DOI: https://doi.org/10.26896/1028-6861-2020-86-7-72-80

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛЬНОГО И ТОЧЕЧНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

© **Абдурахим Ахмедович Абдушукуров[1], Гулноза Гафуровна Рахимова[2]**

[1] Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Ташкенте, Узбекистан, 100060, Ташкент, пр. Амира Темура, д. 22; e-mail: abdushukurov1710@gmail.com

[2] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, д. 4.

Статья поступила 5 февраля 2020 г. Поступила после доработки 12 марта 2020 г. Принята к публикации 27 марта 2020 г.

Точность систем интервальных оценок измеряется обычно при помощи длин интервалов при заданных вероятностях накрытия. Доверительные интервалы являются интервалами фиксированной ширины, если длина интервала детерминирована, т.е. не случайна, и стремится к нулю при заданной вероятности накрытия. Работа посвящена двум важным направлениям статистического анализа — последовательному интервальному оцениванию доверительными интервалами фиксированной ширины и последовательному точечному оцениванию с асимптотически минимальным риском. На примере двух простых статистических моделей изложены основные асимптотические задачи последовательного интервального оценивания доверительными интервалами фиксированной ширины и точечного оценивания. Проведен обзор данных по непараметрическому последовательному оцениванию и изложены новые результаты, полученные авторами в этом направлении. Последовательный анализ характеризуется тем, что момент прекращения наблюдений (момент остановки) является случайным и определяется в зависимости от значений наблюдаемых данных и от принятой меры оптимальности построенной статистической оценки. Поэтому для решения асимптотических задач последовательного оценивания использованы методы суммирования случайных величин. Для доказательства асимптотической состоятельности доверительных интервалов фиксированной ширины использован метод, основанный на применении предельных теорем для случайно остановленных случайных процессов. Получены общие условия состоятельности и эффективности последовательного интервального оценивания широкого класса функционалов от неизвестной функции распределения и эти условия проверены при последовательном интервальном оценивании неизвестной плотности вероятности асимптотически некоррелированного и линейного процессов. Приведены условия регулярности, обеспечивающие свойство быть оценкой с асимптотически минимальным риском для достаточно широких классов оценок и функций потерь, и эти условия проверены при последовательном точечном оценивании неизвестной функции распределения.

Ключевые слова: случайная величина; момент остановки; доверительный интервал; фиксированная ширина; асимптотическая состоятельность; асимптотическая эффективность; асимптотическая минимальность; функция потерь; функция риска.

ASYMPTOTICAL PROBLEMS OF SEQUENTIAL INTERVAL AND POINT ESTIMATION

© **Abdurakhim A. Abdushukurov[1], Gulnoza G. Rakhimova[2]**

[1] M. V. Lomonosov Moscow State University, Tashkent Branch, 22, prosp. Amir Temur, Tashkent, 100600, Uzbekistan, e-mail: abdushukurov1710@gmail.com

[2] Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, 4, Universitetskaya ul., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Received February 5, 2020. Revised March 12, 2020. Accepted March 27, 2020.

The accuracy of interval estimation systems is usually measured using interval lengths for given covering probabilities. The confidence intervals are the intervals of a fixed width if the length of the interval is determined, i.e., not random, and tends to zero for a given covering probability. We consider two important directions of statistical analysis -sequential interval estimation with confidence intervals of fixed width and sequential point estimation with asymptotically minimum risk. Two statistical models are used to describe the basis problems of sequential interval estimation by confidence intervals of a fixed width and point estimation. A review of data on nonparametric sequential estimation is carried out and new original results obtained by the authors are presented. Sequential analysis is characterized by the fact that the moment of termination of observations (stopping time) is random and is determined depending on the values of the observed data and on the adopted measure of optimality of the constructed statistical estimate. Therefore, to solve the asymptotic problems of sequential estimation, the methods of summation of random variables are used. To prove the asymptotic consistency of the confidence intervals of a fixed width, we used a method based on application of limit theorems for randomly stopped random processes. General conditions of the consistency and efficiency of sequential interval estimation of a wide class of functionals of an unknown distribution function are obtained and verified by sequential interval estimation of an unknown probability density of asymptotically uncorrelated and linear processes. Conditions of the regularity are specified that provide the property of being an estimate with an asymptotically minimum risk for a wide class of estimates and loss functions. Those conditions are verified by sequential point estimation of an unknown distribution function.

Keywords: random variable; stopping time; confidence interval; fixed width; asymptotic consistency; asymptotic efficiency; asymptotic minimality; loss function, risk function.

Введение

В классических методах математической статистики число наблюдений предполагается детерминированным. Последовательный анализ характеризуется тем, что момент прекращения наблюдений (момент остановки) является случайным и определяется в зависимости от значений наблюдаемых данных и от принятой меры оптимальности построенной статистической оценки. В данной работе на примере двух простых статистических моделей изложены основные асимптотические задачи последовательного интервального и точечного оценивания.

Последовательное интервальное оценивание. Рассмотрим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) нормальных $N(\theta, \sigma^2)$ случайных величин (сл. вел.). Используя эмпирическое среднее

$$\theta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

построим для неизвестного среднего θ интервальную оценку $I(n) = [\theta_n - \varepsilon, \theta_n + \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ малое число.

Пусть $0 < \gamma < 1$, $a = \Phi^{-1}[(1 + \gamma)/2]$, $\Phi(x)$ — функция распределения (ф.р.) стандартной нормальной сл. вел. Тогда для $n(\varepsilon) = \inf(n \geq 1: n \geq a^2\sigma^2/\varepsilon^2)$

$$P\{\theta \in I(n(\varepsilon))\} = P\left\{\left|\frac{1}{\sigma\sqrt{n(\varepsilon)}}\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}(\xi_i - \theta)\right| \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n(\varepsilon)}}{a\sigma}a\right\} \geq$$

$$\geq P\left\{\frac{1}{\sqrt{n(\varepsilon)}}\left|\sum_{i=1}^{n(\varepsilon)}\frac{\xi_i - \theta}{\sigma}\right| \leq a\right\} = 2\Phi(a) - 1 = \gamma.$$

Следовательно, $I(n(\varepsilon))$ является интервальной оценкой для θ с доверительным уровнем γ.

