

УДК 620.162.3:532.135

# РЕОЛОГИЯ КРУГЛОГО СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОГО КОМПОЗИЦИОННОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КРУЧЕНИИ И КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

© А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, И. А. Тарасюк<sup>1</sup>*Статья поступила 10 декабря 2014 г.*

Исследовано реологическое поведение материалов при кручении и крутильных колебаниях. Рассмотрены следующие варианты реологических уравнений: ползучести по наследственной теории, по технической теории старения, а также обобщенная нелинейная вязкоупругая модель Фойгта. Получены уравнения кручения и крутильных колебаний для стержней из однородных материалов в случае линейных и нелинейных уравнений состояния. В случае кручения композиционного (продольно-волоконистого, радиально- и поперечно-слоистого и структурно-неоднородного) материала стержня рассмотрены все перечисленные реологические модели деформирования в нелинейной и линейной постановках. Кроме того, установлено, что вычисление эффективных характеристик стержня согласно гипотезе Фойгта соответствует решению задачи усреднения для волоконистого (либо коаксиально слоистого) вдоль оси стержня материала. Использование гипотезы Рейсса соответствует кручению поперечно-слоистого цилиндрического стержня, а применение подхода Хилла — приближению эффективных свойств структурно-неоднородного композиционного материала стержня наиболее простым способом.

**Ключевые слова:** уравнения крутильных колебаний круглого стержня; собственные частоты; гипотеза Фойгта; гипотеза Рейсса; реологические параметры; ядро ползучести; однородное старение материала; вязкость.

Необходимость получения уравнения крутильных колебаний на случай реологически активного поведения, в том числе структурно-неоднородного композиционного материала стержня, требует обратиться к классическому уравнению кручения стержня с целью его обобщения и разработки методики решения указанного класса задач [1].

В данной работе рассмотрены наиболее часто встречающиеся в литературе варианты уравнения состояния при кручении с учетом реологических параметров материала и получены решения, позволяющие инженерам применять их непосредственно на практике, а также решать более общие задачи теории колебаний.

*Статическое уравнение кручения однородного стержня.* При выводе уравнения крутильных колебаний вала (круглого цилиндрического стержня) используем основные положения, лежащие в основе теории кручения круглых стержней из теории сопротивления материалов [2].

Предположим, что поперечные круговые сечения стержня при кручении остаются плоскими, сохраняют между собой первоначальное расстояние и радиусы этих сечений не искривляются. Таким образом, кручение круглого вала можно представить как результат сдвигов, вызванных поворотом поперечных сечений друг относительно друга, причем все повороты совершаются вокруг оси вала. Вследствие этого в попереч-

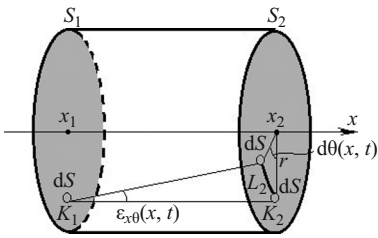
ных сечениях возникают только касательные напряжения, действующие в плоскости сечения, а нормальные напряжения равны нулю. Поскольку касательные напряжения симметричны относительно центра поперечного сечения, то они приводятся к паре сил, момент которой называется крутящим моментом.

Поскольку рассматриваются только относительные повороты сечений, то любое из них можно принять за неподвижное. Будем считать, что неподвижен левый конец вала и длина вала равна  $l$ . Поместим начало координат в центр неподвижного левого сечения и направим ось  $Ox$  по оси стержня. В результате закручивания вала поперечное сечение  $S_1$ , расположенное на расстоянии  $x_1$  ( $x_1 < l$ ) от заделки, повернется на угол  $\theta$ , а сечение  $S_2$ , находящееся на расстоянии  $x_2$  ( $x_2 < l$ ), — на угол  $\theta + d\theta$ . Таким образом, поворот сечения  $S_2$  относительно  $S_1$  составляет  $d\theta$  (рис. 1).

Решение задачи кручения обобщим на случай более общих уравнений состояния, учитывающих реологию материала. Рассмотрим произвольный элемент  $dS$  сечения  $S_1$ , расположенный на расстоянии  $r$  от центра сечения  $O_1$ . Определим величину напряжения  $\tau$ , вызванного сдвигом элементарного волокна  $K_1K_2$  в положение  $K_1L_2$  (см. рис. 1). Поскольку угловой мерой угла сдвига волокна  $\varepsilon_{x\theta}(t)$  будет являться приращение  $d\theta(x, t)$  угла  $\theta(x, t)$ , то в силу малости сдвига  $\text{tg}[\varepsilon_{x\theta}(t)] \approx \varepsilon_{x\theta}(t)$  и малости расстояния  $(x_2 - x_1)$  можно записать

$$\varepsilon_{x\theta}(t) = r \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}. \quad (1)$$

<sup>1</sup> Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь; e-mail: ask\_Belarus@inbox.ru



**Рис. 1.** Схема перемещения волокна площадью поперечного сечения  $dS$  на угол  $d\theta(x, t)$  при кручении сечения  $S_2$  относительно сечения  $S_1$

В частности, рассмотрим линейное наследственное уравнение ползучести однородно-стареющего тела [1, 3]:

$$\varepsilon_{x\theta}(t) = \frac{1}{G(t)} \left[ \sigma_{x\theta}(t) + \int_0^t \sigma_{x\theta}(\tau) \Gamma(t, \tau) d\tau \right], \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{x\theta}(t)$  — деформация сдвига стержня при кручении;  $G(t)$  — мгновенный модуль сдвига однородно-стареющего материала [3];  $\Gamma(t, \tau)$  — ядро ползучести материала.

Умножив выражение (2) на  $dS$  с учетом того, что  $\sigma_{x\theta}(t) = \sigma_{x\theta}$  — константа, получим

$$\varepsilon_{x\theta}(t) dS = \frac{\sigma_{x\theta} dS}{G(t)} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right], \quad (3)$$

где  $\sigma_{x\theta} dS$  — усилие, приходящееся на площадку  $dS$ . Тогда момент  $dM = r \sigma_{x\theta} dS$ , направленный перпендикулярно радиусу  $r$ , будет удовлетворять уравнению

$$r \varepsilon_{x\theta}(t) dS = \frac{dM}{G(t)} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right]. \quad (4)$$

Очевидно, что величину главного момента  $M$ , приложенного к валу, можно найти интегрированием (4) по площади поперечного сечения  $S_2$ . Из соотношений (1) и (4) получим

$$M = \frac{G(t)}{1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau} J_0 \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}, \quad (5)$$

где  $J_0 = \iint_{S_2} r^2 dS = \iint_{S_2} r^2 dx dy = \iint_{\Omega} r^2 r dr d\theta = \pi R^4 / 2$  — полярный момент инерции круглого сечения [1, 4].

