

Математические методы исследования

УДК 519.24:621.398

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

© Н. В. Скибицкий¹, Н. В. Севальнев²*Статья поступила 26 декабря 2014 г.*

Сформулирована постановка задачи оптимального управления при наличии интервальной неопределенности в начальных условиях. Для предложенной постановки исследована и решена задача прогноза состояния объекта при наличии интервальной неопределенности в начальных условиях, определено множество управляющих воздействий, гарантирующих требуемую точность ее решения. Сформулированы необходимые и достаточные условия существования данного множества и разработан алгоритм его получения.

Ключевые слова: оптимальное управление; интервальная неопределенность.

Одна из актуальных задач теории управления — перевод системы в заданное состояние в соответствии с некоторым критерием оптимальности. При этом для описания объекта широко применяются уравнения состояния

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ — вектор переменных состояния; $u \in R^1$ — управление; $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ — матрица состояния.

Обычно матрица $\mathbf{A}$ в уравнении (1) имеет произвольный вид. В то же время для решения задачи управления предпочтительны ее специальные формы (диагональная, сопровождающая, треугольная, жорданова и т.д.), позволяющие упростить процедуру синтеза управления и унифицировать предлагаемые алгоритмы. Вопросы эквивалентных преобразований, которые изменяют вид матрицы системы, но оставляют неизменными свойства решений, для случая точно известного описания объекта и при наличии интервальной неопределенности подробно рассмотрены соответственно в работах [1] и [2]. Поэтому в дальнейшем на этом останавливаться не будем.

Классическая теория оптимального управления позволяет находить оптимальный результат при наличии точного аналитического описания параметров задачи. Однако на практике часто не удается получить точные значения всех компонент исследуемой системы. Неполнота данных о системе приводит к задачам управления в условиях неопределенности, при решении которых необходимо вычислять значения

функций от неточных данных, выполнять различные операции с неточными данными и т.п. Результат этих операций зависит от принятой модели описания неопределенности.

В настоящее время выделяют четыре основные модели описания неопределенности [3]: вероятностную; статистическую; нечеткую; интервальную.

Вероятностная модель используется в предположении, что неточные данные являются случайными величинами. Исчерпывающим описанием непрерывной случайной величины является ее закон распределения вероятности (функция плотности вероятности). На практике широкое распространение получило использование нормальной функции плотности вероятности. Предположение о нормальном законе распределения случайной величины — одна из основных предпосылок применения метода регрессионного анализа для построения модели объекта.

Статистическая модель применяется, когда модель объекта определяется по результатам выборочных экспериментов в условиях действия случайных помех и ошибок.

Нечеткая модель изначально разрабатывалась для формализации действий оператора при ручном управлении объектом в условиях неопределенности. В основе данного подхода лежат понятия нечеткого множества и функции принадлежности.

Интервальная модель в своей основе имеет предположение о том, что все значения внутри интервала $[a]$ являются равновероятными. Она широко применяется, в частности, в метрологии, где неопределенность значения переменной a описывается своими нижней (a^-) и верхней (a^+) границами: $[a] \in [a^-; a^+]$.

¹ Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия; e-mail: SkibitskyNV@mpei.ru

² Energy Consulting Corporate IT Solutions, Москва, Россия; e-mail: sevalnevny@ya.ru

Каждая из приведенных моделей имеет свои области предпочтительного применения, определяемые характером имеющейся информации об объекте, адекватным учетом условий функционирования системы и поставленной задачей.

В данной работе рассмотрена задача управления в условиях интервальной неопределенности. Перед непосредственным решением поставленной задачи коротко остановимся на основных моментах, связанных с интервальными вычислениями.

Как отмечалось выше, в этом случае неопределенность переменной или константы a задается в виде интервала $[a]$ возможных значений $[a] = [a^-; a^+]$, где a^- и a^+ — известные нижняя и верхняя границы, причем в отличие от статистического подхода на интервале $[a]$ не задается функция распределения, значения параметра в интервале — равновозможные.