Если дисперсия нормального распределения σ^2 неизвестна, то, как показано в работе [1], по выборке фиксированного неслучайного объема невозможно построить доверительный интервал фиксированной ширины для среднего θ. В этом случае задача интервального оценивания доверительными интервалами фиксированной ширины сводится к задаче выбора правила или момента остановки $N(\varepsilon) = \inf(n \geq 1: n \geq a^2\sigma_n^2/\varepsilon^2)$, где σ_n^2 — состоятельная оценка для σ^2.

Ниже, в п. I, приведем общие условия состоятельности и эффективности последовательного интервального оценивания широкого класса функционалов от неизвестной функции распределения. В п. II и III эти общие условия проверим при последовательном интервальном оценивании неизвестной плотности вероятности асимптотически некоррелированного и линейного процессов.

Последовательное точечное оценивание. Рассмотрим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$. н.о.р. сл. вел. со средним θ и дисперсией σ^2. Неизвестное среднее θ оценим эмпирическим

$$\theta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

Предположим, что при точечном оценивании θ статистикой θ_n функция потерь состоит из квадратичной ошибки и стоимости выборки, т.е. $L_n = A(\theta_n - \theta)^2 + \varepsilon n$, где A известная весовая постоянная; ε — стоимость единицы выборки. Тогда риск оценивания θ статистикой θ_n составит $R_n(\varepsilon) = E(L_n) = A\sigma^2/n + \varepsilon n$.

Если σ^2 известна, то риск минимален при $n = n_0(\varepsilon) = \inf(n \geq 1: n \geq \sigma\sqrt{A/\varepsilon}$ и

$$\min_{n \geq 1} R_n(\sigma) = R_{n_0(\varepsilon)}(\sigma) = 2\varepsilon n_0(\varepsilon) = 2\sigma\sqrt{A\varepsilon},$$

т.е. θ_n является оценкой минимального риска (ОМР) для θ.

Если σ^2 неизвестна, то, как доказано Леманом [2], для любой оценки θ_n среднего θ не существует выборочной процедуры с фиксированным неслучайным объемом выборки, минимизирующей риски одновременно для всех σ^2. В этом случае задача планирования выборочной процедуры фактически сводится к задаче выбора правила или момента остановки $N(\varepsilon) = \inf(n \geq 1:$

$n \geq \sigma_n \sqrt{A/\varepsilon}$), где σ_n^2 — состоятельная оценка для σ^2.

Если в этой выборочной процедуре

$$\lim_{s \to 0} \frac{R^*_{N(\varepsilon)}(\sigma)}{R_{n_0(\varepsilon)}(\sigma)} = 1,$$

где $R^*_{N(\varepsilon)}(\sigma) = A(\theta_{N(\varepsilon)} - \theta)^2 + \varepsilon E(N(\varepsilon))$, то $\theta_{N(\varepsilon)}$ называется оценкой с асимптотически минимальным риском (ОАМР) для θ. Заметим, что асимптотическая оптимальность оценки $\theta_{N(\varepsilon)}$ рассматривается по отношению к ее непоследовательному аналогу $\theta_{n_0(\varepsilon)}$, соответствующему оптимальному объему выборки $n_0(\varepsilon)$.

В п. IV приведем условия регулярности, обеспечивающие свойство ОАМР для достаточно широких классов оценок θ_n и функций потерь L_n, а в п. V эти условия проверим при последовательном точечном оценивании неизвестной функции распределения.

I. Последовательное интервальное оценивание функционала от неизвестной функции распределения

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ рассмотрим сл. вел. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с неизвестной ф.р. $F \in \mathrm{F}$, где F семейство ф.р., удовлетворяющих определенным условиям регулярности. Для оценки функционала $\theta(F)$ от ф.р. F рассмотрим статистику $\theta_n = \theta_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, допускающую разложение

$$\theta_n = \theta(F) + [\theta_n - E(\theta_n)] + [E(\theta_n) - \theta(F)] =$$

$$= \theta(F) + \sum_{k=1}^{n} Y_n(F, \xi_k) + Z_n, \qquad (1.1)$$

где сл. вел. $Y_n(F, \xi_k)$, $1 \leq k \leq n$ и Z_n такие, что

$$n^\alpha \sum_{k=1}^{n} Y_n(F, \xi_k) \to DN(0, \sigma^2(F)) \text{ и } n^\alpha Z_n \to P0$$

при $n \to \infty$, $\alpha > 0$ — некоторое число, $\sigma^2(F) > 0$ конечный функционал от F, символы $\to D$, $\to P$ означают сходимость сл. вел. по распределению и вероятности соответственно.

Пусть $0 < \gamma < 1$, $a = \Phi^{-1}[(1 + \gamma)/2]$. Для любого $\varepsilon > 0$ определим интервал $I(n_\varepsilon) = [\theta_{n_\varepsilon} - \varepsilon, \theta_{n_\varepsilon} + \varepsilon]$ длины 2ε, где

$$n_\varepsilon = \inf\left[n \geq 1 : n \geq \left(\frac{a^2 \sigma^2(F)}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2\alpha}} \right]. \qquad (1.2)$$

Тогда из $\sigma^{-1}(F) n^\alpha(\theta_n(F) - \theta(F)) \to DN(0, 1)$ при $n \to \infty$ следует

$$P\{\theta(F) \in I(n_\varepsilon)\} = P\{|\theta_{n_\varepsilon} - \theta(F)| \leq \varepsilon\} =$$

$$= P\left\{\sigma^{-1}(F) n_\varepsilon^\alpha |\theta_{n_\varepsilon} - \theta(F)| \leq \frac{\sigma^{-1}(F) n_\varepsilon^\alpha \varepsilon}{a} a\right\} \geq$$

$$\geq P\{\sigma^{-1}(F) n_\varepsilon^\alpha |\theta_{n_\varepsilon} - \theta(F)| \leq a\} \to 2\Phi(a) - 1 = \gamma$$

при $\varepsilon \to 0$.

