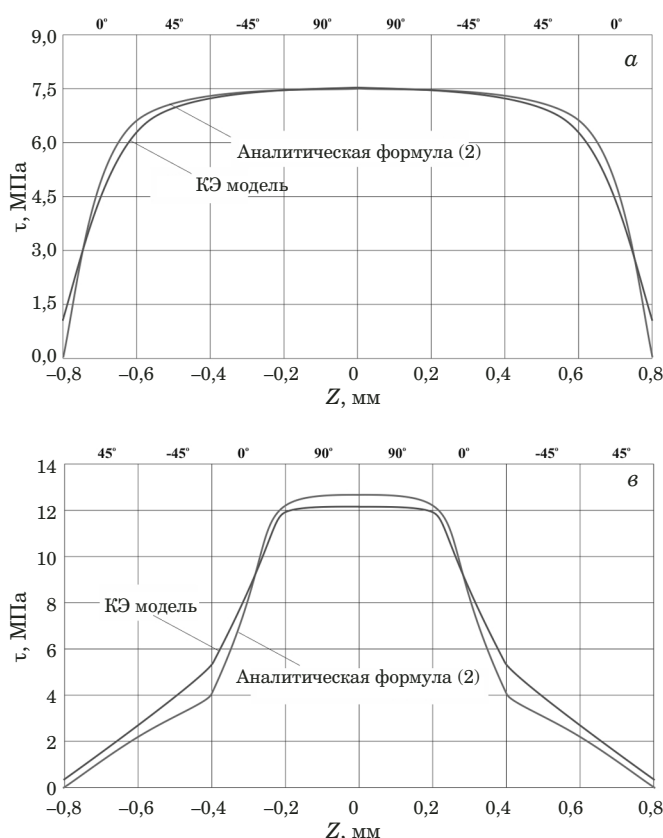


Рис. 9. Результаты КЭ и аналитического расчетов для различных вариантов укладки монослоев в пакете

Fig. 9. The results of FE and analytical solution for different variants stacking monolayers in the package

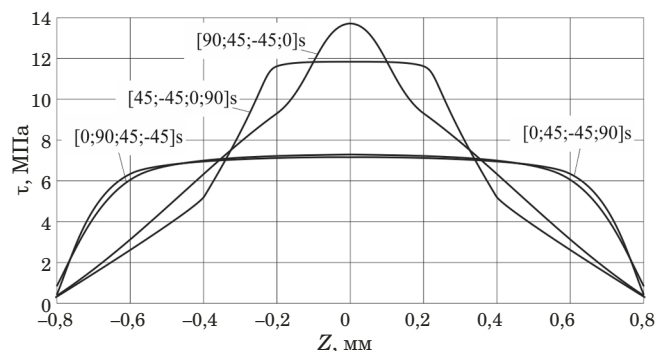


Рис. 8. Влияние укладки монослоев в пакете на напряжения поперечного сдвига

Fig. 8. The effect of the sequence of stacking monolayers in the package on the transverse shear stresses

$45; -45]_s$ имеет место практически полное совпадение аналитического и МКЭ расчетов. При укладках $[45; -45; 0; 90]_s$ и $[90; 45; -45; 0]_s$ наблюдается некоторое расхождение результатов, однако оно вполне приемлемо для инженерной оценки напряжений поперечного сдвига в композиционном пакете.

Классическая теория слоистых композитов при определении напряженно-деформированного состояния пакета также базируется на гипотезе прямой нормали (гипотеза Кирхгофа – Лява).

Это дает основание применить полученную формулу для приближенной оценки напряжений поперечного сдвига в слоистом композиционном пакете, пренебрегая взаимным влиянием поперечных сдвигов через коэффициенты его матрицы жесткости. В общем случае пакет может быть нагружен поперечными усилиями Q_{xz} и Q_{yz} . При вычислении напряжений τ_{xz} и τ_{yz} следует иметь в виду, что структура пакета в двух взаимно ортогональных направлениях будет разная, а следовательно, распределение напряжений по толщине пакета будет отличаться. Это иллюстрируют графики, приведенные на рис. 9, а и г.