Если материал стержня обладает свойствами нелинейной ползучести [1, 5], то необходимо использовать уравнение

$$\mathfrak{Z}[\varepsilon_{x\theta}(t)] = \sigma_{x\theta}(t) + \int_0^t \sigma_{x\theta}(\tau) \Gamma(t, \tau) d\tau, \quad (6)$$

где  $\mathfrak{Z}()$  — нелинейная монотонно возрастающая функция.

Тогда, повторяя вывод соотношений (1)–(4) с учетом (6), решение квазистатической задачи кру-

чения реологически активного материала стержня получим в виде

$$M = \frac{1}{1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau} \iint_{S_2} r \mathfrak{Z} \left[ r \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right] dS. \quad (7)$$

*Применение технической теории старения при описании ползучести стержня при кручении.* Рассмотрим обобщенное уравнение релаксации Н. Н. Малинина [6] при описании ползучести по теории старения:

$$\sigma_{x\theta}(t) = \mathfrak{Z}[\varepsilon_{x\theta}(t)] \Psi(t), \quad (8)$$

где  $\Psi(t)$  — некоторая убывающая функция. Очевидно, что после проведения преобразований (1)–(4) получим результат, аналогичный (7), но с заменой

$$\Psi(t) = \left( 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right)^{-1}. \quad \text{Отметим также, что в отли-}$$

чие от решения Н. Н. Малинина [6], полученного только для степенной функции, уравнение (8) позволяет рассмотреть также кусочно-линейную диаграмму Прандтля для определения  $\mathfrak{Z}()$ .

*Вязкоупругая модель Фойгта.* Нелинейное уравнение Фойгта [7] описывает процесс деформации двух параллельно закрепленных нелинейных элементов — упругого и вязкого:

$$\sigma_{x\theta}(t) = \mathfrak{Z}[\varepsilon_{x\theta}(t)] = \Xi[\dot{\varepsilon}_{x\theta}(t)], \quad (9)$$

где  $\mathfrak{Z}()$  — как и ранее, монотонно возрастающая функция, описывающая деформацию нелинейно упругого элемента (в линейном случае  $\mathfrak{Z}' = d\mathfrak{Z}/d\varepsilon_{x\theta} = G$  — модуль сдвига);  $\Xi()$  монотонно возрастающая функция вязкости вязкого элемента (в линейном случае  $\Xi' = d\Xi/d(\dot{\varepsilon}_{x\theta}) = \eta$  — вязкость материала);  $\dot{\varepsilon}_{x\theta}(t) = \partial \varepsilon_{x\theta}(t) / \partial t$ .

Аналогично схеме вывода из (1)–(4) уравнения (5) получим

$$M = \iint_{S_2} r \left[ \mathfrak{Z} \left( r \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) + \Xi \left( r \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t \partial x} \right) \right] dS. \quad (10)$$

В линейном случае выражение (10) имеет вид

$$M = J_0 \left[ G(t) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} + \eta(t) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t \partial x} \right]. \quad (11)$$

*Крутильные колебания однородного стержня с учетом реологии.* Перейдем к выводу дифференциального уравнения крутильных колебаний однородного вала (стержня постоянного круглого сечения), продолжая рассматривать его часть, заключенную между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ .

Отметим, что уравнения (5), (7), (10) и (11) уже получены для  $\theta(x, t)$ , однако в соответствии с гипотезами, применяемыми при исследовании ползучести, они являются квазистатическими, поскольку в част-

ности, не зависят от массово-инерционных характеристик стержня.

Используем второй закон Ньютона для вращательного движения, согласно которому произведение момента инерции тела относительно оси на угловое ускорение равно моменту внешних сил относительно оси вращения [2].

Пусть момент  $M(x_2)$  действует в сечении  $S_2$ , а момент  $M(x_1)$  — в сечении  $S_1$ . Исходя из уравнения (5), можно записать, что приращение момента

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{G(t)}{\left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau\right]} J_0 \left[ \frac{\partial \theta(x_2, t)}{\partial x} - \frac{\partial \theta(x_1, t)}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{G(t)}{\left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau\right]} J_0 \iint_{S_2} \left[ \frac{\partial \theta(x_2, t)}{\partial x} - \frac{\partial \theta(x_1, t)}{\partial x} \right] dS = \\ &= \frac{G(t)}{\left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau\right]} J_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда инерционная составляющая момента рассматриваемого отрезка волокна стержня, находящегося на расстоянии  $r$  от оси и имеющего площадь поперечного сечения  $dS$ , определится формулой [2]

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho r \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} dx r dS, \quad (13)$$

где  $\rho$  — плотность однородного стержня.

Интегрируя (13) по  $S_2$ , переставляя порядки интегрирования и приравнявая результат к (12), получим уравнение баланса моментов:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \iint_{S_2} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} r^2 dS \right] dx = \\ = \frac{G(t)}{\left[1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau\right]} J_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \rho \int_{S_2} r^2 dS \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} - \right. \\ \left. - G(t) \left/ \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right] J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right\} dx = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Если считать, что в (15) участок стержня  $(x_1, x_2)$  настолько мал по сравнению с длиной волны, что вы-

полняется формула Лагранжа [4]

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \rho J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} - G(t) \left/ \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right] J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right\} dx \approx \right. \\ \approx \left\{ \rho J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} - G(t) \left/ \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right] J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \right\} \right|_{x=x_0} \times \\ \times (x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $x_0 \in (x_1, x_2)$  — некоторая точка, то из формулы (16) будет следовать уравнение крутильных колебаний линейно-вязкоупругого однородно стареющего стержня:

$$\rho J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \frac{G(t)}{1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau} J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}. \quad (17)$$

Таким образом, сложный коэффициент в выражении (17) примет вид [2]

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = a(t)^2 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}, \quad (18)$$

$$\text{где } a(t) = \sqrt{G(t) / \left\{ \rho \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right] \right\}}.$$

Как пример влияния ползучести материала на собственные частоты стержня при крутильных колебаниях рассмотрим линейное уравнение (18). В качестве начального условия (запуска колебаний в соответствии с (5)) примем уравнение  $\theta(x, t)|_{t=0} = \frac{M}{G(0)J_0} x$ .

