

DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2020-86-4-39-45>

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПАРАМЕТРОВ И ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО РАЗМЕРАМ ЗЕРЕН ОДНОФАЗНЫХ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

© Сергей Иванович Архангельский, Даниил Михайлович Левин*

Тульский государственный университет, Россия, 300012, Тула, пр. Ленина, д. 92; *e-mail: danlevin48@gmail.com

*Статья поступила 8 октября 2019 г. Поступила после доработки 19 февраля 2020 г.
Принята к публикации 25 февраля 2020 г.*

Статистический анализ распределения по размерам зерен необходим как для построения и развития теории роста зерен и формирования микроструктуры, так и для описания размерных зависимостей характеристик физико-механических свойств поликристаллических материалов. Распределение по размерам зерен — одна из важнейших характеристик однородности структуры и, следовательно, стабильности свойств изделий в процессе эксплуатации. Представлены результаты исследования однофазной и равноосной поликристаллической микроструктуры с помощью статистического моделирования методом Монте-Карло параметров и функций распределения по размерам зерен. Приведены статистические параметры (средние значения, дисперсии, коэффициенты вариации) и функции распределения характеристик зеренной микроструктуры. Установлено, что функция распределения эффективных размеров зерен для исследованной модели поликристалла наиболее адекватно описывается γ -распределением. Его следует использовать при анализе экспериментальных функций распределения по размерам зерен однофазных поликристаллических материалов с равноосными зёрнами. Показано, что в качестве статистически обоснованной и достоверной оценки среднего размера зерен можно принять генеральное среднее (математическое ожидание) эффективных размеров (проекционных диаметров) зерен с функцией γ -распределения, параметры которой должны быть предварительно определены при исследовании зеренной структуры поликристаллического материала. Полученные результаты статистического моделирования подтверждены экспериментальными данными металлографического анализа микроструктур модельных и промышленных материалов с различной степенью неоднородности зеренной структуры.

Ключевые слова: микроструктура; размер зерна; статистическое моделирование; метод Монте-Карло; распределение по размерам зерен.

STATISTICAL ANALYSIS OF THE PARAMETERS AND GRAIN SIZE DISTRIBUTION FUNCTIONS OF SINGLE-PHASE POLYCRYSTALLINE MATERIALS

© Sergey I. Arkhangelskiy, Daniil M. Levin*

Tula State University, 92, pr. Lenina, Tula, 300012, Russia; *e-mail: danlevin48@gmail.com

Received October 8, 2019. Revised February 19, 2020. Accepted February 25, 2020.

A statistical analysis of the grain size distribution is important both for developing theories of the grain growth and microstructure formation, and for describing the size dependences of various characteristics of the physical and mechanical properties of polycrystalline materials. The grain size distribution is also an important characteristic of the structure uniformity and, therefore, stability of the properties of the products during operation. Statistical Monte Carlo modeling of single-phase and equiaxed polycrystalline microstructures was carried out to determine the type of statistically valid distribution function and reliable estimates of the average grain size. Statistical parameters (mean values, variances, variation coefficient) and distribution functions of the characteristics of the grain microstructure were obtained. It is shown that the distribution function of the effective grain sizes for the studied polycrystal model is most adequately described by γ -distribution, which is recommended to be used in analysis of the experimental distribution functions of grain sizes of single-phase polycrystalline materials with equiaxed grains. The general average (mathematical expectation) of the effective grain size (projection diameter) with γ -distribution function (parameters of the distribution function are to be previously determined in analysis of the grain structure of polycrystalline materials) should be taken as a statistically valid and reliable estimate of the average grain size. The results of statistical modeling are proved by the experimental data of metallographic study of the microstructures of single-phase model and industrial materials with different degree of the grain structure heterogeneity.

Keywords: microstructure; grain size; statistical modeling; Monte Carlo method; grain size distribution.

Введение

Средний размер зерна — характеристика микроструктуры, оказывающая существенное влияние на физико-механические свойства поликристаллического материала. В настоящее время наиболее распространенные практические методики оценки величины зерна — стандарт ASTM E112-13 и ГОСТ 5639–82. Согласно им в результате прямого измерения получают массив значений площадей сечений зерен $\{f\}$ плоскостью, случайным образом проходящей через объем поликристалла. При этом средний размер зерна определяют как $\bar{d} = \sqrt{\bar{f}}$, где $\bar{f}$ — среднее значение площади произвольного сечения зерна.

