

**Механика материалов:
прочность, ресурс, безопасность****Materials mechanics:
strength, durability, safety**DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2020-86-7-45-54>**ВЕРОЯТНОСТНОЕ МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАЗРУШЕНИЙ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ
И КОНСТРУКЦИЙ**© **Анатолий Михайлович Лепихин^{1*}, Николай Андреевич Махутов²,
Юрий Иванович Шокин¹**¹ Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр-т Академика М. А. Лаврентьева, 6;
*e-mail: aml@ict.nsc.ru² Институт машиноведения РАН, Россия, 101000, г. Москва, Малый Харитоньевский переулок, 4; e-mail: kei51@mail.ru

*Статья поступила 10 февраля 2020 г. Поступила после доработки 10 февраля 2020 г.
Принята к публикации 20 февраля 2020 г.*

Рассмотрены вероятностные аспекты многомасштабного моделирования разрушений гетерогенных структур. Предложен комбинированный подход к решению задач оценки вероятностей разрушения структурно-неоднородных материалов, сочетающий методы гомогенизации с феноменологическими и численными моделями механики разрушения. Сформулирована модель обобщенной гетерогенной структуры, состоящей из разнородных материалов и областей разных масштабов, содержащих трещины и трещиноподобные дефекты. Связь масштабов осуществляется с использованием кинематических условий и многомасштабного принципа виртуальных сил. Вероятность разрушения сформулирована как условная вероятность последовательных вложенных событий разрушения структур разных масштабов. В качестве основных источников разрушений рассмотрены трещины и трещиноподобные дефекты, распределение которых представляется в виде пуассоновских ансамблей. Критические напряжения в вершинах трещин описываются моделью Вейбулла. Получены аналитические выражения для вероятностей разрушения многомасштабных гетерогенных структур с многоуровневыми предельными состояниями. Для оценки вероятностей разрушения с учетом реальной морфологии гетерогенных структур предложен подход на основе модифицированного метода статистического моделирования Монте-Карло. Особенность предлагаемого метода заключается в использовании трехуровневой схемы разрушения с численным решением задач на микро-, мезо- и макромасштабах. В качестве основных переменных используются обобщенные силы продвижения трещин и сопротивления росту трещин. Размеры трещин рассматриваются как обобщенные координаты. Для снижения размерности задача механики разрушения переформулируется в задачу устойчивости гетерогенной структуры под нагрузкой при вариациях обобщенных координат с анализом виртуальной работы обобщенных сил. Получены выражения для оценки вероятностей разрушения многомасштабных гетерогенных структур модифицированным методом Монте-Карло. Отмечены перспективы решения задач риск-анализа гетерогенных структур с помощью указанных подходов.

Ключевые слова: структурная неоднородность; предельное состояние; трещиноподобные дефекты; многомасштабное моделирование; обобщенные силы; вероятность разрушения; метод Монте-Карло.

**PROBABILISTIC MULTISCALE MODELING OF FRACTURE
IN HETEROGENEOUS MATERIALS AND STRUCTURES**© **Anatoly M. Lepikhin,^{1*} Nikolai A. Makhutov,² Yuri I. Shokin¹**¹ Institute of Computational Technologies SB RAS, 6, Akad. M. A. Lavrentieva prosp., Novosibirsk, 630090, Russia;
*e-mail: aml@ict.nsc.ru² Institute of Mechanical Engineering, RAS, 4, M. Kharitonievsky per., Moscow, 101000, Russia; e-mail: kei51@mail.ru

Received February 10, 2020. Revised February 10, 2020. Accepted February 20, 2020.

The probabilistic aspects of multiscale modeling of the fracture of heterogeneous structures are considered. An approach combining homogenization methods with phenomenological and numerical models of fracture mechanics is proposed to solve the problems of assessing the probabilities of destruction of structurally heterogeneous materials. A model of a generalized heterogeneous structure consisting of heterogeneous materials and regions of different scales containing cracks and crack-like defects is formulated. Linking of scales is carried out using kinematic conditions and multiscale principle of virtual forces. The probability of destruction is formulated as the conditional probability of successive nested fracture events of different scales. Cracks and crack-like defects are considered the main sources of fracture. The distribution of defects is represented in the form of Poisson ensembles. Critical stresses at the tops of cracks are described by the Weibull model. Analytical expressions for the fracture probabilities of multiscale heterogeneous structures with multilevel limit states are obtained. An approach based on a modified Monte Carlo method of statistical modeling is proposed to assess the fracture probabilities taking into account the real morphology of heterogeneous structures. A feature of the proposed method is the use of a three-level fracture scheme with numerical solution of the problems at the micro, meso and macro scales. The main variables are generalized forces of the crack propagation and crack growth resistance. Crack sizes are considered generalized coordinates. To reduce the dimensionality, the problem of fracture mechanics is reformulated into the problem of stability of a heterogeneous structure under load with variations of generalized coordinates and analysis of the virtual work of generalized forces. Expressions for estimating the fracture probabilities using a modified Monte Carlo method for multiscale heterogeneous structures are obtained. The prospects of using the developed approaches to assess the fracture probabilities and address the problems of risk analysis of heterogeneous structures are shown.

Keywords: structural heterogeneity; limit state; crack-like defects; multiscale modeling; generalized forces; fracture probability; Monte Carlo.