Краевыми условиями являются: полное закрепление на левом конце вала, т.е.  $\theta(x, t)|_{x=0} = 0$ , и отсутствие крутящего момента при свободных колебаниях на правом конце вала. Тогда из выражения (5) получим  $\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$ ,  $l$  — длина стержня. Опуская известные рассуждения о построении решения уравнения (18), с помощью метода Фурье [2] перейдем к уравнениям, определяющим собственные частоты  $\omega_i(t)$  стержня при кручении с учетом реологии (рис. 2):

$$\omega_i(t) = \frac{i\pi}{l} \sqrt{G(t) / \left\{ \rho \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right] \right\}} \quad (i = \overline{1, \infty}). \quad (19)$$

Теперь рассмотрим нелинейные вязкоупругие крутильные колебания однородного стержня с учетом наследственной ползучести в форме (6). Тогда, используя уравнение (7) для момента, аналогично (12) получим

$$\Delta M = \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right]^{-1} \times$$

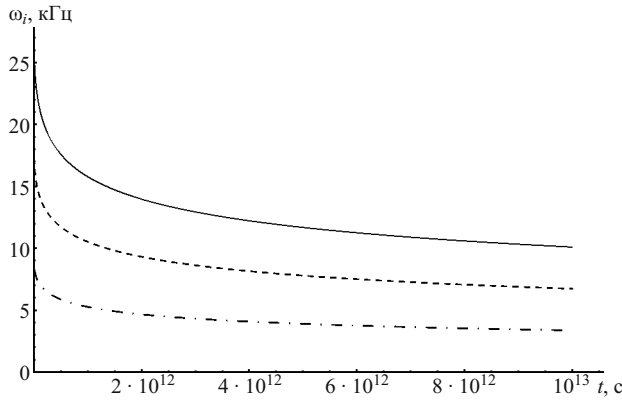


Рис. 2. Зависимости (19) низших собственных частот  $\omega_1$  (штрихпунктирная линия),  $\omega_2$  (пунктирная линия) и  $\omega_3$  (непрерывная линия) стержня длиной  $l = 1$  м от времени  $t$  ( $G = 0,7 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 8330$  кг/м<sup>3</sup>, ядро релаксации в виде ядра Дуффинга  $\Gamma(t, \tau) = 10^{-6}(t - \tau)^{-1/2}$  [5])

$$\times \int_{x_1}^{x_2} \left[ \iint_{S_2} r^2 \mathfrak{Z}' \left( r \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS \right] \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} dx. \quad (20)$$

Используя выражение (20), опуская промежуточные преобразования (13) – (16), получим уравнение, аналогичное (17):

$$\rho J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right]^{-1} \times \left[ \iint_{S_2} r^2 \mathfrak{Z}' \left( r \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS \right] \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2}. \quad (21)$$

В случае использования уравнения релаксации однородного стержня по теории старения (8) результаты совпадут с данными, полученными по уравнению (21)

$$\text{с точностью до замены } \Psi(t) = \left[ 1 + \int_0^t \Gamma(t, \tau) d\tau \right]^{-1}.$$

Перейдем к рассмотрению последнего варианта нелинейного вязкоупругого поведения — уравнениям Фойгта (9), приводящим к выражениям (10) и (11) для крутящего момента. Используя (10) получим

$$\rho J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \iint_{S_2} r^2 \mathfrak{Z}' \left( r \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) dS \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + \iint_{S_2} r^2 \Xi' \left( \frac{r \partial^2 \theta(x, t)}{\partial t \partial x} \right) dS \frac{\partial^3 \theta(x, t)}{\partial t \partial x^2}, \quad (22)$$

где  $\Xi'(v) = d\Xi(v)/dv$ ,  $v$  — скорость деформации материала.

В линейном случае (11) уравнение крутильных колебаний (22) примет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \eta \frac{\partial^3 \theta(x, t)}{\partial t \partial x^2}. \quad (23)$$

Квазистатическое кручение композиционных продольно-волоконистых, поперечно-слоистых и структурно-неоднородных композиционных тел с учетом ползучести по наследственной теории. Рассмотрим композиционный материал, состоящий из  $n$  компонент, деформация каждой из которых описывается различными в общем случае нелинейными уравнениями вязкоупругости [1, 5]

$$\mathfrak{Z}_k [\varepsilon_{x\theta, k}(t)] = \sigma_{x\theta, k}(t) + \int_0^t \sigma_{x\theta, k}(\tau) \Gamma_k(t, \tau) d\tau, \quad (24)$$

где  $\mathfrak{Z}_k()$  ( $\forall k, k = \overline{1, n}$ ) — нелинейная функция, характерная для каждого материала в отдельности;  $\Gamma_k(t, \tau)$  — ядро ползучести  $k$ -го материала круглого стержня. Компоненты композиционного материала имеют объемные доли  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

Исследуем некоторый элемент круглого стержня между точками  $x_1$  и  $x_2$ , такими, что  $l' \leq x_2 - x_1$ , где  $l'$  — длина цилиндра, называемого макроточкой композиционного материала. В соответствии с общей методикой, примененной для решения задачи определения эффективных параметров стержня, на границе рассматриваемого элемента композиционного материала (макроточки) задаются воздействия, имитирующие те, которые возникают в стержне. В данном случае рассмотрим кручение круглого стержня на участке между точками  $x_1$  и  $x_2$ . При ползучести принцип реализации метода гомогенизации для многокомпонентного цилиндрического стержня круглого сечения также заключается в получении верхней и нижней оценок эффективных реологических свойств многокомпонентного материала стержня с помощью предельных гипотез (Фойгта и Рейсса) [8].

Применим гипотезу Фойгта о том, что распределение деформаций в рассматриваемом фрагменте стержня однородно, т.е. средние деформации сдвига  $\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_\Phi = \varepsilon_{x\theta, k}(t) = \frac{r \partial \theta(x, t)}{\partial x}$  для всех компонентов

композиционного стержня одинаковы. Тогда из уравнения состояния (24) с учетом того, что  $\sigma_{x\theta, k}(t) = \sigma_{x\theta}$  не зависит от времени, следует

$$\mathfrak{Z}_k [\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_\Phi] = \sigma_{x\theta, k} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma_k(t, \tau) d\tau \right]. \quad (25)$$

Предполагая, что  $\sigma_{x\theta, k} = \gamma_k \langle \sigma_{x\theta} \rangle_\Phi$ , умножая (25) на  $\gamma_k$  и суммируя полученное выражение по  $k$ , окончательно получим

$$\langle \mathfrak{Z} \rangle_\Phi [\langle \sigma_{x\theta}(t) \rangle_\Phi] = \langle \sigma_{x\theta} \rangle_\Phi \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi d\tau \right], \quad (26)$$

где  $\langle \mathfrak{Z} \rangle_\Phi(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{Z}_k(\varepsilon)$ ;  $\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \Gamma_k(t, \tau)$ .