Это последовательная процедура обладает тем недостатком, что n_ε зависит от неизвестного функционала $\sigma^2(F)$, поэтому его необходимо оценить. Пусть $V_n^2 = V_n^2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — состоятельная оценка для $\sigma^2(F)$. Исходя из (1.2), определим момент остановки N_ε следующим образом:

$$N_\varepsilon = \inf\left(n \geq 1; n \geq \left(\frac{a^2 V_n^2}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2\alpha}} \right), \ \varepsilon > 0. \qquad (1.3)$$

Тогда последовательный доверительный интервал для $\theta(F)$, основанный на моменте остановки (1.3), имеет вид $I(N_\varepsilon) = [\theta_{N_\varepsilon} - \varepsilon, \theta_{N_\varepsilon} + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Следуя работе [3], введем следующие асимптотические критерии.

Определение 1.1. Доверительный интервал фиксированной ширины $I(N_\varepsilon)$ называется асимптотически состоятельным, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P\{\theta(F) \in I(N_\varepsilon)\} \geq \gamma$$

для некоторого $0 < \gamma < 1$ и всех $F \in \mathrm{F}$.

Определение 1.2. Момент остановки (1.3) называется асимптотически эффективным, если $I(N_\varepsilon)$ асимптотически состоятелен и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E(N_\varepsilon)}{n_\varepsilon} = 1.$$

Для момента остановки (1.3) и доверительного интервала фиксированной ширины $I(N_\varepsilon)$ справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1. Пусть $V_n^2 \to \sigma^2(F)$ с вероятностью 1 при $n \to \infty$, тогда:

1) для любого $\varepsilon > 0$, значение $P\{N_\varepsilon < \infty\} = 1$;
2) $N_\varepsilon \to \infty$ с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$;
3) $\lim_{\varepsilon \to 0} E(N_\varepsilon) = \infty$;
4) $N_\varepsilon / n_\varepsilon \to 1$ с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$.

Пусть символ $\to J$ означает слабую сходимость в J-топологии Скорохода.

Теорема 1.2. Пусть выполнено условие теоремы 1.1, а также

1) $n^\alpha(E\theta_n - \theta(F)) \to 0$ при $n \to \infty$;

2) $\zeta_\varepsilon(t),\ t \in [0, 1] \to J\ W(t),\ t \in [0, 1]$ при $\varepsilon \to 0$, где

$$\zeta_\varepsilon(t) = \sigma^{-1}(F) n_\varepsilon^\alpha \sum_{k=1}^{[n_\varepsilon t]} Y_{n_\varepsilon}(F, \xi_k),$$

$t \in [0, 1]$ и $W(t)$, $t \in [0, 1]$, — стандартный винеровский процесс с $EW(t) = 0$, $EW^2(t) = t$.

Тогда:

1) $\sigma^{-1}(F) N_\varepsilon^\alpha(\theta_{N_\varepsilon} - \theta(F)) \to DN(0, 1)$ при $\varepsilon \to 0$;

2) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} P(\theta(F) \in I(N_\varepsilon)) \ge \gamma$.

Теорема 1.3. Если для некоторого $\varepsilon_0 > 0$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0} P\left\{\frac{N_\varepsilon}{n_\varepsilon} \ge m\right\} < \infty, \text{ то } \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E(N_\varepsilon)}{n_\varepsilon} = 1.$$

Замечание 1.1. Если выполнены условия теорем 1.2 и 1.3, то момент остановки (1.3) является асимптотически эффективным.

Замечание 1.2. Начиная с работы [3], многие авторы в конкретных статистических моделях для доказательства асимптотической состоятельности доверительных интервалов фиксированной ширины применяли классическую теорему Анскомба [4], которая предполагала выполнение условия «равномерной непрерывности по вероятности». Обзор работ в этом направлении приведен в [5].

Для доказательства асимптотической состоятельности доверительных интервалов фиксированной ширины в данной работе использован подход, основанный на применении предельных теорем для сложных случайных функций из [6], которые рассмотрены также и в работах [7 – 11].

II. Последовательное интервальное оценивание плотности вероятности асимптотически некоррелированного случайного процесса

Рассмотрим на вероятностном пространстве (Ω, F, P) строго стационарный случайный процесс ξ_n, $n \in Z = \{..., -1, 0, 1, ...\}$. Для целых чисел $k < m$ через $\Im_k^m$ обозначим σ-алгебру событий, порожденных сл. вел. $\xi_k, ..., \xi_m$. Пусть $L^2(\Im_k^m)$ — гильбертово пространство $\Im_k^m$-измеримых функций с конечными вторыми моментами.

Определение 2.1. Стационарный случайный процесс ξ_n, $n \in Z$ называется асимптотически некоррелированным, если

$$c(n) = \sup \frac{E(gh)}{\sqrt{E(g^2)E(h^2)}} \text{ при } n \to \infty,$$

где супремум берется по всем $g \in L^2(\Im_{-\infty}^n)$ и $h \in L^2(\Im_n^\infty)$ $(n \ge 1)$, для которых $E(g) = E(h) = 0$.