Следует также понимать, что найденные напряжения поперечного сдвига относятся к главным осям ортотропии пакета, а не к местным осям ортотропии монослоя. В связи с этим применять какие-либо критерии прочности композита, используя полученные значения напряжений, будет некорректно. Необходимо предварительно преобразовать напряжения к местным осям ортотропии соответствующего монослоя и только затем применять критерии для оценки прочности монослоев с учетом напряжений поперечного сдвига. В частности, для оценки возможности межслоевого расслоения композита можно воспользоваться критерием Хашина – Ротема [9].

Заключение

Разработана методика расчета напряжений поперечного сдвига в слоистом композите. Она основана на приведении исходной неоднородной структуры композиционного пакета к однородной при сохранении его изгибной жесткости. В результате реализации методики получена модифицированная формула Д. И. Журавского, применимая для оценки напряжений поперечного сдвига в монослоях композиционного пакета. На примере изгиба консольно заземленной балки проведена верификация методики путем сравнения результатов МКЭ расчета и аналитического решения. Выполнены параметрические исследования по влиянию структуры композиционного пакета на распределение напряжений сдвига в его монослоях. Отмечается, что применение формулы Д. И. Журавского в ее исходном виде к композиту может приводить к существенным погрешностям в значениях напряжений поперечного сдвига. Указаны границы применимости методики, связанные с условиями выполнения гипотезы прямой нормали при изгибе. Разработанная методика может быть использована для инженерной оценки прочности композиционного пакета с учетом возможности его расслоения от напряжений поперечного сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов С. Е. О краевом эффекте в слоистых композитах / Механика композитных материалов. 1981. № 2. С. 227 – 233.
2. Дударьков Ю. И., Левченко Е. А., Лимонин М. В. Эффект свободной кромки в слоистых композитах / Авиационная промышленность. 2012. № 4. С. 48 – 53.
3. Дударьков Ю. И., Левченко Е. А., Лимонин М. В. Расчетная оценка влияния краевых эффектов на свободной кромке отверстия на прочность слоистых композитов / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. Т. 83. № 3. С. 59 – 64.
4. Гришин В. И., Дзюба А. С., Дударьков Ю. И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. — М.: Физматлит, 2013. — 273 с.
5. Baker A., Dutton S., Kelly D. Composite materials for aircraft structures. — Second Edition. — Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, 2004. P. 599. DOI: 10.2514/4.861680.
6. Hill R. The mathematical theory of plasticity. — Oxford: Clarendon Press, 1998. P. 355.
7. Tsai S. W. Strength theories of filamentary structures / Schwartz R. T., Schwartz H. S. (Eds.) Fundamental aspects of fiber reinforced plastic composites. — New York: Wiley Interscience, 1968. P. 3 – 11.
8. Tsai S. W., Wu E. M. A General theory of strength for anisotropic materials / Journal of Composite materials. 1971. Vol. 5. P. 58 – 80. DOI: 10.1177/002199837100500106.
9. Hashin Z., Rotem A. A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials / Journal of Composite materials. 1973. Vol. 7. P. 448 – 464. DOI: 10.1177/002199837300700404.
10. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites / Journal of Applied mechanics. 1980. Vol. 47(2). P. 329 – 334. DOI: 10.1115/1.3153664.
11. Puck A., Schurmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models / Composites science and technology. 2002. Vol. 62(12 – 13). P. 1633 – 1662. DOI: 10.1016/S0266-3538(01)00208-1.
12. Полилов А. Н. Экспериментальная механика композитов — М.: МГТУ, 2015. — 375 с.
13. Ильячев А. В., Губин А. М., Акмеев А. Р., Иванов Н. В. Определение области максимальных сдвиговых деформаций для образцов углепластика по методу Иосипеску, с использованием оптической системы измерений / Труды ВИАМ. 2018. № 6(66). С. 99 – 109. DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-6-99-109.
14. Pagano N. J. Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending / Journal of Composite Materials. 1969. Vol. 3(1). P. 398 – 411. DOI: 10.1177/002199836900300304.
15. Pagano N. J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates / Journal of Composite Materials. 1970. Vol. 4(1). P. 20 – 34. DOI: 10.1177/002199837000400102.
16. Полилов А. Н., Татусь Н. А. Биомеханика прочности волокнистых композитов. — М.: Физматлит, 2018. — 328 с.
17. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1979. — 560 с.