Более общий способ выражения размера произвольного плоского сечения — его эффективный размер или проекционный диаметр (диаметр круга с площадью, равной площади двумерного сечения). Отметим, что именно площади f и эффективные размеры $d = \sqrt{4f/\pi}$ сечений зерен произвольной формы определяются специализированными программами для количественного анализа изображений (NEXSYS ImageExpert Pro, программное обеспечение автоматических анализаторов изображений (ААИ) «Квантимет», «Эпиквант» и др.).

Для прямого определения величины зерна обычно используют линейный метод случайных секущих [1], при котором результат измерений — размеры хорд l_i , образующихся при пересечении случайной линии (случайной секущей) на плоскости шлифа с границами зерен. Среднее арифметическое длин хорд принимают как оценку среднего размера зерна $\bar{d}$ [1, 2].

Более строгие значения величины зерна, а также количественные характеристики разнотерности можно получить с помощью выборочных функций распределения (гистограмм) по размерам хорд l_i , наибольших поперечников (диаметров) d_i сечений зерен плоскостью шлифа и диаметров D_i зерен в объеме поликристалла. Последнюю величину рассчитывают методом реконструкции [1, 3] или находят путем прямого измерения максимальных поперечников зерен на 3D-реконструкциях микроструктуры, полученных при обработке 2D-картин последовательных сечений поликристалла [4]. Средний размер зерна в зависимости от способа его определения рассчитывают как выборочное среднее по массивам данных $\{l\}$, $\{d\}$ и $\{D\}$. Другими словами, вид гистограмм фактически не оказывает влияния на получаемую таким образом оценку среднего значения. Это же касается и различных характеристик разнотерности.

Точность и достоверность определения средней величины зерна можно повысить путем перехода от выборочного к генеральному средне-

му значению (математическому ожиданию) [5]. Для этого по построенным гистограммам необходимо установить аналитический вид эмпирической функции распределения по размерам зерен. Обычно это делают, сравнивая эмпирическую функцию распределения с известными теоретическими распределениями с использованием различных критериев согласия.

Выделим несколько подходов для нахождения теоретической функции распределения по размерам зерен поликристалла.

Один из них рассматривает слипание (коагуляцию) зерен и формирование зеренной структуры поликристалла как процесс, обратный дроблению. Соответственно, делается вывод, что распределение по размерам продуктов дробления будет подобно функции распределения по размерам зерен в исходном материале. Основываясь на равновероятности распада монолита на N частей независимо от размеров фрагментов и ряде других предположений, был получен логарифмически нормальный закон распределения по размерам частиц дробления [6], который широко применяют при анализе результатов экспериментальных исследований зеренного строения поликристаллов [1].

Применительно к коагуляции частиц было показано, что логнормальное распределение действительно характеризует распределение частиц по размерам, но только при условии, что единичные процессы слипания имеют исключительно стохастический (случайный) характер [7, 8]. Понятно, что реальные процессы формирования и изменения размеров зерен в поликристалле имеют кооперативный характер и никак не могут рассматриваться как стохастические [9, 10]. Поэтому применение логнормального распределения для описания микроструктур поликристаллов сколько-нибудь надежного обоснования не имеет [11].

Другой способ основан на рассмотрении (применительно к процессам формирования микроструктуры) различных теорий роста зерен и получении аналитических решений уравнений, описывающих эволюцию зеренной структуры, или построении функций распределения по размерам зерен методами математического моделирования. В этом случае появляется возможность использовать для описания процессов формирования поликристаллической структуры кинетические уравнения: уравнения непрерывности [12], Фоккера – Планка [13], Смолуховского [14], коалесценции [15] и др. Как правило, эти уравнения анализируют численными методами, однако в полученных результатах можно выявить некоторые общие особенности:

1) вид функции распределения зерен по размерам при больших временах практически не за-

висит от начальных условий (следовательно, можно ожидать появления функции распределения по размерам зерен поликристалла определенного универсального вида);

2) асимптотики функций распределения по размерам зерен, полученные при самых разных подходах, имеют экспоненциальный характер.