Из выражения (26) среднестатистический момент  $d\langle M \rangle_\Phi$ , возникающий при деформации в стержне

волокна, отстоящего от оси стержня на расстояние  $r$ , составит

$$r\langle\mathfrak{T}\rangle_{\Phi}[\langle\varepsilon_{x\theta}(t)\rangle_{\Phi}]dS = d\langle M\rangle_{\Phi}\left[1 + \int_0^t \langle\Gamma(t,\tau)\rangle_{\Phi}d\tau\right]. \quad (27)$$

Тогда величину главного момента  $\langle M\rangle_{\Phi}$ , приложенного к валу, можно определить интегрированием (27) по площади поперечного сечения  $S_2$ :

$$\iint_{S_2} r\langle\mathfrak{T}\rangle_{\Phi}[\langle\varepsilon_{x\theta}(t)\rangle_{\Phi}]dS = \langle M\rangle_{\Phi}\left[1 + \int_0^t \langle\Gamma(t,\tau)\rangle_{\Phi}d\tau\right]. \quad (28)$$

В частности, при использовании композиции линейно вязкоупругих однородно-стареющих материалов (см. уравнение (2)) получаем

$$\langle M\rangle_{\Phi} = \langle G(t)\rangle_{\Phi} \left[1 + \int_0^t \langle\Gamma(t,\tau)\rangle_{\Phi}d\tau\right] J_0 \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}, \quad (29)$$

где  $\langle G(t)\rangle_{\Phi} = \sum_{k=1}^n \gamma_k G_k(t)$ ,  $G_k(t)$  — мгновенный модуль сдвига  $k$ -й компоненты композиционного однородно-стареющего материала ( $k = 1, n$ ).

Отметим, что гипотеза Фойгта физически соответствует случаю, когда рассматривается волокнистый материал, волокна которого соосны оси цилиндрического стержня и не взаимодействуют друг с другом, а также физической модели кручения радиально-слоистого цилиндрического стержня с постоянной толщиной слоев. Методика усреднения нелинейностей в виде диаграмм Прандтля и степенных функций описана в работе [1].

Перейдем ко второй предельной гипотезе — гипотезе Рейсса [8]. В соответствии с ней предположим, что в рассматриваемом композиционном теле однородное распределение касательных напряжений  $\sigma_{x\theta,k}(t) = \langle\sigma_{x\theta}\rangle_P$  не зависит от времени, т.е. для каждой компоненты  $k$  уравнение состояния (24) будет иметь вид

$$\mathfrak{T}_k[\varepsilon_{x\theta,k}(t)] = \langle\sigma_{x\theta}\rangle_P \left[1 + \int_0^t \Gamma_k(t,\tau)d\tau\right], \quad (30)$$

где  $\varepsilon_{x\theta,k}(t)$  — деформация сдвига в соответствующей компоненте материала.

Выражение (30) умножаем на  $\gamma_k$  и полученное уравнение суммируем по  $k$  ( $k = 1, n$ ). В результате указанных преобразований получаем статистически усредненное уравнение состояния для гипотезы Рейсса:

$$\langle\varepsilon_{x\theta}(t)\rangle_P = \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{T}_k^{-1} \left[ \langle\sigma_{x\theta}\rangle_P + \int_0^t \langle\sigma_{x\theta}\rangle_P \Gamma_k(t,\tau)d\tau \right], \quad (31)$$

где  $\langle\varepsilon_{x\theta}(t)\rangle_P = \sum_{k=1}^n \gamma_k \varepsilon_{x\theta,k}(t) = r \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}$ . Поскольку

$\iint_{S_2} \langle\sigma_{x\theta}\rangle_P r dS = \langle M\rangle_P$ , из условий задачи можно пред-

положить [4], что  $\langle\sigma_{x\theta}\rangle_P \approx 3\langle M\rangle_P/(2\pi R^3)$ , где  $R$  — радиус круглого сечения стержня. Подставляя приближенное значение последнего выражения в (31) и используя обозначение  $\langle\mathfrak{T}\rangle_P(\varepsilon) = \left[\sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{T}_k^{-1}(\varepsilon)\right]^{-1}$ , получаем

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \langle\mathfrak{T}\rangle_P \left[ \frac{r\partial\theta(x,t)}{\partial x} \right] r dS = \\ = \iint_{S_2} r dS \langle\mathfrak{T}\rangle_P \left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{T}_k^{-1} \left[ \frac{3\langle M\rangle_P}{2\pi R^3} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma_k(t,\tau)d\tau \right] \right] \right\}. \quad (32) \end{aligned}$$

После окончательных преобразований в (32) [4] переходим к уравнению

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \langle\mathfrak{T}\rangle_P \left[ \frac{r\partial\theta(x,t)}{\partial x} \right] r dS = \\ = \frac{2\pi R^3}{3} \langle\mathfrak{T}\rangle_P \left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{T}_k^{-1} \left[ \frac{3\langle M\rangle_P}{2\pi R^3} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma_k(t,\tau)d\tau \right] \right] \right\}. \quad (33) \end{aligned}$$

Отметим, что физический смысл уравнения (33) и выполнения гипотезы об однородности напряжений  $\langle\sigma_{x\theta}\rangle_P$  для всех компонент композиционного материала состоит в кручении поперечно-слоистого цилиндрического пакета. Методика усреднения нелинейностей в виде диаграмм Прандтля и степенных функций изложена в работе [1].

При использовании слоистой композиции линейно-вязкоупругих однородно стареющих материалов, т.е. когда  $\langle\mathfrak{T}\rangle_P \left[ \frac{r\partial\theta(x,t)}{\partial x} \right] = \langle G(t)\rangle_P \frac{r\partial\theta(x,t)}{\partial x}$ , из (33) получаем

$$\langle M\rangle_P = \frac{\langle G(t)\rangle_P}{1 + \int_0^t \langle\Gamma(t,\tau)\rangle_P d\tau} J_0 \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}, \quad (34)$$

где  $\langle G(t)\rangle_P = \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{G_k(t)} \right]^{-1}$ ;

$$\langle\Gamma(t,\tau)\rangle_P = \langle G(t)\rangle_P \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{G_k(t)} \Gamma_k(t,\tau).$$

Вычислим эффективные коэффициенты кручения композиционного структурно-неоднородного нелинейно-деформируемого материала цилиндрического стержня для решения задачи приближения Хилла как наиболее теоретически легкого варианта определения усредненных деформационных свойств материала стержня [8]. Для этого предположим, что момент, действующий на правое сечение  $S_2$  участка стержня, определяемого интервалом  $(x_1, x_2)$ , можно определить как  $\langle M\rangle = (\alpha\langle M\rangle_{\Phi} + (1-\alpha)\langle M\rangle_P)$  ( $\alpha \in [0, 1]$  — вещественное число). При этом также предположим, что

выражение  $r \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}$  однородно для всех компонент стержня, т.е.  $r \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = r \frac{\partial \langle \theta(x, t) \rangle}{\partial x}$ .