REFERENCES

1. Mikhailov S. E. On the edge effect in layered composites / Mekh. Kompozit. Mater. 1981. N 2. P. 227 – 233 [in Russian].
2. Dudarkov Yu. I., Levchenko E. A., Limonin M. V. Free edge effect in layered composites / Aviats. Promyshl. 2012. N 4. P. 48 – 53 [in Russian].
3. Dudarkov Yu. I., Levchenko E. A., Limonin M. V. Numerical estimation of influence of edge effects on free edges of cut-outs on the strength of laminated composites / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2017. Vol. 83. N 3. P. 59 – 64 [in Russian].
4. Grishin V. I., Dzuba A. S., Dudarkov Yu. I. The strength and buckling of elements and fittings of composite aircraft structures. — Moscow: Fizmatlit, 2013. — 273 p. [in Russian].

5. **Baker A., Dutton S., Kelly D.** Composite materials for aircraft structures. — Second Edition. — Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, 2004. P. 599. DOI: 10.2514/4.861680.
6. **Hill R.** The mathematical theory of plasticity. — Oxford: Clarendon Press, 1998. P. 355.
7. **Tsai S. W.** Strength theories of filamentary structures / Schwartz R. T., Schwartz H. S. (Eds.) Fundamental aspects of fiber reinforced plastic composites. — New York: Wiley Interscience, 1968. P. 3 – 11.
8. **Tsai S. W., Wu E. M.** A General theory of strength for anisotropic materials / Journal of Composite materials. 1971. Vol. 5. P. 58 – 80. DOI: 10.1177/002199837100500106.
9. **Hashin Z., Rotem A.** A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials / Journal of Composite materials. 1973. Vol. 7. P. 448 – 464. DOI: 10.1177/002199837300700404.
10. **Hashin Z.** Failure criteria for unidirectional fiber composites / Journal of Applied mechanics. 1980. Vol. 47(2). P. 329 – 334. DOI: 10.1115/1.3153664.
11. **Puck A., Schurmann H.** Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models / Composites science and technology. 2002. Vol. 62(12 – 13). P. 1633 – 1662. DOI: 10.1016/S0266-3538(01)00208-1.
12. **Polilov A. N.** Experimental mechanics of composite. — Moscow: MGTU, 2015. — 375 p. [in Russian].
13. **Ilichev A. V., Gubin A. M., Akmeev A. R., Ivanov N. V.** Definition of area of the maximum shear deformations for CFRP samples on Iosipescu method, with use of optical system of measurements / Tr. VIAM. 2018. N 6(66). P. 99 – 109. DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-6-99-109 [in Russian].
14. **Pagano N. J.** Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending / Journal of Composite Materials. 1969. Vol. 3(1). P. 398 – 411. DOI: 10.1177/002199836900300304.
15. **Pagano N. J.** Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates / Journal of Composite Materials. 1970. Vol. 4(1). P. 20 – 34. DOI: 10.1177/002199837000400102.
16. **Polilov A. N., Tatus' N. A.** Biomechanics of the strength of layered composites — Moscow: Fizmatlit, 2018. — 328 p. [in Russian].
17. **Feodosiev V. I.** Strength of materials. — Moscow: Nauka, 1979. — 560 p. [in Russian].