Введение

Постоянно растущие требования к конструкциям технических систем обеспечиваются совершенствованием методов проектирования, созданием новых конструкционных материалов и производственных технологий. Характерная особенность современных технологий заключается в том, что свойства материалов формируются непосредственно в процессе изготовления конструкций. Стратегия дальнейшей разработки новых конструкционных материалов и конструкций с радикально улучшенными свойствами состоит в создании композитных гетерогенных материалов и структур с многомасштабной внутренней иерархией. Это обстоятельство существенно усложняет традиционный расчетно-экспериментальный подход к проектированию гетерогенных структур и диктует необходимость разработки новых подходов, основанных на широком использовании методов вычислительного моделирования.

Реализация такого подхода требует решения многоуровневых, многомасштабных задач с нетривиальными механическими и вероятностными аспектами. Механические аспекты заключаются в необходимости описания процессов деформирования и разрушения одновременно на нескольких масштабах времени и размеров. При этом требуется учитывать сложные процессы перераспределения локальных полей напряжений и деформаций, формирования повреждений различных масштабов и иерархические переходы процесса разрушения в гетерогенной структуре. Вероятностные аспекты состоят в том, что про-

цессы разрушения могут реализовываться по различным конкурирующим механизмам, в формировании которых существенную роль играют случайные вариации структурно-механических параметров. Поэтому модели разрушений должны в явном виде содержать вероятностные описания таких переменных и параметров в рассматриваемой иерархии масштабов структуры и времени.

В данной работе рассмотрены некоторые концептуальные положения вероятностного многомасштабного моделирования разрушений гетерогенных структур, основанные на синтезе методов вычислительной механики, механики разрушения и методов теории вероятностей. Под гетерогенной структурой понимается деформируемая среда с периодической, градиентной или стохастической структурой, состоящей из двух и более физически разнородных компонент с высокой механической неоднородностью [1, 2]. К таким структурам можно отнести: композиционные материалы на металлической, керамической и полимерной основе; градиентные материалы; бимодальные, слоистые, гармонические структуры; конструкции из указанных материалов.

Предварительные замечания к разработке моделей и методов вероятностного многомасштабного моделирования разрушений

Многомасштабное моделирование структурно-неоднородных материалов занимает особое место в вычислительной механике. Интенсивное развитие методов математического моделирова-

ния, вычислительных средств и вычислительных технологий приводит к постоянному расширению круга задач, решаемых методами вычислительной механики. К числу таких задач относятся вычислительное проектирование новых конструкционных материалов и оптимальное проектирование конструкций, исследование процессов деформирования и разрушения сложных иерархических структур, создание цифровых двойников изделий и систем виртуальных испытаний изделий в штатных и аварийных режимах эксплуатации и многое другое.

Создание все более сложных структурно-неоднородных материалов ставит новые задачи многомасштабного моделирования. Наиболее сложным вопросом такого моделирования является оценка роли внутренней структуры в инициации и развитии повреждений под действием технологических и эксплуатационных нагрузок. Не менее сложным аспектом является учет трещиноподобных дефектов структуры, приводящих к эффектам локальной концентрации напряжений и инициации разрушений. Особую сложность представляет анализ множества событий на разных масштабах структуры материала.

С учетом указанных обстоятельств в современной постановке задача многомасштабного моделирования разрушений заключается в переходе от классического феноменологического рассмотрения разрушений на макроуровне к многомасштабному анализу и моделированию процессов зарождения и развития повреждений в структурно-неоднородной среде. Повреждения материалов в большинстве случаев связаны с образованием неоднородностей в виде слабых и сильных разрывов. К слабым относятся разрывы производных поля перемещений — деформаций. Они возникают при локализации пластических деформаций в виде полос скольжения, а также на границах раздела компонент с существенно различными свойствами. Сильные разрывы представляют собой скачки в поле перемещений в зоне трещин. Моделирование механики разрывов является сложной задачей, поскольку уравнения равновесия в частных производных, используемые при решении краевых задач, не совместимы с разрывами. Некоторые смягчения сложностей можно получить при переходе к интегро-дифференциальным уравнениям равновесия. Однако и в этом случае разрывы не являются естественной частью решения.

Наличие разрывов накладывает существенные ограничения на применение классических методов многомасштабной гомогенизации к моделированию разрушений. В частности, основными условиями применимости процедуры гомогенизации являются периодичность рассматриваемой структуры и возможность использования

концепции репрезентативного объемного элемента (Representative volume element, RVE), основанного на классическом принципе Хилла – Мандела [3, 4]. При наличии разрывов оба условия могут нарушаться. Кроме того, накопление и развитие повреждений в микроструктуре материала приводят к нарушению условий стохастической однородности RVE и невозможности использования периодических граничных условий [5, 6].

Нелинейность поведения материала, которая имеет место при повреждениях структуры, приводит к тому, что процессы на мезомасштабе становятся зависимыми от макромасштаба. В таких условиях для каждой рассматриваемой точки макромасштаба необходимо сопоставлять RVE на всех нижележащих мезоуровнях, что приводит к трудоемкому вычислительному моделированию.

В вычислительном аспекте моделирование механики разрывов является сложной задачей, поскольку уравнения равновесия в частных производных, используемые при решении краевых задач, не совместимы с разрывами. Некоторые сложности можно смягчить при переходе к интегро-дифференциальным уравнениям равновесия. Однако и в этом случае разрывы не являются естественной частью решения. Поэтому они вводятся с использованием некоторого априорного механизма или в форме трещины как внутренней границы области с пренебрежимо малым объемом. В любом случае положение разрыва должно быть задано заранее в модели материала. Например, при использовании метода конечных элементов разрывы должны задаваться во время генерации сетки. Помимо этого, модель необходимо дополнить внешним критерием, определяющим условия увеличения разрыва во времени. Указанные обстоятельства накладывают существенные ограничения на аналитические модели и методы многомасштабного моделирования разрушений.