Тогда из (28) и (33) получим

$$\iint_{S_2} \Lambda_\alpha \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x, t) \rangle}{\partial x} \right] r dS = \alpha \langle M \rangle_\Phi \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi d\tau \right] + (1 - \alpha) \frac{2\pi R^3}{3} \langle \mathfrak{I} \rangle_P \times \left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{I}_k^{-1} \left( \frac{3 \langle M \rangle_P}{2\pi R^3} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma_k(t, \tau) d\tau \right] \right) \right\}, \quad (35)$$

где  $\Lambda_\alpha \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x, t) \rangle}{\partial x} \right] =$

$$= \alpha \langle \mathfrak{I} \rangle_\Phi \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x, t) \rangle}{\partial x} \right] + (1 - \alpha) \langle \mathfrak{I} \rangle_P \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x, t) \rangle}{\partial x} \right].$$

Интегрируя (35) и выражение  $\langle M \rangle = [\alpha \langle M \rangle_\Phi + (1 - \alpha) \langle M \rangle_P]$  по  $\alpha$  и предполагая, что  $\langle M \rangle_\Phi \approx \langle M \rangle_P \approx \langle M \rangle$ , получаем приближение Хилла нелинейных вязкоупругих свойств композиционного материала в виде

$$\iint_{S_2} \Lambda \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x, t) \rangle}{\partial x} \right] r dS \approx \frac{\langle M \rangle}{2} \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi d\tau \right] + \frac{\pi R^3}{3} \langle \mathfrak{I} \rangle_P \left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{I}_k^{-1} \left( \frac{3 \langle M \rangle}{2\pi R^3} \left[ 1 + \int_0^t \Gamma_k(t, \tau) d\tau \right] \right) \right\}. \quad (36)$$

В случае вязкоупругого однородно-старееющего материала нет необходимости использовать приближенное равенство  $\langle M \rangle_\Phi \approx \langle M \rangle_P \approx \langle M \rangle$ , а можно непосредственно применить равенства (29) и (34):

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= \alpha \langle M \rangle_\Phi + (1 - \alpha) \langle M \rangle_P = \\ &= \left\{ \alpha \langle G(t) \rangle_\Phi \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi d\tau \right] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \alpha) \langle G(t) \rangle_P \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P d\tau \right] \right\} J_0 \frac{\partial \langle \theta(x, t) \rangle}{\partial x}. \end{aligned} \quad (37)$$

После интегрирования (37) по  $\alpha$ , окончательно получим решение задачи кручения композиционного стержня в приближении Хилла:

$$\langle M \rangle = \langle G(t) \rangle_X \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right] J_0 \frac{\partial \langle \theta(x, t) \rangle}{\partial x}, \quad (38)$$

где  $\langle G(t) \rangle_X = (\langle G(t) \rangle_\Phi + \langle G(t) \rangle_P)/2$ ,

$$\langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X =$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2 \langle G(t) \rangle_X \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi d\tau \right] \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P d\tau \right]}{\langle G(t) \rangle_\Phi \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P d\tau \right] + \langle G(t) \rangle_P \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi d\tau \right]} \right\}.$$

*Кручение композиционных стержней по теории старения.* Рассмотрим композиционный материал, состоящий из  $n$  компонент, деформация каждой из которых описывается различными в общем случае нелинейными уравнениями релаксации Н. Н. Малинина [6]:

$$\sigma_{x\theta, k}(t) = \mathfrak{I}_k(\varepsilon_{x\theta, k}(t)) \Psi_k(t), \quad (39)$$

где  $\Psi_k(t)$  — некоторая убывающая функция  $\forall k$  ( $k = 1, n$ ).

Применим гипотезу Фойгта о том, что распределение деформаций в рассматриваемом фрагменте стержня однородно, т.е. средние деформации сдвига  $\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_\Phi = \varepsilon_{x\theta, k}(t) = \frac{r \partial \theta(x, t)}{\partial x}$  для всех компонентов композиционного стержня одинаковы. Тогда из уравнения состояния (39) с учетом того, что  $\sigma_{x\theta, k}(t) = \sigma_{x\theta, k}$  не зависит от времени, следует

$$\sigma_{x\theta, k} = \mathfrak{I}_k(\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_\Phi) \Psi_k(t). \quad (40)$$

Аналогично переходу от (25) к (26) будем предполагать, что  $\sigma_{x\theta, k} = \gamma_k \langle \sigma_{x\theta} \rangle_\Phi = \gamma_k \sum_{k=1}^n \gamma_k \sigma_{x\theta, k}$ . Умножая (40) на  $\gamma_k$  и суммируя полученное выражение по  $k$  ( $k = 1, n$ ), запишем

$$\langle \sigma_{x\theta} \rangle_\Phi = \langle \mathfrak{I} \rangle_\Phi [\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_\Phi] \langle \Psi(t) \rangle_\Phi, \quad (41)$$

где  $\langle \mathfrak{I} \rangle_\Phi(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{I}_k(\varepsilon)$ ,  $\langle \Psi(t) \rangle_\Phi = \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k^2}{\Psi_k(t)} \right]^{-1}$ .

Из (41), следуя выводу уравнения кручения однородного цилиндра (1) – (4) с использованием гипотезы о малости участка  $l'$ , получим

$$\langle M \rangle_\Phi = \langle \Psi(t) \rangle_\Phi \iint_{S_2} r \langle \mathfrak{I} \rangle_\Phi \left[ \frac{r \partial \theta(x, t)}{\partial x} \right] dS. \quad (42)$$

В линейном случае, когда  $\langle \mathfrak{I} \rangle_\Phi(\varepsilon) = \langle G \rangle_\Phi \varepsilon$ , выражение (42) преобразуется к виду

$$\langle M \rangle_\Phi = \langle G \rangle_\Phi \langle \Psi(t) \rangle_\Phi J_0 \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}, \quad (43)$$

где  $\langle G \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^n \gamma_k G_k$ .

Аналогично применяя к уравнению (39) гипотезу Рейсса ( $\sigma_{x\theta,k} = \langle \sigma_{x\theta} \rangle_P$ ), умножая (39) на  $\gamma_k$  и суммируя по  $k$  ( $k = 1, n$ ), получаем

$$\langle \mathfrak{I} \rangle_P \left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{I}_k^{-1} \left[ \frac{\langle \sigma_{x\theta} \rangle_P}{\Psi_k(t)} \right] \right\} = \langle \mathfrak{I} \rangle_P [\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_P]. \quad (44)$$

Используя выражение  $\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_P = \frac{r \partial \langle \theta(x,t) \rangle_P}{\partial x}$

и предположение  $\langle \sigma_{x\theta} \rangle_P \approx \frac{3 \langle M \rangle_P}{2\pi R^3}$  (так как

$$\iint_{S_2} \langle \sigma_{x\theta} \rangle_P r dS = \langle M \rangle_P \left. \right\}, \text{ умножая (44) на } r \text{ и интегрируя по площади } S_2, \text{ получаем нелинейное уравнение}$$

кручения поперечно-слоистого круглого стержня

$$\begin{aligned} \frac{2\pi R^3}{3} \langle \mathfrak{I} \rangle_P \left[ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{I}_k^{-1} \left( \frac{3 \langle M \rangle_P}{2\pi R^3 \Psi_k(t)} \right) \right] \approx \\ \approx \iint_{S_2} \langle \mathfrak{I} \rangle_P \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x,t) \rangle_P}{\partial x} \right] r dr. \end{aligned} \quad (45)$$