Через $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ обозначим совместную плотность вероятности случайного вектора $(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{k-1})$, которую будем называть плотностью вероятности k-порядка случайного процесса ξ_n, $n \in Z$. Предположим, что плотность вероятности 1-го порядка $f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ неизвестна. Для оценки $f(x)$ рассмотрим рекуррентную ядерную оценку

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h(i)} K\left(\frac{x - \xi_i}{h(i)}\right) =$$

$$= \frac{n-1}{n} f_{n-1}(x) + \frac{1}{nh(n)} K\left(\frac{x - \xi_n}{h(n)}\right). \quad (2.1)$$

Здесь $h(n) = n^{-\beta}$, $0 < \beta < 1$, $K(x)$ — ограниченная плотность вероятности такая, что $|x|K(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Моментные и асимптотические свойства этой оценки для асимптотически некоррелированного процесса изучены в работах [12 – 14]. Оценка (2.1) допускает разложение

$$f_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} Y_n(K, \xi_i) + Z_n,$$

где

$$Y_n(K, \xi_i) = \frac{1}{nh(i)} K\left(\frac{x - \xi_i}{h(i)}\right) - E\left(\frac{1}{nh(i)} K\left(\frac{x - \xi_i}{h(i)}\right)\right),$$

$$1 \le i \le n \text{ и } Z_n = Ef_n(x) - f(x).$$

Теорема 2.1 [13]. Пусть выполнены следующие условия.

(A):

1) случайный процесс ξ_n, $n \in Z$ имеет ограниченные плотности вероятности до третьего порядка включительно;

2) $f(x) \ne 0$, $|f(x + h) - f(x)| \le L|x|$, $x \in R_1$, $h \in R_1$, L — положительная постоянная;

3) $c(n) = O(n^{-2-\delta})$ при $n \to \infty$, $\delta > 0$;

(B): $\int_{-\infty}^{\infty} |u| K(u) du < \infty, k = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u) du < \infty;$

(C): $1/3 < \beta < \delta/3$.

Тогда

$$\sigma^{-1} n^{\frac{1-\beta}{2}} \sum_{i=1}^{n} Y_n(K, \xi_i) \to DN(0,1)$$

и $n^{(1-\beta)/2} Z_n \to 0$ при $n \to \infty$, где $\sigma^2 = \dfrac{k}{1+\beta} f(x)$.

Пусть $0 < \gamma < 1$, $a = \Phi^{-1}[(1 + \gamma)/2]$. Для любого $\varepsilon > 0$ определим интервал $I(n_\varepsilon) = [f_{n_\varepsilon}(x) - \varepsilon, f_{n_\varepsilon}(x) + \varepsilon]$ длины 2ε и

$$n_\varepsilon = \inf\left(n \ge 1 : n \ge \left(\frac{a^2\sigma^2}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right). \quad (2.2)$$

Тогда из теоремы 2.1 следует

$$P\{f(x) \in I(n_\varepsilon)\} = P\{|f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| \le \varepsilon\} =$$

$$= P\left\{\sigma^{-1} n_\varepsilon^{\frac{1-\beta}{2}} |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| \le \frac{\sigma^{-1} n_\varepsilon^{\frac{1-\beta}{2}} \varepsilon}{a}\right\} \ge$$

$$\ge P\left\{\sigma^{-1} n_\varepsilon^{(1-\beta)/2} |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| \le a\right\} \to$$

$$\to 2\Phi(a) - 1 = \gamma \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Эта последовательная процедура обладает тем недостатком, что n_ε зависит от неизвестной плотности вероятности $f(x)$ через σ^2, поэтому вместо n_ε рассмотрим момент остановки

$$N_\varepsilon = \inf\left(n \ge 1 : n \ge \left(\frac{a^2 k}{\varepsilon^2 (1+\beta)} f_n(x)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right), \ \varepsilon > 0. \quad (2.3)$$

Тогда последовательный доверительный интервал для $f(x)$, основанный на моменте остановки (2.3), имеет вид $I(N_\varepsilon) = [f_{N_\varepsilon}(x) - \varepsilon, f_{N_\varepsilon}(x) + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Теорема 2.2 [14]. Если выполнено условие (A) и $0 < \beta < 1/2$, то $f_n(x) \to f(x)$ с вероятностью 1 при $n \to \infty$ и для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0} P\left\{\frac{N_\varepsilon}{n_\varepsilon} \ge m\right\} < \infty.$$

Из этой теоремы и из теорем 1.1 и 1.3 получаем следующие теоремы.

Теорема 2.3. Если выполнено условие (A) и $0 < \beta < 1/2$, то для n_ε из (2.2) и момента остановки (2.3) справедливы соотношения:

1) для любого $\varepsilon > 0$ $P\{N_\varepsilon < \infty\} = 1$;
2) $N_\varepsilon \to \infty$ с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$;
3) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} E(N_\varepsilon) = \infty$;
4) $N_\varepsilon / n_\varepsilon \to 1$ с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$;
5) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{E(N_\varepsilon)}{n_\varepsilon} = 1$.

Теорема 2.4. Если выполнены условия (A), (B) и (C), то

$$\zeta_\varepsilon(t), \ t \in [0, 1] \to J\, W(t), \ t \in [0, 1] \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где случайный процесс

$$\zeta_\varepsilon(t) = \sigma^{-1}(F) n_\varepsilon^{\frac{1-\beta}{2}} \sum_{i=1}^{[n_\varepsilon t]} Y_{n_\varepsilon}(K, \xi_i),$$

$t \in [0, 1]$ и $W(t)$, $t \in [0, 1]$, — стандартный винеровский процесс с $EW(t) = 0$, $EW^2(t) = t$.

Из теоремы 1.2 следует еще одна теорема.

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия (A), (B) и (C). Тогда:

1) $\sigma^{-1} N_\varepsilon^{\frac{1-\beta}{2}} (f_{N_\varepsilon}(x) - f(x) \to DN(0, 1)$ при $\varepsilon \to 0$;

2) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} P(f(x) \in I(N_\varepsilon)) \ge \gamma$.

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия (A), (B) и $1/3 < \beta < \min(1/2, \delta/3)$, тогда момент остановки (2.3) является асимптотически состоятельным.