Другими проблемами многомасштабного моделирования являются большая размерность рассматриваемых параметрических пространств и большая вариативность расчетных ситуаций. Размерности параметрических пространств, определяющих структуру, физические и механические свойства материалов, силовые нагрузки и воздействия, поля напряжений и деформаций, химические воздействия внешней среды и пр. могут быть многопорядковыми. Наборы расчетных ситуаций, требуемые для достоверной оценки работоспособности гетерогенных структур в заданных условиях, могут составлять тысячи и десятки тысяч вариантов. В итоге получаются сложноразрешимые вычислительные задачи.

Принимая во внимание указанные обстоятельства, можно констатировать, что для много-

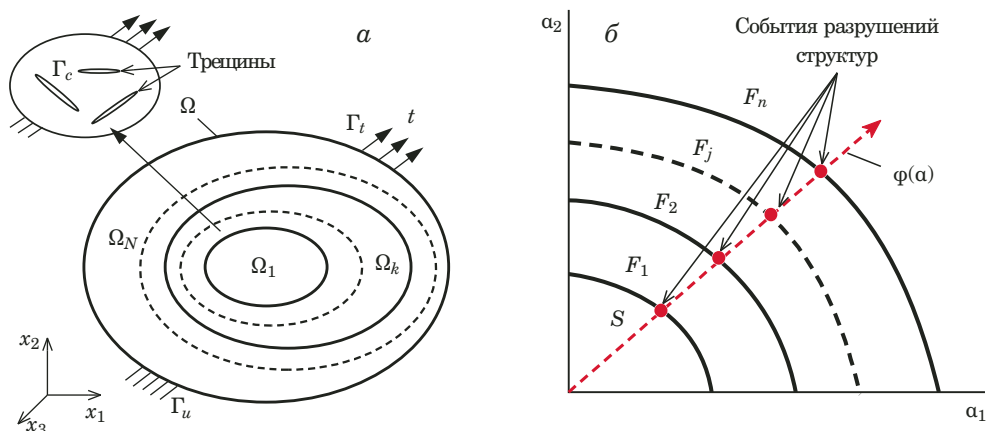


Рис. 1. Схемы многомасштабной гетерогенной структуры (а) и событий разрушения (б)

Fig. 1. Schemes of multiscale heterogeneous structure (a) and destruction events (b)

масштабного моделирования деформирования и разрушения гетерогенных структур необходим комбинированный подход, сочетающий методы гомогенизации со специальным мелкомасштабным моделированием отдельных высоконагруженных областей гетерогенных структур с использованием стохастического представительского объемного элемента. Свойства материала и процессы повреждения на микроуровне следует рассматривать с применением методов гомогенизации, а повреждения на мезо- и макроуровне — с использованием методов локального моделирования. Для снижения размерности задачи в таком комбинированном подходе можно использовать феноменологические модели, параметры которых определяются в результате многомасштабного вычислительного моделирования.

Модель многомасштабной гетерогенной структуры

В соответствии с изложенным выше представим многомасштабную гетерогенную структуру как пространственно-временную область $\Omega \times t$, $t \in T$, с непересекающимися подобластями Ω_i , $i = 1, N$, такими, что $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots \supset \Omega_N$ (рис. 1, а). Параметр t является квазиперемennой, отражающей факт изменения напряжений, структуры и механических свойств во времени. Каждая из указанных подобластей имеет характерный масштаб структуры M такой, что $M_1 \ll \dots \ll M_i \ll \dots \ll M_n$. Далее будем полагать, что связь масштабов осуществляется с использованием [7]: принципа кинематической допустимости, предполагающего, что кинематические переменные рассматриваемых масштабов являются связанными величинами; принципа математической дуальности, устанавливающего, что обобщенные силы и напряжения на рассматриваемых масштабах определяются в дуальности с кинематическими пере-

менными на этих масштабах; многомасштабного принципа виртуальных сил, определяющего условия равновесия локальных объемов с учетом наличия трещин.

Границы Γ_Ω каждой подобласти Ω_i включают части Γ_u и Γ_t , на которых заданы соответствующие граничные усилия и перемещения. Полагая, что каждая подобласть может содержать трещины и трещиноподобные дефекты различных типов, размеров и пространственной ориентации.

Состояние структуры на каждом масштабе можно определить компонентами перемещений $u(r)$, напряжений $\sigma_{ij}(r)$ и деформаций $\varepsilon_{ij}(r)$, где r — вектор пространственных координат, $r \in \Omega$. Компоненты напряжений и деформаций на каждом масштабе связаны уравнениями состояния $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, где C_{ijkl} — тензор модулей упругости. Средние компоненты напряжений и деформаций для каждой подобласти Ω_i можно найти из решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_i &= 0 \text{ в } \Omega, \\ \varepsilon_{ij} &= \nabla^s u_i \text{ в } \Omega, \\ u_i &= \bar{u}_i \text{ на } \Gamma_u, \\ \sigma_{ij}n_j &= t_i \text{ на } \Gamma_t \end{aligned} \quad (1)$$

с использованием схем гомогенизации

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} \sigma_{ij} dV, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} \varepsilon_{ij} dV, \quad (2)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{eff} \bar{\varepsilon}_{kl}. \quad (3)$$

Локальные компоненты напряжений и деформаций находятся из решения краевой задачи для тела с трещинами:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + b_i &= 0 \text{ в } \Omega, \\ \varepsilon_{ij} &= \nabla^s u_i \text{ в } \Omega, \\ u_i &= \bar{u}_i \text{ на } \Gamma_u, \\ \sigma_{ij} n_j &= t_i \text{ на } \Gamma_t, \\ -n_i \sigma_{ij} n_j &= p_{nn} \text{ на } \Gamma_c, \\ -s_i \sigma_{ij} n_j &= p_{sn} \text{ на } \Gamma_c,\end{aligned}\quad (4)$$

где b_i — внешние силы; ∇^s — симметричный градиент; p_{nn} , p_{sn} — локальные усилия на поверхности Γ_c трещин; t_i , $\bar{u}_i$ — граничные силы и перемещения; n_i , s_i — единичные векторы.