В дальнейшем в работе будем использовать аппарат интервального анализа [3], который в отличие от интервальной компьютерной арифметики [4, 5] позволяет оперировать с именами переменных, а не только с их значениями, обеспечивает выполнение дистрибутивного закона и наличие обратного элемента. Так, если даны два интервала $[a] = [a^-; a^+]$ и $[b] = [b^-; b^+]$ и условный знак $\#$ обозначает любую арифметическую операцию над ними типа $+$, $-$, $\times$, $/$, то результатом операции является интервал $[z]$, границы которого находятся как решение двух задач на минимум и максимум [2]:

$$[z] = [a] \# [b] = \left[z^- = \min_{a \in [a], b \in [b]} (a \# b); z^+ = \max_{a \in [a], b \in [b]} (a \# b) \right]. \quad (2)$$

Как следует из выражения (2), чтобы определить нижнюю и верхнюю границы величины $[z]$, необходимо найти ее минимум и максимум при всех возможных значениях a и b внутри соответствующих интервалов.

При проведении преобразований последовательно выполняются арифметические операции и промежуточные результаты являются функциями исходных данных. Это означает, что в последующих операциях вычисления будут проводиться для функционально связанных интервалов. В силу этого непосредственное применение интервальной арифметики в эквивалентных преобразованиях уравнений некорректно, так как будем получать так называемое «интервальное расширение». Такой подход имеет наивысшую ценность в задачах, где неопределенности возникают с самого начала, являясь неотъемлемой частью постановки задачи, а отказаться от операций с именами не представляется возможным.

Интервальная неопределенность может присутствовать как в описании объекта, так и в начальных условиях. В данной работе сосредоточимся только на втором случае, который демонстрирует основные осо-

бенности решения задачи и в то же время позволяет сделать его достаточно наглядным.

Постановка задачи оптимального управления

В достаточно общем виде задача может быть сформулирована следующим образом: определить вектор-функции $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, доставляющие минимум (максимум) функционалу

$$J = J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (3)$$

при дифференциальных связях (1), ограничениях вдоль траектории

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \in G \quad (4)$$

и краевых условиях

$$(\mathbf{x}, t_0) \in \xi_0, (\mathbf{x}, t_1) \in \xi_1. \quad (5)$$

Конкретизация выражений (3)–(5) порождает различные типы задач оптимального управления. При этом на практике часто актуальна задача, когда функционал (3) задает время перевода системы из некоторого заданного начального состояния в требуемое конечное, концы траектории фиксированы, а ограничения на управление определяются неравенствами типа

$$|\mathbf{u}(t)| \leq \alpha(t). \quad (6)$$

В том случае, если все параметры задачи (1), (3)–(6) известны точно, мы получаем классическую задачу на максимальное быстродействие, которая формулируется следующим образом: определить управление, которое переводит систему из состояния $\mathbf{x}(t_0)$ в состояние $\mathbf{x}(t_1)$ за минимум времени.

Известно, что к задаче быстродействия может быть сведена задача оптимизации по любому другому критерию, отличному от критерия быстродействия. Указанная процедура сведения осуществляется путем расширения фазового пространства исходной системы на дополнительную координату, соответствующую критерию качества.

Непосредственным предметом исследования является случай, когда начальное состояние известно с точностью до интервалов, т.е.

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}] = [\mathbf{x}^-(t_0), \mathbf{x}^+(t_0)], \quad (7)$$

где $\mathbf{x}^{(0)}$ — измеренное начальное состояние $\mathbf{x}(t_0)$ в момент времени t_0 ; $\mathbf{x}^-(t_0)$ и $\mathbf{x}^+(t_0)$ — соответственно нижняя и верхняя границы вектора $[\mathbf{x}^{(0)}]$.

Дальнейшее изложение будем проводить для системы второго порядка, что позволяет:

- применить полученные результаты к широкому классу реальных объектов;
- не снижать общности подхода;
- сделать результаты более наглядными.

С учетом сказанного далее рассмотрим следующую задачу:

$$J = t_1 - t_0 \rightarrow \min, \quad (8)$$

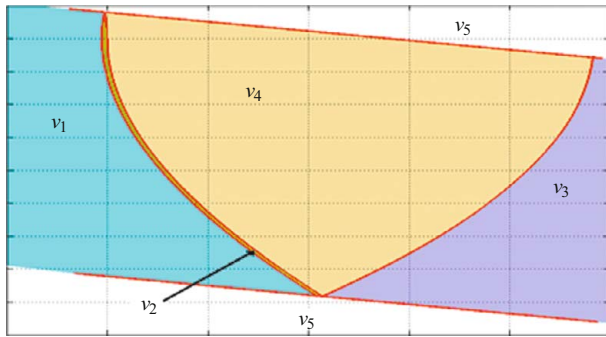


Рис. 1. Области начальных условий

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (9)$$

$$|u| \leq u_{\max}, \quad (10)$$

$$x_1 + \frac{1}{a}x_2 \leq b_1, \quad x_1 + \frac{1}{a}x_2 \geq b_2, \quad (11)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \in [\mathbf{x}^{(0)}] = \begin{pmatrix} [x_{10}^-, x_{10}^+] \\ [x_{20}^-, x_{20}^+] \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Данная постановка задачи носит вполне конкретный практический характер и может быть использована, например, при оптимальном управлении регулирующим клапаном конденсационной турбины с целью обеспечения номинального режима ее работы [7]. В частности, элемент a матрицы состояния представляет собой отношение параметра саморегулирования к постоянной времени ротора турбогенератора. Анализ работы рассматриваемой системы показал, что при работе турбины на номинальную нагрузку режим обеспечивается путем изменения частоты вращения турбины. При этом задача оптимального управления частотой вращения турбины является задачей на быстроедействие с закрепленными концами, ограничениями на управление $u(t)$ и на переменные состояния $\mathbf{x}(t)$.

Далее без потери общности будем считать, что выполняется условие $t_0 = 0$, которое легко обеспечить элементарными линейными преобразованиями.

Решение задачи при точно известных параметрах

Можно показать, что в рассматриваемой задаче оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянным и имеет не более трех интервалов постоянства: $[t_0, t^*]$, $[t^*, t^{**}]$ и $[t^{**}, t_1]$.

Поскольку оптимальное управление имеет не более трех интервалов постоянства, вид его определяется начальными условиями $\mathbf{x}^{(0)}$, оптимальная траекто-

рия $\mathbf{x}(t)$ может иметь только один участок, лежащий на границе области, определяемой ограничениями (4), то в зависимости от начального состояния управляющее воздействие будет найдено в соответствии с одним из следующих соотношений:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{при } t \in [0, t^*], \\ 0 & \text{при } t \in (t^*, t^{**}], \\ -u_{\max} & \text{при } t \in (t^{**}, t_1], \end{cases} \quad (13)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max} & \text{при } t \in [0, t^*], \\ -u_{\max} & \text{при } t \in (t^*, t_1], \end{cases} \quad (14)$$

$$u^*(t) = -u_{\max} \quad \text{при } t \in [0, t_1]. \quad (15)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} -u_{\max} & \text{при } t \in [0, t^*], \\ 0 & \text{при } t \in (t^*, t^{**}], \\ u_{\max} & \text{при } t \in (t^{**}, t_1], \end{cases} \quad (16)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} -u_{\max} & \text{при } t \in [0, t^*], \\ u_{\max} & \text{при } t \in (t^*, t_1], \end{cases} \quad (17)$$

$$u^*(t) = u_{\max} \quad \text{при } t \in [0, t_1], \quad (18)$$

где t^* , t^{**} — моменты переключения управления.

Соотношения (13) – (18) позволяют выделить области начальных условий для каждого вида управления и находить моменты переключения для каждой области начальных условий в отдельности. При этом для уменьшения количества рассматриваемых областей удобно третий вид управления рассматривать как частный случай второго (при $t^* = 0$), а шестой — как частный случай пятого (при $t^{**} = 0$).

Анализ выражений (8) – (12) с учетом (13) – (18) показал, что можно выделить пять областей начальных условий: v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 (рис. 1).

Область

$$v_1(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} x_1 + \frac{1}{a}x_2 \leq b_1, \\ x_1 + \frac{1}{a}x_2 \geq b_2; \\ x_{10} < \xi_{11} - \frac{x_{20} - \xi_{12}}{a} - \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{-ax_{20} + u_{\max}}{-a\xi_{12} + u_{\max}} \right|, \end{cases}$$

где

$$\xi_{11} = -\frac{\xi_{12}}{a} + \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{a\xi_{12} + u_{\max}}{u_{\max}} \right|;$$

$$\xi_{12} = \exp\left(\frac{b_1 a^2}{u_{\max}}\right) \frac{u_{\max} - u_{\max}}{a}.$$