Для нахождения теоретических функций распределения можно также использовать 2D- и 3D-модели поликристаллов с последующим статистическим анализом параметров полученных структур. Синтез микроструктур проводят различными способами, из которых наибольшее распространение получил метод Монте-Карло [16 – 18]. Отметим, что результаты моделирования микроструктур широко используют для развития структурно-феноменологического подхода в механике неупругого деформирования и физике формирования физико-механических свойств поликристаллических материалов и композитов.

Цель работы — исследование однородной изотропной и однофазной микроструктуры, состоящей из выпуклых многогранников, статистическими методами.

Алгоритм моделирования зеренной структуры методом Монте-Карло

При статистическом моделировании полиэдрическую структуру поликристалла можно представить как совокупность зерен сферической формы [19].

Исследовали поликристалл, содержащий 10^4 зерен сферической формы. Введем обозначения: D_{pi} — диаметр произвольного зерна ($i = 1, 2, \dots, 10^4$), $\bar{D}_p$ — среднее значение диаметра зерна. Для упрощения использовали нормированные и, следовательно, безразмерные величины: $D_i = D_{pi}/\bar{D}_p$, $\bar{D} = 1$.

Цикл моделирования заключался в рассечении сферы D_i случайной плоскостью AA' (плоскость шлифа), проходящей на расстоянии $h_i = k_i D_i$ от центра сферы (числовой коэффициент $|k_i| \leq 0,5$) (рис. 1). Сечение сферы плоскостью AA' образует окружность диаметром d_i . Фактически это максимальный видимый диаметр сечения. Затем через плоскость окружности диаметром d_i случайным образом проводили секущую BB' , проходящую на расстоянии $h_{ij} = k_{ij} d_i$ от центра окружности ($|k_{ij}| \leq 0,5$). Секущая пересекает окружность в двух точках, образуя хорду длиной l_{ij} .

Случайный характер положения плоскости AA' и секущей BB' для i -й сферы (зерна) обеспечивали за счет выбора случайных равномерно распределенных значений коэффициентов k_i и k_{ij} , генерируемых в сегменте $[-0,5, 0,5]$. Для этого использовали встроенный в прикладной пакет

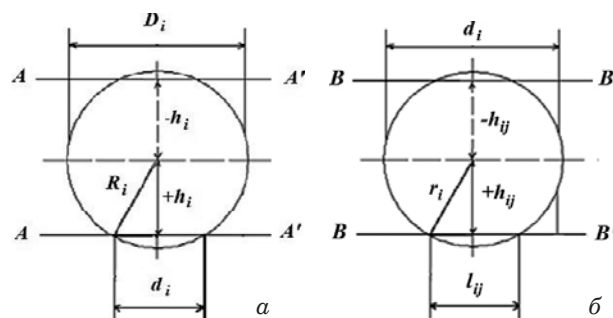


Рис. 1. Схемы прохождения случайной плоскости AA' через сферу диаметром D_i с образованием сечения диаметром d_i (а) и случайной секущей BB' через сечение диаметром d_i с образованием хорды длиной l_{ij} (б)

Fig. 1. Scheme of the passage of random sections: а — passage of a random plane (section plane) AA' through a sphere of diameter D_i and formation of the section with a diameter d_i ; б — passage of a random secant BB' through the section with a diameter d_i and formation of the chord with a length l_{ij}

Microsoft Excel датчик псевдослучайных чисел [20].

Циклы моделирования повторяли для всех 10^4 зерен поликристалла. В результате получали массивы диаметров сечений $\{d\}$, длин хорд $\{l\}$, площадей $\{f\}$ и периметров $\{p\}$ сечений, по которым определяли функции распределения и другие статистические характеристики. Применение метода случайных секущих позволило также определить массив значений удельной поверхности границ зерен $\{\Sigma S\}$ [1].

В качестве исходных распределений размеров зерен (сфер) использовали δ -распределение (идеально однородная структура, $D_i = D = 1$) и нормальное распределение ($D = 1$).