В линейном случае, когда  $\langle \mathfrak{I} \rangle_P(\varepsilon) = \langle G \rangle_P \varepsilon$  и  $\mathfrak{I}_k(\varepsilon) = G_k \varepsilon$ , уравнение (45) преобразуется к виду

$$\langle M \rangle_P = \langle G \rangle_P \langle \Psi(t) \rangle_P J_0 \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}, \quad (46)$$

где

$$\langle G \rangle_P = \left( \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{G_k} \right)^{-1}, \quad \langle \Psi(t) \rangle_P = \left[ \langle G \rangle_P \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{G_k \Psi_k(t)} \right]^{-1}.$$

Вычислим эффективные коэффициенты кручения композиционного структурно-неоднородного нелинейно-деформируемого материала цилиндрического стержня для решения задачи приближения Хилла, как это было описано выше.

Тогда из (42) и (45) получаем

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \Lambda_\alpha \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x,t) \rangle}{\partial x} \right] r dS = \alpha \frac{\langle M \rangle_\Phi}{\langle \Psi(t) \rangle_\Phi} + \\ + (1-\alpha) \frac{2\pi R^3}{3} \langle \mathfrak{I} \rangle_P \left[ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{I}_k^{-1} \left( \frac{3 \langle M \rangle_P}{2\pi R^3 \Psi_k(t)} \right) \right], \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x,t) \rangle}{\partial x} \right] = \alpha \langle \mathfrak{I} \rangle_\Phi \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x,t) \rangle}{\partial x} \right] + \\ + (1-\alpha) \langle \mathfrak{I} \rangle_P \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x,t) \rangle}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Интегрируя (47) и выражение  $\langle M \rangle = [\alpha \langle M \rangle_\Phi + (1-\alpha) \langle M \rangle_P]$  по  $\alpha$  и предполагая, что  $\langle M \rangle_\Phi \approx \langle M \rangle_P \approx \langle M \rangle$ ,

получим приближение Хилла нелинейной ползучести композиционного материала по технической теории старения в виде

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \Lambda \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x,t) \rangle}{\partial x} \right] r dS = \frac{\langle M \rangle}{2 \langle \Psi(t) \rangle_\Phi} + \\ + \frac{\pi R^3}{3} \langle \mathfrak{I} \rangle_P \left[ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{I}_k^{-1} \left( \frac{3 \langle M \rangle_P}{2\pi R^3 \Psi_k(t)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

В линейном случае ( $d\mathfrak{I}_k(\varepsilon)/d\varepsilon = G_k$  в (39)) нет необходимости использовать приближенное равенство  $\langle M \rangle_\Phi \approx \langle M \rangle_P \approx \langle M \rangle$ , а следует непосредственно воспользоваться уравнениями (43) и (46):

$$\begin{aligned} \langle M \rangle = \alpha \langle M \rangle_\Phi + (1-\alpha) \langle M \rangle_P = \\ = [\alpha \langle G \rangle_\Phi \langle \Psi(t) \rangle_\Phi + (1-\alpha) \langle G \rangle_P \langle \Psi(t) \rangle_P] J_0 \frac{\partial \langle \theta(x,t) \rangle}{\partial x}. \end{aligned} \quad (49)$$

Интегрируя (49) по  $\alpha$ , окончательно получим уравнение кручения композиционного стержня в приближении Хилла для линейных функций  $\mathfrak{I}_k(\varepsilon)$ :

$$\langle M \rangle = \langle G \rangle_X \langle \Psi(t) \rangle_X J_0 \frac{\partial \langle \theta(x,t) \rangle}{\partial x}, \quad (50)$$

где

$$\langle G \rangle_X = (\langle G \rangle_\Phi + \langle G \rangle_P)/2;$$

$$\langle \Psi(t) \rangle_X = \frac{\langle G \rangle_\Phi \langle \Psi(t) \rangle_\Phi + \langle G \rangle_P \langle \Psi(t) \rangle_P}{2 \langle G \rangle_X}.$$

*Применение реологической модели Фойгта при кручении композиционных стержней.* При использовании гипотезы о равенстве скоростей деформаций всех компонент композиционного материала в пакете из  $n$  различных компонент в нелинейном релаксационном уравнении Фойгта (9) получим

$$\sigma_k = \mathfrak{I}_k(\varepsilon_k) + \Xi_k(\dot{\varepsilon}), \quad (51)$$

где  $\mathfrak{I}_k()$  и  $\Xi_k()$  ( $k = \overline{1, n}$ ) — как и раньше, монотонно возрастающие функции.

Применим гипотезу Фойгта для композиционных материалов о том, что  $\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_\Phi = \varepsilon_{x\theta,k}(t) = r d\theta(x,t)/dx$  ( $k = 1, n$ ), тогда из уравнения состояния (51) с учетом того, что  $\sigma_{x\theta,k}(t) = \varepsilon_{x\theta,k}$  не зависит от времени, следует

$$\sigma_{x\theta,k} = \mathfrak{I}_k(\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_\Phi) + \Xi_k(\langle \dot{\varepsilon}_{x\theta}(t) \rangle_\Phi). \quad (52)$$

Умножая (52) на  $\gamma_k$  и суммируя по  $k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), получаем

$$\langle \sigma_{x\theta} \rangle_\Phi = \langle \mathfrak{I} \rangle_\Phi (\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_\Phi) + \langle \Xi \rangle_\Phi (\langle \dot{\varepsilon}_{x\theta}(t) \rangle_\Phi), \quad (53)$$

где

$$\langle \sigma_{x\theta} \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^n \gamma_k \sigma_{x\theta,k}, \quad \langle \mathfrak{I} \rangle_\Phi(\varepsilon) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{I}_k(\varepsilon),$$

$$\langle \Xi \rangle_\Phi(\dot{\varepsilon}) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \Xi_k(\dot{\varepsilon}).$$

Таким образом, при кручении продольно-волокнутого или радиально-слоистого стержня получим уравнение, аналогичное (10):

$$\langle M \rangle_\Phi = \iint_{S_2} r \left\{ \langle \mathfrak{Z} \rangle_\Phi \left[ \frac{r \partial \theta(x, t)}{\partial x} \right] + \langle \Xi \rangle_\Phi \left[ \frac{r \partial^2 \theta(x, t)}{\partial t \partial x} \right] \right\} dS. \quad (54)$$