III. Последовательное интервальное оценивание плотности вероятности линейного случайного процесса

Рассмотрим на вероятностном пространстве (Ω, F, P) строго стационарный линейный случайный процесс

$$X_t = \sum_{n=0}^{n} g_n Y_{t-n}, \ t \ge 1, \quad (3.1)$$

где Y_t, $t \in Z = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ — последовательность н.о.р. сл. вел. и $\{g_n, n \ge 0\}$ — последовательность чисел такая, что $g_n \to 0$, $n \to \infty$. Случайными процессами вида (3.1) описываются, например, схемы авторегрессии и смешанной авторегрессии скользящего среднего. Через $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ обозначим совместную плотность вероятности случайного вектора $(X_1, ..., X_k)$. Предположим, что маргинальная плотность вероятности $f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ неизвестна. Для оценки плотности вероятности $f(x)$ рассмотрим ядерную оценку

$$f_n(x) = \frac{1}{n^{1-\beta}} \sum_{i=1}^{n} K((x - X_i) n^\beta), \quad (3.2)$$

где $K(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ — неотрицательная и ограниченная функция, $0 < \beta < 1$.

Оценка (3.2) допускает разложение

$$f_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} Y_n(K, X_i) + Z_n,$$

где

$$Y_n(K, X_i) = \frac{1}{n^{1-\beta}} K((x - X_i) n^\beta) -$$

$$- E\left(\frac{1}{n^{1-\beta}} K((x - X_i) n^\beta)\right),$$

$1 \le i \le n$ и $Z_n = Ef_n(x) - f(x)$. Обозначим

$$k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} K(y) \mathrm{d}y, \ k_q = \lim_{u \to 0} \frac{1 - k(u)}{|u|^q}$$

и пусть $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ являются характеристическими функциями сл. вел. Y_1 и X_1. Введем следующие условия:

(A):

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(y)\mathrm{d}y < \infty,\ k = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(u)\mathrm{d}u < \infty;$$

$$\lim_{|y|\to\infty} |y|K(y) = 0,\ \int_{-\infty}^{\infty} |K(y+h) - K(y)|\mathrm{d}y < c_1 h,$$

где c_1 конечная положительная постоянная;

(B):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u\varphi(u)|\mathrm{d}u < \infty,\ k_q < \infty,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}|u|^q\psi(u)\mathrm{d}u\right| < \infty \text{ для некоторого } q > 0;$$

(C): $E(|Y_1|^m) < \infty$ для некоторого $m > 0$ и если $m \geq 1$, то $E(Y_1) = 0$;

(D): $\sum_{i=n}^{\infty} i|g_i|^\alpha = O(n^{-\gamma})$ для некоторого $\gamma > 0$, где $\alpha = m/2$, если $m \leq 1$ и $\alpha = 1/2$, если $m > 1$.

Теорема 3.1 [15]. Пусть выполнены условия (A), (B), (C), (D) и $1/(2q + 1) < \beta < 1$. Тогда

$$\sigma^{-1} n^{\frac{1-\beta}{2}} \sum_{i=1}^{n} Y_n(K, X_i) \xrightarrow{D} N(0,1) \text{ и } n^{(1-\beta)/2} Z_n \to 0$$

при $n \to \infty$, где $\sigma^2 = kf(x)$.

Пусть $0 < \gamma < 1$, $a = \Phi^{-1}((1 + \gamma)/2)$. Для любого $\varepsilon > 0$ интервал $I(n_\varepsilon) = [f_{n_\varepsilon}(x) - \varepsilon,\ f_{n_\varepsilon}(x) + \varepsilon]$ длины 2ε и n_ε определяется формулой (2.2).

Рассмотрим момент остановки

$$N_\varepsilon = \inf\left(n \geq 1 : n \geq \left(\frac{a^2 k}{\varepsilon^2} f_n(x)\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\right),\ \varepsilon > 0, \quad (3.3)$$

а также соответствующий последовательный доверительный интервал для $f(x)$, основанный на моменте остановки (3.3) вида $I(N_\varepsilon) = [f_{N_\varepsilon}(x) - \varepsilon,$ $f_{N_\varepsilon}(x) + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Введем условие

(E):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(t) - aK(at)|\mathrm{d}t \leq \frac{c_2 b}{1-a},\ \int_{-\infty}^{\infty} |u|^s|\varphi(u)|\mathrm{d}u < \infty$$

для $0 < b < a < 1$ и $s = 0, 1, 2$, где c_2 — положительная постоянная.

Теорема 3.2 [16]. Если выполнены условия (A), (B), (C), (D), (E) и $1/(2q + 1) < \beta < 1/2$, то $f_n(x) \to f(x)$ с вероятностью 1 при $n \to \infty$ и для некоторого $\varepsilon_0 > 0$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0} P\left\{\frac{N_\varepsilon}{n_\varepsilon} \geq m\right\} < \infty.$$

Из этой теоремы и из теорем 1.1 и 1.3 исходит следующая.

Теорема 3.3. Если выполнены условия (A), (B), (C), (D), (E) и $1/(2q + 1) < \beta < 1/2$, то для момента остановки (3.3) справедливы соотношения:

1) для любого $\varepsilon > 0$ $P\{N_\varepsilon < \infty\} = 1$;
2) $N_\varepsilon \to \infty$ с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$;
3) $\lim_{\varepsilon\to 0} E(N_\varepsilon) = \infty$;
4) $N_\varepsilon/n_\varepsilon \to 1$ с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$.
5) $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{E(N_\varepsilon)}{n_\varepsilon} = 1$.

Теорема 3.4. Если выполнены условия (A), (B), (C), (D) и $1/(2q + 1) < \beta < 1/2$, то

$$\zeta_\varepsilon(t),\ t \in [0, 1] \to J\ W(t),\ t \in [0, 1] \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где случайный процесс

$$\zeta_\varepsilon(t) = \sigma^{-1} n_\varepsilon^{\frac{1-\beta}{2}} \sum_{i=1}^{[n_\varepsilon t]} Y_{n_\varepsilon}(K, X_i),$$

$t \in [0, 1]$ и $W(t)$, $t \in [0, 1]$ — стандартный винеровский процесс с $EW(t) = 0$, $EW^2(t) = t$.

Из теоремы 1.2 вытекает приведенная далее.