В общем случае разрушение многомасштабной иерархической структуры Ω , характеризуемое уравнениями (1) – (4), заключается в последовательности событий $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_i \supset \dots \supset F_n$, так что $F_n = \cap F_i$ (рис. 1, б). Каждое из этих событий определяется соответствующими условиями предельного состояния Φ_i на рассматриваемых масштабах M_i и t_i с заданными критериями разрушения C_f :

$$\Phi_i(t) = \{M_i, t | \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, C_f\} = 0. \quad (5)$$

Многомасштабная вероятностная модель разрушений

Для рассмотренной модели многомасштабной иерархической структуры Ω вероятность разрушения $P_f(\Omega)$ можно сформулировать как условную вероятность реализации последовательных вложенных событий разрушения $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_i \supset \dots \supset F_n$:

$$\begin{aligned}P_f(\Omega) &= P(F_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n F_n\right) = \\ &= P\left\{\left(F_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\right) P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} F_i\right)\right\} = P(F_1) \prod_{i=2}^n P(F_{i+1} | F_i). \quad (6)\end{aligned}$$

Для решения уравнения (6) требуются дополнительные допущения, определяющие вид событий F_i . В рамках данной работы полагается, что основным источником разрушений являются трещины и трещиноподобные дефекты. Принимается, что эти дефекты представляют собой статистические ансамбли — массивы дефектов случайных размеров масштаба M_i и случайной ориентации в любой заданной области Ω_i . С учетом статистических данных неразрушающего контроля

[8] вполне обоснованно можно принять, что указанные статистические ансамбли являются пуассоновскими:

$$P(k, \Omega) = \frac{\Lambda^k}{k!} \exp\{-\Lambda\}. \quad (7)$$

В общем случае $\Lambda = \Omega \times \mu$, где Λ — математическое ожидание числа дефектов, μ — плотность числа дефектов в единице объема.

Основываясь на результатах исследований механики разрушения, вполне справедливо полагать, что дефекты образуются и активируются при случайных уровнях напряжений $\sigma(r, t)$, $r \in \Omega$, $t \in T$, а само разрушение связано с достижением одним или несколькими дефектами некоторых критических размеров $\alpha\{\sigma(r, t)\} = \alpha_c$ [9]. С учетом случайных факторов примем допущение, что критические напряжения в вершине трещины описываются моделью Вейбулла. При этих допущениях плотность числа критических дефектов μ_c можно связать с плотностью дефектов всех размеров μ и уровнем напряжений следующим соотношением:

$$\mu_c(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma(r, t) \leq \sigma_{th} \\ \mu \left(\frac{\sigma(r, t)}{\sigma_u} \right)^m, & \sigma(r, t) > \sigma_{th}, \end{cases} \quad (8)$$

где m , σ_u — статистические параметры модели Вейбулла; σ_{th} — напряжения, при достижении которых образуются зародыши трещин.

Учитывая (7) и (8), вероятность разрушения P_i на любом иерархическом уровне Ω_i запишем как вероятность наличия в структуре M_i хотя бы одной трещины критических размеров:

$$\begin{aligned}P_i(k \geq 1, \Omega_i) &= 1 - P(k = 0, \Omega_i) = \\ &= 1 - \exp\left\{-\int_{\Omega_i} \mu_c(\sigma) d\Omega_i\right\}.\end{aligned} \quad (9)$$

Вероятность разрушения для многомасштабной структуры $M \times T$ будет выглядеть следующим образом:

$$P_f(M, T) = 1 - \prod_{(M, T) \in \Omega} P_i. \quad (10)$$

В общем случае введенная выше плотность критических дефектов является непрерывной функцией времени $\mu_c(r, t)$. С учетом этого элементарную вероятность P_i можно представить как

$$P_i = P(r, t) = \exp\left\{-\frac{\partial \mu_c(r, t)}{\partial t} dM dt\right\}. \quad (11)$$

После соответствующих подстановки (11) в формулу (10) с учетом (9) и преобразований полу-

чим следующее выражение для определения вероятностей разрушения многомасштабной структуры:

$$P_f(M, T) = 1 - \prod_{M \in \Omega} \exp \left\{ - \iint_{(M, T) \in \Omega} \frac{\partial \mu_c(x, t)}{\partial t} dM dt \right\}. \quad (12)$$

Примем во внимание, что поверхностные и внутренние дефекты имеют разные опасности с точки зрения механики разрушения. Поэтому вместо плотности $\mu_c(x, t)$ можно записать две компоненты: объемную μ_c^V и поверхностную μ_c^S . С учетом этого вместо (9) получим

$$P_f(M, T) = 1 - \prod_{M \in \Omega} \exp \left\{ - \int_V \int_T \frac{\partial \mu_c^V(x, t)}{\partial t} dV dt - \int_S \int_T \frac{\partial \mu_c^S(x, t)}{\partial t} dS dt \right\}. \quad (13)$$

Следует отметить, что в представленных выше соотношениях статистические параметры μ , m , σ_u , σ_{th} определяются для каждого масштабного уровня. Поэтому плотности μ_c , μ_c^V и μ_c^S являются характеристиками конкретного масштабного уровня.