В случае линейных функций  $\mathfrak{Z}_k()$  и  $\Xi_k()$  (54) приобретает вид

$$\langle M \rangle_\Phi = J_0 \left[ \langle G \rangle_\Phi \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} + \langle \eta \rangle_\Phi \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t \partial x} \right], \quad (55)$$

$$\text{где } \langle \eta \rangle_\Phi = \sum_{k=1}^n \gamma_k \eta_k.$$

Аналогично, применяя к (51) гипотезу Рейсса ( $\langle \sigma_{x\theta, k} \rangle = \langle \sigma_{x\theta} \rangle_P$ ), путем очевидных преобразований приходим к уравнению

$$\mathfrak{Z}_k^{-1} [\langle \sigma_{x\theta} \rangle_P - \Xi_k (\langle \dot{\varepsilon}_{x\theta}(t) \rangle_P)] = \varepsilon_{x\theta, k}(t). \quad (56)$$

Умножая (54) на  $\gamma_k$  и суммируя по  $k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), получаем

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{Z}_k^{-1} [\langle \sigma_{x\theta} \rangle_P - \Xi_k (\langle \dot{\varepsilon}_{x\theta}(t) \rangle_P)] = \langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_P, \quad (57)$$

$$\text{где } \langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_P = \sum_{k=1}^n \gamma_k \varepsilon_{x\theta, k}(t).$$

Используя  $\langle \mathfrak{Z} \rangle_P(\varepsilon)$ , (57) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{Z} \rangle_P \left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{Z}_k^{-1} [\langle \sigma_{x\theta} \rangle_P - \Xi_k (\langle \dot{\varepsilon}_{x\theta}(t) \rangle_P)] \right\} = \\ = \langle \mathfrak{Z} \rangle_P [\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_P]. \end{aligned} \quad (58)$$

Используя выражение  $\langle \varepsilon_{x\theta}(t) \rangle_P = r \frac{\partial \langle \theta(x, t) \rangle_P}{\partial x}$

и предположение  $\langle \sigma_{x\theta} \rangle_P \approx \frac{3 \langle M \rangle_P}{2 \pi R^3}$  (поскольку

$$\iint_{S_2} \langle \sigma_{x\sigma} \rangle_P r dS = \langle M \rangle_P), \text{ умножая (58) на } r \text{ и интегрируя}$$

по площади  $S_2$ , получаем нелинейное уравнение кручения поперечно-слоистого круглого стержня с использованием модели Фойгта:

$$\begin{aligned} \frac{2 \pi R^3}{3} \langle \mathfrak{Z} \rangle_P \left\{ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathfrak{Z}_k^{-1} \left[ \frac{3 \langle M \rangle_P}{2 \pi R^3} - \Xi_k \left[ r \frac{\partial^2 \langle \theta(x, t) \rangle_P}{\partial t \partial x} \right] \right] \right\} = \\ = \iint_{S_2} \langle \mathfrak{Z} \rangle_P \left[ r \frac{\partial \langle \theta(x, t) \rangle_P}{\partial x} \right] r dr. \end{aligned} \quad (59)$$

В случае линейных функций  $\mathfrak{Z}_k()$  и  $\Xi_k()$  выражение (59) приобретает вид

$$\langle M \rangle_P = J_0 \left[ \langle G \rangle_P \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} + \langle \eta \rangle_P \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t \partial x} \right], \quad (60)$$

$$\text{где } \langle \eta \rangle_P = \langle G \rangle_P \sum_{k=1}^n \gamma_k \frac{\eta_k}{G_k}.$$

К сожалению, аналитически невозможно описать случай кручения композиционного структурно-неоднородного стержня по нелинейной модели Фойгта. Поэтому ограничимся выводом уравнения кручения композиционного стержня в приближении Хилла. При использовании линейной модели в обоих деформируемых элементах для каждого материала с номером  $k$  ( $\mathfrak{Z}'_k = G_k$ ,  $\Xi'_k = \eta_k$ ) несложно из выражений (55) и (60) получить следующие усредненные уравнения для структурно-неоднородного композиционного материала:

$$\langle M \rangle = J_0 \left[ \langle G \rangle_X \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} + \langle \eta \rangle_X \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t \partial x} \right], \quad (61)$$

$$\text{где } \langle G \rangle_X = (\langle G \rangle_\Phi + \langle G \rangle_P)/2, \langle \eta \rangle_X = (\langle \eta \rangle_\Phi + \langle \eta \rangle_P)/2.$$

*Колебания композиционного круглого стержня.* Как видно, нелинейные уравнения ползучести при кручении композиционного стержня (33), (36), (45), (48), (59) невозможно использовать для вывода уравнения крутильных колебаний однородного круглого стержня согласно формулам (12) – (17). Поэтому остановимся на уравнениях кручения (28), (29), (34), (38), (42), (43), (46), (50), (54), (55), (60), (61). Это — нелинейные и линейные уравнения с усреднением по Фойгту (что соответствует продольно-волокнутому или радиально-слоистому материалу), кроме того, только линейные уравнения с усреднением по Рейссу (что соответствует усреднению упругого поперечно-слоистого материала стержня), а также линейные уравнения с усреднением по Хиллу (что соответствует вычислению эффективных свойств структурно-неоднородных материалов).

Не повторяя вывод (12) – (17), остановимся только на полученных результатах. Вначале обратимся к нелинейным уравнениям (28), (42). В принятых ранее обозначениях

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \\ = \Omega_m(t) \iint_{S_2} r^2 \langle \mathfrak{Z} \rangle'_\Phi \left[ \frac{r \partial \theta(x, t)}{\partial x} \right] dS \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \quad (m = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\text{где } \Omega_1(t) = \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi d\tau \right]^{-1} \text{ в случае уравнения (28) и } \Omega_2(t) = \langle \Psi(t) \rangle_\Phi \text{ в случае уравнения (42).}$$

Из уравнения (54) по аналогии с (10) и (22) получаем

$$\langle \rho \rangle J_0 \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \left\{ \iint_{S_2} r^2 \langle \Xi \rangle'_\Phi \left[ \frac{r \partial \theta(x, t)}{\partial x} \right] dS \right\} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + \\ + \left\{ \iint_{S_2} r \langle \Xi \rangle'_\Phi \left[ \frac{r \partial^2 \theta(x, t)}{\partial t \partial x} \right] dS \right\} \frac{\partial^3 \theta(x, t)}{\partial t \partial x^2}.$$

Перейдем к линейным уравнениям (29), (34), (38), (43), (46), (50). С их помощью можно получить уравнение типа (18)

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = a_j^2(t) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \quad (j = \overline{1, 6}) \quad (63)$$