Теорема 3.5. Пусть выполнены условия (A), (B), (C), (D) и $1/(2q + 1) < \beta < 1$. Тогда

$$\sigma^{-1} N_\varepsilon^{\frac{1-\beta}{2}} (f_{N_\varepsilon}(x) - f(x)) \to DN(0,1)$$

при $\varepsilon \to 0$ и $\lim_{\varepsilon\to 0} P(f(x) \in I(N_\varepsilon)) \geq \gamma$.

Следствие 3.1. Пусть выполнены условия (A), (B) и $1/(2q + 1) < \beta < 1/2$. Тогда момент остановки (3.3) является асимптотически состоятельным.

IV. Последовательное точечное оценивание функционала от неизвестной функции распределения

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ сл. вел. с неизвестной ф.р. $F \in \mathrm{F}$, где F семейство ф.р., удовлетворяющих определенным условиям регулярности. Для оценки функционала $\theta(F)$ от ф.р. $F(x)$ рассмотрим статистику $\theta_n = \theta_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, обозначим через $\varphi(y)$, $y \geq 0$, положительную возрастающую функцию с $\varphi(0) = 0$, через $\alpha_n = \alpha_n(F) = |\theta_n -$

$-\theta(F)|$ — абсолютную погрешность оценивания и через ε — стоимость единицы выборки.

Определение 4.1. Величина $L_n = L_n(\varepsilon, F) = \varphi(\alpha_n) + \varepsilon n$ называется функцией потерь оценивания $\theta(F)$ статистикой $\theta_n = \theta_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Замечание 4.1. Если $\varphi(y) = y$, то L_n — линейная функция потерь, а если $\varphi(y) = y^2$, то L_n — квадратичная функция потерь.

Введем условие

(A): $\beta_n(F) = E(\varphi(\alpha_n))$ для всех $n \geq 1$ существует, убывает по n и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n(F) = 0$.

Определение 4.2. Величина

$$R_n(\varepsilon, F) = E(L_n(\varepsilon, F)) = \beta_n(F) + \varepsilon n$$

называется функцией риска оценивания $\theta(F)$ статистикой $\theta_n = \theta_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Поскольку величина $\beta_n(F)$ убывает, а εn возрастает по n, то существует такое оптимальное значение $n_0 = n_0(\varepsilon, F)$, что

$$R_{n_0}(\varepsilon, F) = \inf_{n\geq n_0} R_n(\varepsilon, F). \tag{4.1}$$

Определение 4.3. Если для оценки $\theta_n = \theta_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ выполняется (4.1), то это называется оценкой минимального риска (ОМР).

Здесь следует отметить, что оптимальный объем выборки $n_0 = n_0(\varepsilon, F)$ зависит от неизвестной ф.р. $F(x)$ через $\beta_n(F)$, следовательно, как отмечено во введении, только выборка со случайным объемом в виде момента остановки может обеспечить выполнение (4.1), т.е. ОМР θ_n может быть построена, когда n — случайный момент остановки, причем эти результаты будут асимптотическими при $\varepsilon \to 0$.

Для нахождения этого момента остановки введем условие

(B): существуют такие постоянные $0 < m \leq 1$ и $0 < \beta_0(F) < \infty$, $F \in \mathrm{F}$, что $n^m\beta_n(F) \to \beta_0(F)$ при $n \to \infty$.

Замечание 4.2. Если $\varphi(y) = y$, то $m = 1/2$, а если $\varphi(y) = y^2$, то $m = 1$.

Из условия (B) получаем соотношение $R_n(\varepsilon, F) = \beta_n(F) + \varepsilon n \approx n^{-m}\beta_0(F) + \varepsilon n$ при $n \to \infty$, где символ $a_n \approx b_n$ означает

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Через $R_n^*(\varepsilon, F) = n^{-m}\beta_0(F) + \varepsilon n$ обозначим функцию риска, асимптотически равную функции риска $R_n(\varepsilon, F)$.

Определение 4.4. Если для оценки $\theta_n = \theta_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ существует такое значение $n_0 = n_0(\varepsilon, F)$, что выполняется соотношение

$$R_{n_0}^*(\varepsilon, F) = \min_{n\geq 1} R_n^*(\varepsilon, F),$$

то $R_n(\varepsilon, F)$ называется асимптотически минимальной функцией риска, а величина $n_0 = n_0(\varepsilon, F)$ — асимптотически оптимальным объемом выборки.

Лемма 4.1. Если выполнены условия (A) и (B), то асимптотически оптимальный объем выборки

$$n_0 = n_0(\varepsilon, F) = \inf\left(n \geq 1 : n \geq \left(\frac{m\beta_0(F)}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m+1}} \right)$$

и минимальное значение функции риска $R_n^*(\varepsilon, F) = n^{-m}\beta_0(F) + \varepsilon n$ составит $R_{n_0}^*(\varepsilon, F) = (\varepsilon^m(m + m^{-m})\beta_0(F))^{1/(1+m)}$.

Оптимальный объем выборки $n_0 = n_0(\varepsilon, F)$ и минимальное значение функции риска $R_{n_0}^*(\varepsilon, F)$ обладают тем недостатком, что они определяются функционалом $\beta_0(F)$ от неизвестной ф.р. F, поэтому необходимо оценить $\beta_0(F)$. Предположим, что существует состоятельная положительная оценка $b_n = b(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ для $\beta_0(F)$, $F \in \mathrm{F}$, $n \geq 1$, такая, что выполняется условие (C): существуют число $\alpha > m + \gamma$ и целое n_0 такие, что для любого $\delta > 0$ и $n \geq n_0$

$$P\{|b_n - \beta_0(F)| \geq \delta\} \leq \frac{c(\alpha, \delta)}{n^{1+\alpha}},$$

где $0 < c(\alpha, \delta) < \infty$ — постоянная.