Ключевым элементом вычисления вероятностей разрушения по формулам (12) и (13) является плотность дефектов критических размеров (8). Она содержит четыре неопределенные компоненты: плотность трещиноподобных дефектов и трещин μ , напряжения $\sigma(r, t)$ и статистические параметры m и σ_u . Оценку параметра μ можно получить по результатам неразрушающего контроля гетерогенных структур. Особые возможности в данном направлении дает акустико-эмиссионный контроль [10, 11]. Параметры m и σ_u находят экспериментально по результатам статистических испытаний образцов гетерогенных структур разных масштабов. Напряжения $\sigma(r, t)$ в области трещины в большинстве случаев можно получить только численными методами. Принимая во внимание произвольную пространственную ориентацию трещин, множество их форм и размеров, сложность взаимодействия структур разных масштабов, а также возможность взаимодействия трещин, данную задачу решить крайне сложно [12]. Без существенной потери точности результата во многих случаях можно использовать простой критерий максимального напряжения, которое действует в рассматриваемом объеме материала Ω_i , $\sigma(r, t) = \max_{\Omega_i} \sigma(t)$.

Представленная выше многомасштабная вероятностная модель требует определенной корректировки для моделирования разрушения на макроуровне. Для макромасштаба остается справедливой гипотеза пуассоновских ансамблей де-

фектов и трещин [8]. В то же время разрушающие напряжения оцениваются с использованием силовых, деформационных или энергетических критериев механики разрушения [9]. С учетом этого параметр $\mu_c(r, t)$ можно представить в следующем виде:

$$\mu_c(K, t) = \mu \left(\frac{K_i(t)}{K_u} \right)^\beta, \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

или

$$\mu_c(J, t) = \mu \left(\frac{J(t)}{J_u} \right)^\beta, \quad (15)$$

где K_i — коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины; J — интеграл Черепанова – Райса; K_u , J_u , β — статистические параметры распределений трещиностойкости гомогенизированного материала гетерогенной структуры.

В результате решения задач (12) и (13) с учетом (14) и (15) можно получать обобщенные оценки вероятностей разрушения многомасштабных гетерогенных структур.

Вероятностное многомасштабное моделирование методом Монте-Карло

Изложенный подход не позволяет учесть реальную морфологию многомасштабной структуры материала, расположение и форму трещиноподобных дефектов, сложное нелинейное поведение материала, кинематические взаимосвязи разных масштабов и ряд других особенностей реальных конструкций. Для оценок вероятностей разрушения с учетом отмеченных факторов необходимо использовать методы вычислительного статистического моделирования на основе многомасштабных стохастических методов конечных элементов [13, 14].

Не вдаваясь в подробности указанных методов, отметим, что одной из основных проблем их применения к многомасштабным гетерогенным структурам является высокая размерность конечно-элементной задачи и необходимость ее N -кратного решения со статистически изменяющимися переменными. В связи с этим в литературных источниках обычно рассматривают двухуровневые модели гетерогенных структур — с микро- и макромасштабами. Предпочтительны, но и более трудоемки — трехуровневые задачи с анализом микро-, мезо- и макромасштабов структуры (рис. 2).

Укажем некоторые направления эффективного вычислительного статистического решения задачи оценки вероятностей разрушения гетерогенных структур на основе трехуровневой моде-

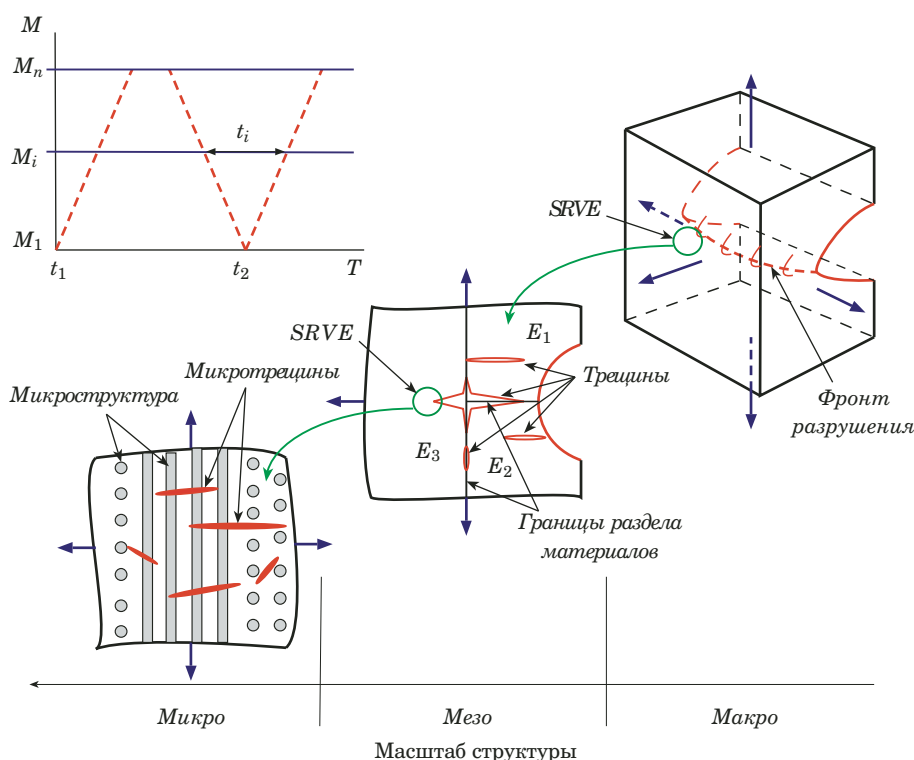


Рис. 2. Трехуровневая схема моделирования разрушений

Fig. 2. Three-level scheme of fracture simulation

ли. Использование локальных критериев механики разрушения в такой модели со статистическими ансамблями трещин неизбежно сопряжено с решением вычислительных задач очень большой размерности. Одним из направлений снижения размерности можно считать переход к нелокальным критериям разрушения, основанным на вариационных энергетических принципах механики разрушения [9]. Развитие этого направления [15] снимает некоторые ограничения на допустимые механизмы роста трещин, существенно расширяя круг прикладных задач механики разрушения. Особенность таких задач заключается в том, что в них определяются условия устойчивости трещин под нагрузкой, а не условия разрушения (достижения трещинами критических размеров). Однако в контексте вероятностного анализа это не приводит к существенному отличию результатов.