Обсуждение результатов

В результате моделирования получили статистические параметры (средние значения $\bar{d}$, $\bar{f}$, $\bar{l}$, $\bar{p}$, коэффициенты вариации v_d , v_f , v_l , v_p и др.) и функции распределения моделируемых характеристик микроструктуры. Относительные и не зависящие от реальных размеров зерен величины ($\bar{d}/\bar{D}$, $\bar{l}/\bar{d}$ и др.) использовали для верификации результатов путем их сопоставления с теоретическими и экспериментальными данными исследования микроструктуры поликристаллических материалов, полученными ранее.

Параметры микроструктуры. В таблице приведены результаты моделирования статистических параметров микроструктуры для различных видов функций распределения исходных диаметров зерен [21] и данные моделирования полиэдрической микроструктуры, полученные с помощью специально составленной программы [22].

Видно, что для всех исследованных распределений $\bar{d} = 0,778 \dots 0,788$, $\bar{l}/\bar{d} = 0,784 \dots 0,787$, $\bar{l} = 0,61 \dots 0,62$. Это хорошо согласуется с теоретическими оценками, которые для случая δ -распределения одинаковых по форме исходных зерен составляют $\bar{d}/\bar{D} = \bar{l}/\bar{d} = 0,785$ [19, 23]. При моделировании зеренной структуры для различных видов исходного распределения по размерам сфер (δ -распределение, бимодальное и асимметричное распределения) оценки относительных значений эффективных диаметров и длин хорд составляют $\bar{d}/\bar{D} = 0,78$, $\bar{l}/\bar{D} = 0,61$ и не зависят от вида исходного распределения [2]. Это также согласуется с полученными данными.

Экспериментальную проверку адекватности результатов моделирования для случая однофазной идеально однородной структуры выполняли на темплетях из спрессованной свинцовой дроби одного размера. Дробинки подбирали таким образом, чтобы их диаметры не различались более чем на 0,01 мм. Дробинки играли роль единичных зерен, которые после прессования имели форму правильных многогранников. Экспериментально определенный коэффициент вариации v_l составил 41 %, что близко к значению, приведенному в таблице для δ -распределения, и вполне согласуется с данными, полученными на основе измерений длин хорд на эталонных структурах (ГОСТ 5639) [24].

Функции распределения. Статистический анализ результатов измерений параметров структуры проводили в программе Statgraphics Centurion. Проверку согласия результатов моделирования с теоретическими функциями распределения выполняли с помощью критериев согласия Пирсона χ^2 .

Отметим, что критерий χ^2 позволяет проверить соответствие эмпирических данных любому теоретическому распределению. Вместе с тем необходимо учитывать, что при изменении числа интервалов разбиения, например, с 26 до 16 вероятность согласия увеличивается с 0,06 до 0,43, т.е. почти на порядок. Это означает, что коли-

чество интервалов разбиения, которое автоматически принимается программами для количественного анализа изображений в ААИ, не всегда оптимально. Поэтому тестируемое распределение принимали в том случае, если вероятность согласия с теоретическим распределением превышала 0,05.

В обобщенном виде результаты моделирования можно представить следующим образом. В случае исходного δ -распределения диаметров сфер функция распределения по длинам хорд l и диаметрам сечений d почти со 100 %-й вероятностью соответствует двухпараметрическому β -распределению, которое в нашем случае может быть представлено как

$$\beta_{m,n}(x) = \frac{1}{B(m,n)} x^{m-1} (1-x)^{n-1}, \quad (1)$$

где $x = l$ (или d),

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$$

β -функция ($m > 1$, $n > 1$).

При δ -распределении нормированных диаметров исходных сфер значения длин хорд l и диаметров сечений d имеют ограниченную область определения $[0, 1]$, поэтому в данном случае функции распределения экспоненциального вида не могут быть реализованы. Функции распределения по размерам зерен степенного вида, подобные β -распределению (1), можно получить при рассмотрении процесса роста зерен с учетом дополнительного условия — конечного значения максимального размера зерна [25]. Таким образом, полученный в результате моделирования вид функции распределения может быть реализован только при выполнении определенных условий и имеет ограниченную область применения.