Исходя из вида асимптотически оптимального объема выборки $n_0 = n_0(\varepsilon, F)$, определим момент остановки $N(\varepsilon)$ следующим образом:

$$N(\varepsilon) = \inf\left(n \geq 1 : n \geq \left(\frac{m(b_n + n^{-\gamma})}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m+1}} \right) =$$

$$= \inf\left(n \geq 1 : n^{m+1} \geq \frac{m(b_n + n^{-\gamma})}{\varepsilon} \right). \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. Если выполнены условия (A), (B) и (C), то справедливы следующие утверждения:

1) для любого $\varepsilon > 0$ $P\{N_\varepsilon < \infty\} = 1$;
2) $N_\varepsilon \to \infty$ с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$;
3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} E(N_\varepsilon) = \infty$;
4) $\dfrac{N(\varepsilon)}{n_0(\varepsilon, F)} \to 1$ с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 4.2. Если выполнены условия (A), (B), (C) и для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0} P\left\{ \frac{N(\varepsilon)}{n_0(\varepsilon, F)} \geq m \right\}$$

сходится, тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{E(N(\varepsilon))}{n_0(\varepsilon, F)} = 1$.

Рассмотрим последовательную точечную оценку $\theta_{N(\varepsilon)} = \theta_{N(\varepsilon)}(\xi_1, \xi_2, ..., \theta_{N(\varepsilon)})$, основанную на правиле остановки (4.2) с функцией риска $R^*_{N(\varepsilon)}(\varepsilon, F) = E(\varphi(\alpha_{N(\varepsilon)})) + \varepsilon N(\varepsilon)$.

Определение 4.5. Если

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{R^*_{N(\varepsilon)}(\varepsilon,F)}{R_{n_0}(\varepsilon,F)} = 1 \text{ для любого } F \in \mathrm{F}, \quad (4.3)$$

то $\theta_{N(\varepsilon)}$ называется оценкой с асимптотически минимальным риском (ОАМР) для $\theta(F)$.

Введем условия регулярности:

(D): для любых $t_1, t_2 \in R_1$ существует постоянная c, не зависящая от t_1 и t_2 такая, что функция $\varphi(y)$, $y \geq 0$ удовлетворяет $\varphi(|t_1 - t_2|) \leq c|t_1 - t_2|^{2m}$;

(E): для $r > 4$ существуют постоянная $c_r < \infty$ и целое число n_0 такие, что

$$E\left\{(\sqrt{n}|\theta_n - \theta(F)|)^r\right\} \leq c_r \text{ для } n \geq n_0;$$

(F): существует такое n_0, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left\{\max_{k:|k-n|\leq\delta n}\left(\sqrt{n}|\theta_k - \theta_n|\right)^{2m}\right\} = 0 \text{ для } n \geq n_0.$$

Теорема 4.3. Пусть выполнены условия (A), (B), (C), (D), (E), (F). Тогда выполняется (4.3) и $\theta_{N(\varepsilon)}$ является ОАМР для $\theta(F)$.

Теорема 4.4. Пусть последовательность оценок $\{b_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

(G):

$$\sqrt{n}\left(\frac{b_n}{\beta_0(F)} - 1\right) \to DN(0, a^2)$$

при $n \to \infty$ для некоторого конечного a, зависящего от $F(x)$;

(H):

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty} P\left\{\max_{k:|k-n|\leq\delta n}\sqrt{n}|b_k - b_n| \geq \lambda\right\} = 0$$

для любого $\lambda > 0$.

Тогда

$$\frac{N(\varepsilon) - n_0(\varepsilon,F)}{\sqrt{n_0(\varepsilon,F)}} \to DN\left(0, \frac{a^2}{m+1}\right)$$

при $n \to \infty$ для $\gamma \geq 1/2$ из (4.2).

V. Последовательное точечное оценивание неизвестной функции распределения

В этом пункте проверим выполнение условий регулярности, (A), (B) и (C) в частном случае, когда функционал $\theta(F)$ от неизвестного распределения F равен самой ф.р., т.е. $\theta(F) = F(x)$. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ — независимые сл. вел. с неизвестной ф.р. $F(x)$, $x \in R_1$. Оценим ее эмпирической ф.р.

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(\xi_i < x),$$

где $I(A)$ индикатор события A. В качестве функции потерь оценивания неизвестной ф.р. $F(x)$ эмпирической ф.р. $F_n(x)$ примем квадратичную функцию

$$L_n = L_n(\varepsilon, F) = (F_n(x) - F(x))^2 + \varepsilon n.$$

Функция риска оценивания неизвестной ф.р. $F(x)$ статистикой $F_n(x)$ равна $R_n(\varepsilon, F) = M(L_n(\varepsilon, F) = M(F_n(x) - F(x))^2 + \varepsilon n$. Поскольку $\varphi(y) = y^2$,

$$\alpha_n = |F_n(x) - F(x)| \text{ и } \beta_n(F) = \frac{F(x)(1 - F(x))}{n},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}(n\beta_n(F)) = \lim_{n\to\infty}\left[n\frac{F(x)(1-F(x))}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(F(x)(1 - F(x))) = F(x)(1 - F(x)) = \beta_0(F)$$

и условия (A) и (B) выполняются при $m = 1$.

Минимальное значение функции риска

$$R_n(\varepsilon, F) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n} + \varepsilon n$$

достигается при n, равном

$$n_0 = n_0(\varepsilon, F) = \sqrt{\frac{F(x)(1-F(x))}{\varepsilon}} =$$

$$= \inf\left(n \geq 1 : n \geq \sqrt{\frac{F(x)(1-F(x))}{\varepsilon}}\right),$$

и составляет

$$R_{n_0}(\varepsilon, F) = \min_{n\geq 1} R_n(\varepsilon, F) = 2\sqrt{\varepsilon F(x)(1 - F(x))}.$$