с различающимися значениями  $a_j(t)$ . В соответствии с принятыми ранее обозначениями запишем:

$$a_1(t) = \sqrt{\langle G(t) \rangle_\Phi / \left( \langle \rho \rangle \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_\Phi d\tau \right] \right)},$$

$$a_2(t) = \sqrt{\langle G(t) \rangle_P / \left( \langle \rho \rangle \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_P d\tau \right] \right)},$$

$$a_3(t) = \sqrt{\langle G(t) \rangle_X / \left( \langle \rho \rangle \left[ 1 + \int_0^t \langle \Gamma(t, \tau) \rangle_X d\tau \right] \right)},$$

$$a_4(t) = \sqrt{\frac{\langle G(t) \rangle_\Phi \langle \Psi(t) \rangle_\Phi}{\langle \rho \rangle}},$$

$$a_5(t) = \sqrt{\frac{\langle G(t) \rangle_P \langle \Psi(t) \rangle_P}{\langle \rho \rangle}},$$

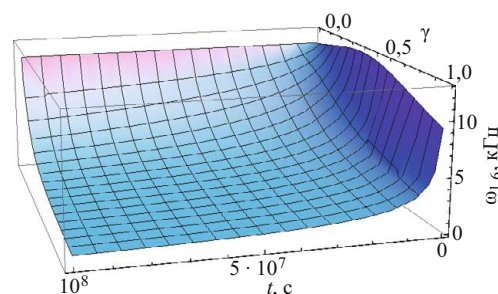
$$a_6(t) = \sqrt{\frac{\langle G(t) \rangle_X \langle \Psi(t) \rangle_X}{\langle \rho \rangle}}.$$

При использовании указанных ранее начального условия  $\theta(x, t)|_{t=0} = \frac{M}{G(0)J_0}x$  и краевых условий свободных крутильных колебаний стержня длиной  $l$  —

$\theta(x, t)|_{x=0} = 0$  и  $\frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}|_{x=l}$  — можно перейти к уравнениям, определяющим собственные частоты  $\omega_i(t)$  стержня при кручении с учетом реологии (рис. 3):

$$\omega_{i,j}(t) = \frac{i\pi}{l} a_j(t) \quad (i = \overline{1, N}, j = \overline{1, 6}), \quad (64)$$

где  $N$  для композиционного стержня определяется из условия  $l/N \gg l'$  — размера макроточки композиционного материала.



**Рис. 3.** Зависимость нижней собственной частоты  $\omega_{1,6}$  (64) стержня длиной  $l = 1$  м от времени  $t$  и концентрации  $\gamma$  первой компоненты двухкомпонентной смеси ( $G_1 = 0,7 \cdot 10^{11}$  Па,  $G_2 = 1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho_1 = 8000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 7500$  кг/м<sup>3</sup>, функции Н. Н. Малинина —  $\Psi_1(t) = 1/(1 + 10^{-6}t)$ ,  $\Psi_2(t) = 1/(1 + 10^{-10}t)$ ) [6]

Переходя к рассмотрению уравнений (55), (60), (61), аналогично (11) и (23) получаем

$$\langle \rho \rangle \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \langle G \rangle_j \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + \\ + \langle \eta \rangle_j \frac{\partial^3 \theta(x, t)}{\partial t \partial x^2} \quad (j = \overline{1, 3}), \quad (65)$$

где  $\langle G \rangle_1 = \langle G \rangle_\Phi$ ,  $\langle \eta \rangle_1 = \langle \eta \rangle_\Phi$ ,  $\langle G \rangle_2 = \langle G \rangle_P$ ,  $\langle \eta \rangle_2 = \langle \eta \rangle_P$ ,  $\langle G \rangle_3 = \langle G \rangle_X$ ,  $\langle \eta \rangle_3 = \langle \eta \rangle_X$ .

Таким образом, рассмотрены реологические уравнения ползучести по наследственной теории, по технической теории старения, а также обобщенная нелинейная вязкоупругая модель Фойгта.

При выводе уравнения кручения однородного стержня из реологически активного материала устранена неточность в вычислении инерционной составляющей. При этом длина стержня, отличная от единичной, появляется в решении только при задании конкретных начального и краевых условий.

Получены уравнения кручения и крутильных колебаний для стержней из однородных материалов в случае линейных и нелинейных уравнений состояния.

В случае кручения композиционного (продольно-волокнутого, радиально- и поперечно-слоистого и структурно-неоднородного) материала стержня рассмотрены все перечисленные реологические модели деформирования в нелинейной и линейной постановках.

Кроме того, установлено, что вычисление эффективных характеристик стержня в соответствии с гипотезой Фойгта соответствует решению задачи усреднения для волокнутого (либо коаксиально слоистого) вдоль оси стержня материала. Применение гипотезы Рейсса соответствует кручению поперечно-слоистого цилиндрического стержня, а применение подхода Хилла — приближению эффективных свойств структурно-неоднородного композиционного материала стержня наиболее простым способом.

Из линейно-вязкоупругих уравнений состояния композиционного материала получены выражения кру-

тильных колебаний и собственных частот при свободных крутильных колебаниях стержня.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кравчук А. С., Кравчук А. И. Моделирование ползучести по наследственной теории в простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины / APRIORI. Сер. Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 2. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>.
2. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1969. — 288 с.
3. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. — Ереван: Институт механики НАН Армении, 1999. — 320 с.
4. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1986. — 544 с.
5. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. — М.: Физматлит, 2005. — 576 с.
6. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.
7. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. — М.: Стройиздат, 1968. — 418 с.
8. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. — М.: Наука, 1984. — 336 с.

## REFERENCES

1. Kravchuk A. S., Kravchuk A. I. Modelirovanie polzuchesti po nasledstvennoi teorii v prosteishei modeli deformiruemogo pokrytiya

postoyannoi tolshchiny [Simulation on Creep by Hereditary Theory in a Simple Model of Constant Thickness Deformed Coating] / APRIORI. Ser. Estestv. Tekhn. Nauki [Electronic resource]. 2014. N 2. Access mode: <http://apriori-journalseria2/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf> [in Russian].

2. Aramanivich I. G., Levin V. I. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. — Moscow: Nauka, 1969. — 288 p. [in Russian]
3. Arutyunyan N. H., Manzhirrov A. V. Kontaktnye zadachi teorii polzuchesti [Contact problems of the theory of creep]. — Yerevan: Izd. Inst. of Mechanics of NAS of Armenia, 1999. — 320 p. [in Russian].
4. Bronstein I. N., Semendyaev K. A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov [Handbook of mathematics for engineers and students of technical universities]. — Moscow: Nauka, 1986. — 544 p. [in Russian].
5. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Mekhanika sloistykh vyazkoupругoplasticheskikh élementov konstruksii [Mechanics of Layer Viscoelastoplastic Constructions Elements]. — Moscow: Fizmatlit, 2005. — 576 p. [in Russian].
6. Malinin N. N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]. — Moscow: Mashinostrienie, 1975. — 400 p. [in Russian].
7. Rzhantsyn A. R. Teoriya polzuchesti [Theory of creep]. — Moscow: Stroyizdat, 1968. — 418 p. [in Russian].
8. Pobedrya B. E. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. — Moscow: Nauka, 1984. — 336 p. [in Russian].