Для исходного нормального распределения по нормированным диаметрам сфер функция

Результаты моделирования параметров зеренного строения поликристалла

The results of modelling the grain structure parameters of the polycrystal

Исходное распределение	Параметры исходного распределения	Параметры моделируемых распределений							
		$\bar{d}$	$v_d, \%$	$\bar{f}$	$v_f, \%$	$\bar{l}$	$v_l, \%$	$\bar{p}$	$v_p, \%$
δ -распределение	$\bar{D} = 1, v_D = 0 \%$	0,778	28,7	0,51	45,6	0,61	42,2	2,44	28,7
Нормальное распределение	$\bar{D} = 1, v_D = 15 \%$	0,785	32,2	0,54	55,1	0,616	43,8	6,15	16,7
	$\bar{D} = 1, v_D = 30 \%$	0,789	41,9	0,58	75,8	0,62	51,9	6,82	51,4
	$\bar{D} = 1, v_D = 40 \%$	0,788	50,0	0,61	91,5	0,61	60,3		
Нормальное распределение [22]	$\bar{D} = 1, v_D = 10 \%$	0,786	30,3			0,617	42,6		
	$\bar{D} = 1, v_D = 20 \%$	0,786	35,0			0,618	46,3		
	$\bar{D} = 1, v_D = 30 \%$	0,784	42,3			0,616	52,4		

распределения длин хорд l и эффективных размеров (диаметров) d соответствует γ -распределению

$$\gamma_{k,\lambda}(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x}, \quad (2)$$

где $x = l$ (или d),

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt —$$

γ -функция Эйлера ($k > 0, \lambda > 0$).

Отметим, что функция распределения удельной поверхности зерен ΣS описывается нормальным распределением. Для γ -распределения математическое ожидание случайной величины x имеет вид: $Mx = k/\lambda$.

Появление γ -распределения по размерам зерен объяснимо. Действительно, асимптотики функции распределения по размерам зерен имеют экспоненциальный характер и неограниченную область определения $x \in [0, \infty)$. Кроме того, γ -распределению будет подчинен любой процесс, являющийся реализацией совокупности независимых экспоненциально распределенных случайных процессов [26]. Это вполне характерно для процесса роста зерен и формирования зеренной структуры поликристалла. Известно также, что при определенных условиях, когда совокупность независимых случайных процессов становится очень большой, γ -распределение приближается к нормальному распределению. По-видимому, это и происходит при переходе от линейных (l, d) к более сложному параметру — удельной поверхности границ зерен ΣS .

Для экспериментальной проверки результатов моделирования функции распределения по эффективным размерам зерен провели металлографический анализ структуры малоуглеродистой стали 08кп после рекристаллизационного отжига. Режим отжига обеспечил статистически достоверную однородность структуры и отсутствие металлографической анизотропии. Параметры зеренной структуры определяли методом случайных секущих на микрофотографиях (размер хорд), планиметрическим методом (площадь сечений зерен) и методом случайных секущих по стандарту ASTM E122–85 (удельная поверхность границ зерен).

На рис. 2 представлены гистограммы распределений длин хорд и удельной поверхности границ зерен. Использование критерия χ^2 показало согласие эмпирического и теоретического распределений с доверительной вероятностью 0,22 и 0,68 соответственно, что значительно превосходит критическое значение 0,05. Эффективный

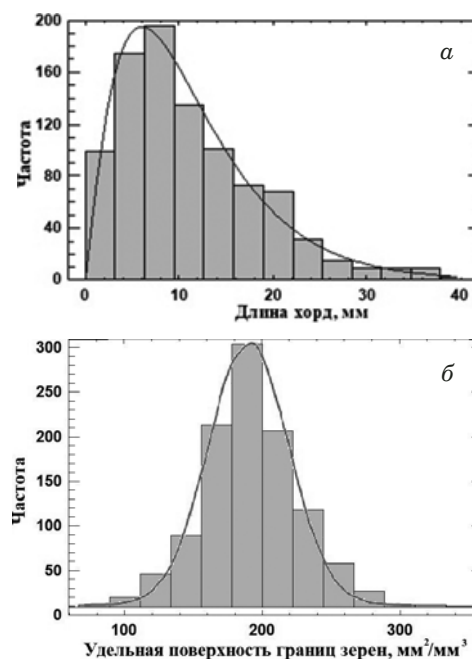


Рис. 2. Гистограммы распределений длин хорд (а) и удельной поверхности границ зерен (б) (сплошные линии — теоретические кривые γ -распределения и нормального распределения соответственно)