Функция $R_{n_0}(\varepsilon, F)$ — минимальная функция риска, а $n_0 = n_0(\varepsilon, F)$ — оптимальный объем выборки. Поскольку оба они зависят от неизвестного $\beta_0(F) = F(x)(1 - F(x))$, то необходимо оценить $\beta_0(F)$. В качестве оценки $\beta_0(F) = F(x)(1 - F(x))$ рассмотрим статистику $b_n = F_n(x)(1 - F_n(x))$ и покажем выполнение условия (C). Поскольку

$$|b_n - \beta_0(F)| = |F_n(x)(1 - F_n(x)) - F(x)(1 - F(x))| =$$

$$= |(F_n(x) - F(x)) - (F_n^2(x) - F^2(x))| =$$

$$= |(F_n(x) - F(x))(1 - F_n(x) - F(x)) \leq$$

$$\le |F_n(x) - F(x)| \le \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)|,$$

то, используя неравенство Дворецкого – Кифера – Вольфовича

$$P\left\{\sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)| \ge \frac{y}{\sqrt{n}}\right\} \le ce^{-2y^2},$$

$y > 0$, для произвольного числа $\alpha > 0$, получим

$$P\{|b_n - \beta_0(F)| \ge \delta\} =$$

$$= P\{|F_n(x)(1 - F_n(x)) - F(x)(1 - F(x)) \ge \delta\} \le$$

$$\le P\left\{\sup_{0<x<\infty} |F_n(x) - F(x)| \ge \delta\right\} =$$

$$= P\left\{\sup_{0<x<\infty} |F_n(x) - F(x)| \ge \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right\} \le ce^{2n\delta^2} < \frac{c}{n^{1+\alpha}},$$

т.е. условие (C) выполняется.

Исходя из вида оптимального объема выборки $n_0 = n_0(\varepsilon, F)$, момент остановки $N(\varepsilon)$ введем следующим образом:

$$N(\varepsilon) = \sqrt{\frac{F_n(x)(1 - F_n(x))}{\varepsilon}} =$$

$$= \inf\left(n \ge 1 : n \ge \sqrt{\frac{F_n(x)(1 - F_n(x))}{\varepsilon}}\right).$$

Свойства этого момента остановки приведены в следующей теореме.

Теорема 5.1. Справедливы следующие утверждения:

1) для любого $\varepsilon > 0$ $P\{N_\varepsilon < \infty\} = 1$;

2) $N_\varepsilon \to \infty$ с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$;

3) $\lim_{\varepsilon\to 0} E(N_\varepsilon) = \infty$;

4) $\dfrac{N(\varepsilon)}{n_0(\varepsilon, F)} \to 1$ с вероятностью 1 при $\varepsilon \to 0$;

5) $\lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{E(N(\varepsilon))}{n_0(\varepsilon, F)} = 1$.

Заключение

При последовательном точечном оценивании, когда функция потерь имеет достаточно общий вид, вместо оценок минимального риска необходимо рассмотреть оценки с асимптотически минимальным риском, построенные по выборкам случайного объема. Предельные теоремы для случайно остановленных случайных процессов эффективны для исследования асимптотических задач последовательного оценивания.

В последовательном оценивании доверительными интервалами фиксированной ширины при одинаковом доверительном уровне ширина доверительного интервала будет намного короче, чем при обычном непоследовательном оценивании, что имеет существенную роль в прикладных применениях.

ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. **Dantzig G. B.** On the nonexistence of tests of “student’s” hypethesis having power functions independent of σ^2 / Ann. Math. Statist. 1940. N 11. P. 186 – 192.
2. **Lehmann E. L.** Notes on the theory of estimation. — Berkeley: Univ. of Calif. Press, 1951.
3. **Chow Y. S., Robbins H.** On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the mean / Ann. Math. Statist. 1965. N 36. P. 457 – 462.
4. **Anscombe F. J.** Large sample theory of sequential estimation / Proc. Cambridge Philos. Soc. 1952. N 48. P. 600 – 607.
5. **Ghosh M., Mukhopadhyay N., Sen P. K.** Sequential estimation. — New York: Wiley, 1996.
6. **Silvestrov D. S.** Limit Theorems for Randomly Stopped Stochastic Processes. — London: Springer-Verlag, 2004.
7. **Shiohama T., Tanagushi M.** Sequential estimation for a functional of the spectral density of a Gaussian stationary process / Ann. Inst. Statist. Math. 2001. Vol. 53. N 1. P. 142 – 158.
8. **Mukhopadhyay N., De Silva B. M.** Sequential methods and their applications. — London: Chapman and Hall, 2009.
9. **Rakhimova G. G.** Application of limit theorems for superposition of random functions to sequential estimation: In the book: Silvestrov S., Rancic M., Malyarenko A. (eds.) Stochastic Processes and Applications / Proceedings in Mathematics & Statistics. Springer, 2018. Chapter 7. P. 148 – 154.
10. **Abdushukurov A. A., Rakhimova G. G.** Asymptotic properties of sequential interval estimation of functionals of a distribution function / Statistical Methods of Estimating and Hypotheses Testing. Collection of Scientific Papers. 2018. Vol. 28. P. 4 – 14 [in Russian].
11. **Rakhimova G. G.** Asymptotic problems of sequential point estimation of functionals of an unknown distribution function / Proceedings of the Republican Scientific and Practical Conference “Statistics and its Applications”, Tashkent, 2019. P. 232 – 238 [in Russian].
12. **Takahata H.** Limiting behavior of density estimates for stationary asymptotically uncorrelated processes / Bull. Tokyo Gak. Univ. Ser. VI. 1977. Vol. 29. P. 1 – 9.
13. **Takahata H.** On recursive density estimators for a class of stationary processes / Bull. Tokyo Gak. Univ. Ser. VI. 1977. Vol. 29. P. 10 – 18.
14. **Tursunov G. T.** Interval estimation of the probability density of an asymptotically uncorrelated process / Theor. Probability Math. Statist. 1984. N 29. P. 141 – 147.
15. **Chanda K. C.** Density estimation for linear processes / Ann. Inst. Statist. Math. 1983. Vol. 35. Part A. P. 439 – 446.
16. **Mirzakhmedov M. A., Tursunov G. T.** The sequential interval estimating of linear random processes / Sixth Int. Vilnius conference on probability theory and math. statist. Abstracts of comm. — Vilnius, 1993. P. 35 – 36.