Принимая во внимание изложенное, в качестве основных переменных предпочтительнее применять обобщенные силы продвижения трещин G и сопротивления развитию трещин G_c , а также результирующие обобщенные силы $\bar{G} = G - G_c$. В качестве обобщенных координат целесообразно использовать размеры трещин $l = \{l_j, j = 1, m\}$. С учетом этого задачу разрушения можно переформулировать в задачу устойчивости структур M_i при вариациях обобщенных

координат l с анализом квадратичной формы виртуальной работы

$$\delta^2 A = \sum_i \sum_j \frac{\partial \tilde{G}_i}{\partial l_i \partial l_j} \delta l_i \delta l_j \geq 0. \quad (16)$$

Следует отметить, что силы сопротивления росту трещин на каждом масштабном уровне в данной схеме определяются с использованием метода гомогенизации:

$$G_c = \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} G_{ci} d\Omega. \quad (17)$$

Для снижения числа реализаций модели в процедуре статистических испытаний наиболее перспективным можно считать модифицированный метод Монте-Карло с выборкой по важности, широко используемый при решении задач теории надежности [16]. Этот метод дает более частые выборки из области, где некоторая плотность выборки важности $h(\alpha)$ для случайных переменных α достигает максимальных значений. С учетом этого статистическая оценка вероятностей разрушения определяется по формуле

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l(\alpha_i) \frac{f(\alpha_i)}{h(\alpha_i)}. \quad (18)$$

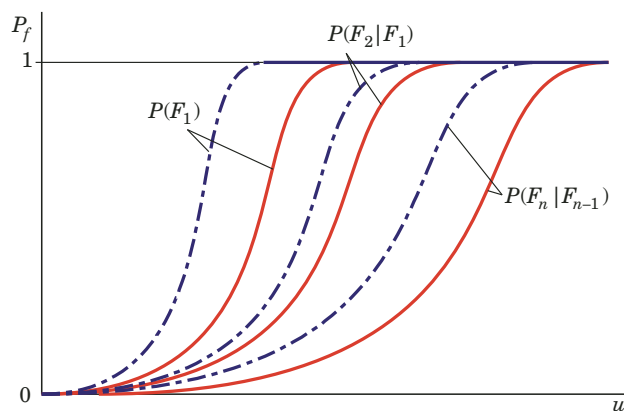


Рис. 3. Условные функции вероятностей разрушения многомасштабной структуры

Fig. 3. Conditional functions of the fracture probability of a multiscale structure

Укажем еще одно эффективное направление уменьшения числа испытаний. Поскольку в рассматриваемом случае параметрическая область разрушений F разделена на подобласти F_i , для снижения числа случайных реализаций N численной конечно-элементной модели можно использовать идеи метода марковских цепей Монте-Карло [17]. С учетом этого и формулы (18) для задачи разрушения гетерогенной структуры с множеством предельных состояний можно получить следующее выражение для статистической оценки вероятностей многомасштабного разрушения:

$$P_f(\Omega) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} I_{F_1} \{\alpha_k^{(1)}\} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{N_i} \prod_{k=1}^{N_i} I_{F_i} \{\alpha_k^{(i)}\}, \quad (19)$$

где индикаторная функция

$$I_{F_1} = \begin{cases} 1, & \alpha_k^{(1)} \in F_1 \\ 0, & \alpha_k^{(1)} \notin F_1 \end{cases}, \quad I_{F_i} = \begin{cases} 1, & \alpha_k^{(i)} \in F_i \\ 0, & \alpha_k^{(i)} \notin F_i \end{cases}.$$

Общая схема решения задачи на этой основе заключается в вычислении статистических параметров компонент напряжений и деформаций — средних значений $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$, средних квадратических отклонений $\tilde{\sigma}_{ij}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, функций распределения вероятностей $f(\sigma_{ij})$, $f(\varepsilon_{ij})$ для рассматриваемых масштабов $M_i \in \Omega$ и $t_i \in T$ при заданных вариациях нагрузок, размеров и числа дефектов, а также характеристик механических свойств. Полагается, что каждый структурный масштаб может содержать пуассоновские ансамбли трещин и трещиноподобных дефектов со случайными размерами $l = \{l_i, i = 1, n\}$ из допустимого множества размеров $L = [L_{\min}, L_{\max}]$. Далее определяют обобщенные силы G и G_c и проводят проверку условия (16). Если условие устойчивости не вы-