Fig. 2. Histograms of the distribution of the grain structure parameters: а — distribution of the chord lengths; б — distribution of the specific surface of grain boundaries (solid lines — theoretical curves of γ - and normal distribution)

размер зерен также с высокой степенью достоверности описывается γ -распределением.

На рис. 3 приведены результаты проверки согласия эмпирического и теоретического нормальных законов распределения графическим методом (путем представления результатов измерений удельной поверхности границ зерен на вероятностной бумаге).

Видно, что длины хорд и эффективные размеры зерен в полиэдрических структурах адекватно могут быть описаны γ -распределением, а удельная поверхность границ зерен — нормальным законом распределения. Рассчитав параметры функции распределения наиболее важной характеристики — эффективного размера d , можно по формуле (2) получить, по нашему мнению, наиболее удобную для практического использования оценку среднего размера зерна исследуемого поликристалла.

Заключение

Статистическое моделирование микроструктуры совокупности сферических частиц как модели однофазной и равноосной полиэдрической структуры методом Монте-Карло позволило получить статистические параметры (средние значения, дисперсии, коэффициенты вариации) и функции распределения диаметров (эффективных размеров) случайных сечений зерен d , длин

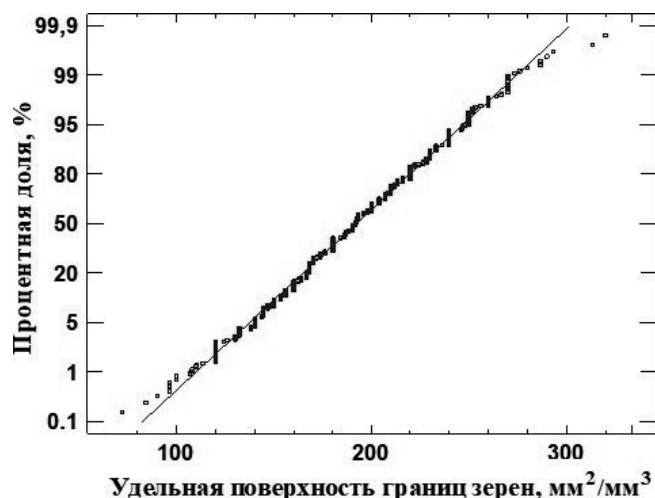


Рис. 3. Результаты измерений удельной поверхности границ зерен, представленные на вероятностной бумаге (сплошная линия — теоретическое нормальное распределение)

Fig. 3. The results of measuring the specific surface of grain boundaries presented on a probabilistic paper (solid line — theoretical normal distribution curve)

хорд l и других характеристик зеренной микро-структуры. Установлено, что функция распределения эффективных размеров зерен наиболее адекватно описывается γ -распределением, которое следует использовать при анализе экспериментальных функций распределения по размерам зерен однофазных поликристаллических материалов с равноосными зёрнами. Обычно применяемое логнормальное распределение не имеет достаточного физического обоснования. Показано, что статистически обоснованная и достоверная оценка среднего размера зерен — генеральное среднее (математическое ожидание) эффективных размеров зерен с функцией γ -распределения, параметры которой должны быть предварительно определены при анализе зеренной структуры поликристаллического материала. Полученные результаты статистического моделирования подтверждены экспериментальными данными металлографического исследования микроструктур модельных (темплеты из свинцовой дроби одинакового размера как аналог однофазной идеально однородной структуры) и промышленных (малоуглеродистая сталь 08кп) материалов.

Благодарности

Авторы выражают благодарность Е. Э. Новосветловой, В. В. Ромашовой и Е. В. Шерстнёвой (кафедра ФММ ТулГУ) за помощь в проведении экспериментальных исследований.

Финансирование

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-02-00760).

ЛИТЕРАТУРА

1. Салтыков С. А. Стереометрическая металлография. — М.: Металлургия, 1970. — 376 с.
2. Приборы и методы физического металловедения / Под ред. Ф. Вейнберга. — М.: Наука, 1973. — 428 с.
3. Чернявский К. С. Стереология в металловедении. — М.: Металлургия, 1977. — 280 с.
4. Tewari A., Gokhale A. Estimation of three-dimensional grain size distribution from microstructural serial sections / Materials Characterization. 2001. Vol. 46. N 4. P 329 – 335. DOI: 10.1016/S1044-5803(01)00104-8.
5. Орлов А. И. Новая парадигма прикладной статистики / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 1. Ч. 1. С. 87 – 93.
6. Колмогоров А. Н. О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении / Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1986. С. 264 – 267.
7. Kiss L., Söderlund J., Niklasson G., Granqvist C. The real origin of lognormal distribution of nanoparticles in vapor growth processes / Nanostructured materials. 1999. Vol. 12. Issue 1 – 4. P 327 – 332. DOI: 10.1016/S0965-9773(99)00128-2.
8. Королев В. Ю. О распределении размеров частиц при дроблении / Информатика и ее применение. 2009. Т. 3. Вып. 3. С. 60 – 68.
9. Rios P., Zöllner D. Grain growth — unresolved issues / Materials Science and Technology. 2018. Vol. 34. Issue 6. P 629 – 638. DOI: 10.1080/02670836.2018.1434863.
10. Arguelles A. P., Turner J. A. Ultrasonic attenuation of polycrystalline materials with a distribution of grain sizes / Journal of the Acoustical Society of America. 2017. Vol. 141. Issue 6. P 4347 – 4353. DOI: 10.1121/1.4984290.
11. Готтштайн Г. Физико-химические основы материаловедения. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — 400 с.
12. Hillert M. On the theory of normal and abnormal grain growth / Acta Metallurgica. 1965. Vol. 13. Issue 3. P 227 – 238.
13. Binder K. Theory for the dynamics of “clusters”. II. Critical diffusion in binary systems and kinetics of phase separation / Physical Review B. 1977. Vol. 15. Issue 9. P 4425 – 4448.
14. Шевченко С. В. Формирование микроструктуры поликристаллических материалов и статистика распределения зерен по их средним размерам: возможность описания на основе уравнения коагуляции Смолуховского / Nanosystems. Nanomaterials. Nanotechnologies. 2015. Vol. 13. N 2. P 371 – 388.
15. Слезов В. В., Сагалович В. В. Диффузионный распад твердых растворов / Успехи физических наук. 1987. Т. 151. Вып. 1. С. 67 – 104. DOI: 10.3367/UFNr.0151.198701c.0067.
16. Ильиных А. В., Радионова М. В., Вильдеман В. Э. Компьютерный синтез и статистический анализ распределения структурных характеристик зернистых композиционных материалов / Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 2. С. 251 – 264.
17. Zollner D., Streitenberger P. Three-dimensional normal grain growth: Monte Carlo Potts model simulation and analytical mean field theory / Scripta Materialia. 2006. Vol. 54. N 9. P 1697 – 1702. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2005.12.042.
18. Zollner D., Streitenberger P. Grain size distributions in normal grain growth / Practical Metallography. 2010. Vol. 47. N 11. P 618 – 639.
19. Спектор А. Г. Дисперсионный анализ сферических частиц в непрозрачных структурах / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1950. Т. 16. № 2. С. 173 – 177.
20. Левин Д., Стефан Д., Кребиль Т., Беренсон М. Статистика для менеджеров с использованием Microsoft Excel. — М.: Вильямс, 2004. — 1312 с.