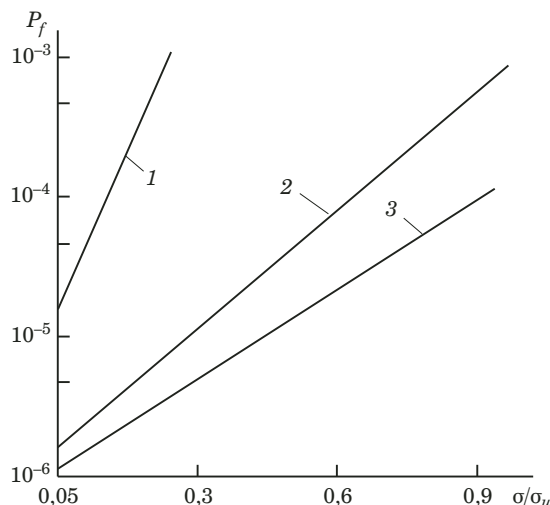


Рис. 4. Функции распределения вероятностей разрушения многомасштабной гетерогенной структуры (1 — микромасштаб; 2 — мезомасштаб; 3 — макромасштаб)

Fig. 4. The probability distribution functions of the fracture of a multiscale heterogeneous structure (1 — microscale; 2 — mesoscale; 3 — macroscale)

полняется, то индикаторную функцию в формуле (19) увеличивают на единицу.

Алгоритм решения задачи включает следующие этапы:

- 1) определение набора случайных и детерминированных переменных α ;
- 2) задание функций плотностей распределения вероятностей случайных переменных $f(\alpha)$;
- 3) преобразование случайных переменных в стандартизированные нормально распределенные переменные;
- 4) создание набора случайных переменных с использованием генераторов случайных чисел;
- 5) получение численного решения краевых задач для набора случайных переменных;
- 6) задание плотностей выборки важности $h(\alpha)$;
- 7) определение обобщенных сил G и G_c , проверка условия (16);
- 8) N -кратное повторение пп. 4 – 7;
- 9) оценка вероятностей разрушения по формуле (19).

Таким образом, используя изложенные методы вероятностного многомасштабного моделирования, можно получить семейство функций распределения вероятностей разрушения, соответствующих как отдельным иерархическим уровням, так и гетерогенной структуре в целом (рис. 3). Следует обратить внимание, что даже при высоких вероятностях разрушений на микроуровне для гетерогенной структуры в целом может иметь место относительно низкая вероятность разрушения за счет «запасов живучести» структуры.

В качестве иллюстрации на рис. 4 представлены результаты расчета вероятностей разрушения гетерогенной структуры (с использованием трехуровневой модели) по формуле (12) с учетом (8). Расчет выполнен при следующих значениях параметров: плотности числа трещин $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 5$, $\mu_3 = 1$; параметры модели Вейбулла $\sigma_{1u} = 1100$ МПа, $\sigma_{2u} = 850$ МПа, $\sigma_{3u} = 640$ МПа, $m = 5$.

Заключение

Рассмотрены основные аспекты проблемы многомасштабного моделирования разрушений композиционных материалов и конструкций как многомасштабных гетерогенных структур. Сформулирован комбинированный подход к решению задач оценки вероятностей иерархического многомасштабного разрушения, сочетающий методы гомогенизации с феноменологическими и численными моделями механики разрушения. Предложена модель обобщенной гетерогенной структуры, состоящей из разнородных материалов и областей разных масштабов, содержащих трещиноподобные дефекты. Вероятность разрушения сформулирована как условная вероятность последовательных вложенных событий разрушения структур разных масштабов.

Получены аналитические выражения для вероятностей разрушения многомасштабных гетерогенных структур с многоуровневыми предельными состояниями. Для оценки вероятностей разрушения с учетом реальной морфологии гетерогенных структур предложен подход на основе модифицированного метода статистического моделирования Монте-Карло. В качестве основных переменных выступают обобщенные силы продвижения трещин и сопротивления росту трещин. Размеры трещин рассматриваются как обобщенные координаты. Для снижения размерности задача вычислительной механики разрушения переформулируется в задачу устойчивости гетерогенной структуры под нагрузкой при вариациях обобщенных координат с анализом виртуальной работы обобщенных сил. Получены выражения для оценки вероятностей разрушения модифицированным методом Монте-Карло для многомасштабных гетерогенных структур.