21. **Левин Д. М., Зубец В. В., Кобликова Л. В.** Методика представления результата измерения с учетом его статистической природы / Метрология. 1984. № 4. С. 9 – 14.
22. **Архангельский С. И., Гринберг Е. М., Тихонова И. В.** Моделирование методом Монте-Карло однородной структуры однофазных сплавов / Известия ТулГУ. Серия Материаловедение. 2000. Вып. 1. С. 135 – 144.
23. **Бахтияров К. И.** Теоретические вопросы количественного микроскопического анализа / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1968. № 3. С. 329 – 330.
24. **Штремель М. А., Карабасова Л. В.** О выборе характеристик зеренного строения / Заводская лаборатория. 1984. № 8. С. 37 – 41.
25. **Губанов П. Ю., Максимов И. Л.** Кинетика коалесценции в условиях действия альтернативных механизмов роста зерна / Кристаллография. 2008. Т. 53. № 1. С. 135 – 144.
26. **Орлов А. И.** Об оценивании параметров гамма-распределения / Обзорение прикладной и промышленной математики. 1997. Т. 4. Вып. 3. С. 471 – 482.
12. **Hillert M.** On the theory of normal and abnormal grain growth / Acta Metallurgica. 1965. Vol. 13. Issue 3. P. 227 – 238.
13. **Binder K.** Theory for the dynamics of “clusters”. II. Critical diffusion in binary systems and kinetics of phase separation / Physical Review B. 1977. Vol. 15. Issue 9. P. 4425 – 4448.
14. **Shevchenko S. V.** The formation of the microstructure of polycrystalline materials and statistics on the distribution of grains by their average sizes: the possibility of description based on the Smoluchowski coagulation equation / Nanosystems. Nanomaterials. Nanotechnologies. 2015. Vol. 13. N 2. P. 371 – 388 [in Russian].
15. **Slezov V. V., Sagalovich V. V.** Diffusive decomposition of solid solutions / Usp. Fiz. Nauk. 1987. Vol. 151. Issue 1. P. 67 – 104 [in Russian]; DOI: 10.3367/UFNr.0151.198701c.0067.
16. **Ilyinykh A. V., Radionova M. V., Vil'deman V. E.** Computer synthesis and statistical analysis of the distribution of structural characteristics of granular composite materials / Mekh. Kompozits. Mater. Konstr. 2010. Vol. 16. N 2. P. 251 – 264 [in Russian].
17. **Zollner D., Streitenberger P.** Three-dimensional normal grain growth: Monte Carlo Potts model simulation and analytical mean field theory / Scripta Materialia. 2006. Vol. 54. N 9. P. 1697 – 1702. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2005.12.042.
18. **Zollner D., Streitenberger P.** Grain size distributions in normal grain growth / Practical Metallography. 2010. Vol. 47. N 11. P. 618 – 639.
19. **Spector A. G.** Dispersion analysis of spherical particles in opaque structures / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 1950. Vol. 16. N 2. P. 173 – 177 [in Russian].
20. **Levin D., Stefan D., Krebil T., Berenson M.** Statistics for managers using Microsoft Excel. — Moscow: Vil'yams, 2004. — 1312 p. [in Russian].
21. **Levin D. M., Zubets V. V., Koblikova L. V.** The method of presenting the measurement result taking into account its statistical nature / Metrologiya. 1984. N 4. P. 9 – 14 [in Russian].
22. **Arkhangelskii S. I., Grinberg E. M., Tikhonova I. V.** Monte Carlo simulation of a homogeneous structure of single-phase alloys / Izv. TulGU. Ser. Materialoved. 2000. Issue 1. P. 135 – 144 [in Russian].
23. **Bakhtiyarov K. I.** Theoretical problems of quantitative microscopic analysis / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 1968. N 3. P. 329 – 330 [in Russian].
24. **Shtremel M. A., Karabasova L. V.** On the selection of characteristics of the grain structure / Zavod. Lab. 1984. N 8. P. 37 – 41 [in Russian].
25. **Gubanov P. Yu., Maksimov I. L.** Coalescence kinetics under the action of alternative grain grows mechanisms / Crystallography Reports. 2008. Vol. 53. Issue 1. P. 135 – 144. DOI: 10.1134/S1063774508010173.
26. **Orlov A. I.** Estimation of gamma distribution parameters / Obozr. Prikl. Promyshl. Matem. 1997. Vol. 4. Issue 3. P. 471 – 482 [in Russian].

REFERENCES