Развитие предлагаемого подхода может служить основой для решения актуальных задач риск-анализа гетерогенных структур, включая как прямые задачи оценки вероятностей разрушения при заданных нагрузках и свойствах материалов, так и обратные задачи оптимизации структуры гетерогенных материалов с выбором таких микро-, мезо- и макроструктур, которые дают наименьшие вероятности разрушений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Wu X., Zhu Y.** Heterogeneous materials: a new class of materials with unprecedented mechanical properties / *Mater. Res. Lett.* 2017. Vol. 5. N 8. P 527 – 532.
2. **Datta S., Davin J. P.** Computational approaches to materials design: Theoretical and practical aspects. USA, Engineering Science Reference. — IGI Global, 2016. — 475 p.
3. **Hashin Z., Shtrickman S.** On some Variational Principles in Anisotropic and non-homogeneous Elasticity / *J. Mech. Phys. Solids.* 1962. Vol. 10. P 335 – 342.
4. Multiscale modeling of heterogeneous materials: From microstructure to macro-scale properties / Under edition O. Cazacu. — Wiley online library, 2008. — 368 p.
5. **Oliver J., Huespe A. E.** Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings / *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2004. Vol. 193. P 3195 – 3220.
6. **Nguyen V. P., Lloberas-Valls O., Stroeve M., Sluys L. J.** Computational homogenization for multiscale crack modelling: Implementational and computational aspects / *Int. Journal Numer. Meth. Engrg.* 2000(00). P 1 – 6.
7. **Taroco E., Blanco J., Feijoo R.** Introduction to the variational formulation in mechanics: Fundamentals and applications. — John Wiley & Sons, 2020. — 588 p.
8. **Лепихин А. М., Махутов Н. А., Москвичев В. В., Черняев А. П.** Вероятностный риск-анализ конструкций технических систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 174 с.
9. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. — М.: Наука, 1985. — 504 с.
10. **Лепихин А. М., Москвичев В. В., Черняев А. П.** Акустико-эмиссионный контроль деформирования и разрушения металлокомпозитных баков высокого давления / *Прикладная механика и техническая физика.* 2018. Т. 59. № 3. С. 145 – 154. DOI: 10.15372/PMTF20180316.
11. **Матвиенко Ю. Г., Васильев И. Е., Чернов Д. В.** Исследование кинетики разрушения однонаправленного ламината с применением акустической эмиссии и видеорегистрации / *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* 2019. Т. 85. № 11. С. 45 – 61. DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-11-45-61.
12. **Лепихин А. М., Москвичев В. В., Буров А. Е. и др.** Экспериментальные исследования прочности и ресурса металлокомпозитных баков высокого давления / *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* 2019. Т. 85. № 1. Ч. 1. С. 49 – 56. DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-1-1-49-56.
13. **Stefanou G.** The stochastic finite element method: Past, present and future / *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2009. Vol. 198. P 1031 – 1051.
14. **Zhou X.-Y., Gosling P. D., Ullah Z., Kaczmareczyk L., Pearce C. J.** Stochastic multi-scale finite element-based reliability analysis for laminated composite structures / *Applied mathematical modelling.* 2017. Vol. 45. P 457 – 473.
15. **Bourdin B., Francfort G. A.** The variational approach to fracture / *Journ. Elasticity.* 2008. Vol. 91. P 5 – 148.
16. **Shayanfar M. A., Barkhordari M. A., Roudak M. A.** An adaptive importance sampling-based algorithm using the first order method for structural reliability / *Int. J. Optim. Civil Eng.* 2017. Vol. 7. N 1. P 93 – 107.
17. **Au S. K., Beck J. L.** Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation / *Probabilistic Engineering Mechanics.* 2001. Vol. 16. P 263 – 277.

REFERENCES

1. **Wu X., Zhu Y.** Heterogeneous materials: a new class of materials with unprecedented mechanical properties / *Mater. Res. Lett.* 2017. Vol. 5. N 8. P 527 – 532.
2. **Datta S., Davin J. P.** Computational approaches to materials design: Theoretical and practical aspects. USA, Engineering Science Reference. — IGI Global, 2016. — 475 p.
3. **Hashin Z., Shtrickman S.** On some Variational Principles in Anisotropic and non-homogeneous Elasticity / *J. Mech. Phys. Solids.* 1962. Vol. 10. P 335 – 342.

4. Multiscale modeling of heterogeneous materials: From micro-structure to macro-scale properties / Under edition O. Caza-ku. — Willey online library, 2008. — 368 p.
5. **Oliver J., Huespe A. E.** Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings / *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2004. Vol. 193. P. 3195 – 3220.
6. **Nguyen V. P., Lloberas-Valls O., Stroeve M., Sluys L. J.** Computational homogenization for multiscale crack modelling: Implementational and computational aspects / *Int. Journal Numer. Meth. Engng.* 2000(00). P. 1 – 6.
7. **Taroco E., Blanco J., Feijoo R.** Introduction to the variational formulation in mechanics: Fundamentals and applications. — John Wiley & Sons, 2020. — 588 p.
8. **Lepikhin A. M., Makhutov N. A., Moskvichev V. V., Chernyaev A. P.** Probabilistic risk analysis of technical system designs. — Novosibirsk: Nauka, 2003. — 174 p. [in Russian].
9. **Parton V. Z., Morozov E. M.** Elastic-plastic fracture mechanics. — Moscow: Nauka, 1985. — 504 p. [in Russian].
10. **Lepikhin A. M., Moskvichev V. V., Chernyaev A. P.** Acoustic-emission control of the deformation and fracture of high-pressure metal-composite tanks / *Journal of applied mechanics and technical physics.* 2018. Vol. 5. Issue 3. P. 511 – 518. DOI: 10.15372/PMTF20180316.
11. **Matvienko Yu. G., Vasiliev I. E., Chernov D. V.** Study of fracture kinetics of unidirectional laminate using acoustic emission and video recording / *Zavod. Lab. Diagn. Mater.* 2019. Vol. 85. N 11. P. 45 – 61. DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-11-45-61 [in Russian].
12. **Lepikhin A. M., Moskvichev V. V., Burov A. E., et al.** Experimental study of the strength and resource of metal-composite high-pressure tanks / *Zavod. Lab. Diagn. Mater.* 2019. Vol. 85. N 1. Part 1. P. 49 – 56. DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-1-I-49-56 [in Russian].
13. **Stefanou G.** The stochastic finite element method: Past, present and future / *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2009. Vol. 198. P. 1031 – 1051.
14. **Zhou X.-Y., Gosling P. D., Ullah Z., Kaczmarczyk L., Pearce C. J.** Stochastic multi-scale finite element-based reliability analysis for laminated composite structures / *Applied mathematical modelling.* 2017. Vol. 45. P. 457 – 473.
15. **Bourdin B., Francfort G. A.** The variational approach to fracture / *Journ. Elasticity.* 2008. Vol. 91. P. 5 – 148.
16. **Shayanfar M. A., Barkhordari M. A., Roudak M. A.** An adaptive importance sampling-based algorithm using the first order method for structural reliability / *Int. J. Optim. Civil Eng.* 2017. Vol. 7. N 1. P. 93 – 107.
17. **Au S. K., Beck J. L.** Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation / *Probabilistic Engineering Mechanics.* 2001. Vol. 16. P. 263 – 277.