Область $v_2(\mathbf{x}^{(0)}) = v_{21}(\mathbf{x}^{(0)}) \in v_{22}(\mathbf{x}^{(0)})$, где

$$v_{21}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} x_{20} \geq 0, \\ x_{10} \leq -\frac{x_{20}}{a} + \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{ax_{20} + u_{\max}}{u_{\max}} \right|, \\ x_{10} \geq \xi_{11} - \frac{x_{20} - \xi_{12}}{a} - \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{-ax_{20} + u_{\max}}{-a\xi_{12} + u_{\max}} \right|, \\ x_1 + \frac{1}{a}x_2 \geq b_2; \end{cases}$$

$$v_{22}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} x_{20} < 0, \\ x_{10} < -\frac{x_{20}}{a} - \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{-ax_{20} + u_{\max}}{u_{\max}} \right|, \\ x_{10} \geq \xi_{11} - \frac{x_{20} - \xi_{12}}{a} - \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{-ax_{20} + u_{\max}}{-a\xi_{12} + u_{\max}} \right|, \\ x_1 + \frac{1}{a}x_2 \geq b_2. \end{cases}$$

Область

$$v_3(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} x_1 + \frac{1}{a}x_2 \leq b_1, \\ x_1 + \frac{1}{a}x_2 \geq b_2, \\ x_{10} > \xi_{21} - \frac{x_{20} - \xi_{22}}{a} + \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{ax_{20} + u_{\max}}{a\xi_{22} + u_{\max}} \right|, \end{cases}$$

где

$$\xi_{21} = -\frac{\xi_{22}}{a} - \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{-a\xi_{22} + u_{\max}}{u_{\max}} \right|;$$

$$\xi_{22} = -\exp\left(\frac{-b_2 a^2}{u_{\max}}\right) \frac{u_{\max} - u_{\max}}{a}.$$

Область $v_4(\mathbf{x}^{(0)}) = v_{41}(\mathbf{x}^{(0)}) \in v_{42}(\mathbf{x}^{(0)})$, где

$$v_{41}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} x_{20} \geq 0, \\ x_{10} > -\frac{x_{20}}{a} + \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{ax_{20} + u_{\max}}{u_{\max}} \right|, \\ x_{10} \leq \xi_{21} - \frac{x_{20} - \xi_{22}}{a} + \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{ax_{20} + u_{\max}}{a\xi_{22} + u_{\max}} \right|, \\ x_1 + \frac{1}{a}x_2 \leq b_1, \end{cases}$$

$$v_{42}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} x_{20} < 0, \\ x_{10} \geq -\frac{x_{20}}{a} - \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{-ax_{20} + u_{\max}}{u_{\max}} \right|, \\ x_{10} \leq \xi_{21} - \frac{x_{20} - \xi_{22}}{a} + \frac{u_{\max}}{a^2} \ln \left| \frac{ax_{20} + u_{\max}}{a\xi_{22} + u_{\max}} \right|, \\ x_1 + \frac{1}{a}x_2 \leq b_1. \end{cases}$$

Область

$$v_5(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{cases} x_1 + \frac{1}{a}x_2 > b_1, \\ x_1 + \frac{1}{a}x_2 < b_2. \end{cases}$$

Область v_5 является недопустимой областью начальных состояний, так как если точка $\mathbf{x}^{(0)}$ ей принадлежит, то нарушается одно из ограничений (11).

Как отмечалось выше, если начальное состояние принадлежит одной из областей v_1, v_2, v_3, v_4 , то оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянным и имеет не более трех интервалов постоянства. Моменты переключения управления находятся из дифференциальных уравнений, описывающих динамику объекта, ограничений на вектор переменных состояния $\mathbf{x}(t)$ и граничных условий.

Рассмотрим данную задачу только для начальных условий, принадлежащих области v_2 , поскольку для остальных областей подход аналогичен.

Если точка $\mathbf{x}^{(0)}$ принадлежит области v_2 , то оптимальное управление u^* определяется соотношением (14), где

$$x_2(t^*) =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{a^2} \left\{ \exp \left[\left(x_{10} + \frac{x_{20}}{a} \right) \frac{a^2}{u_{\max}} \right] |u_{\max}(-ax_{20} + u_{\max})| - u_{\max}^2 \right\}}, \quad (19)$$

$$t^* = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{-ax_2(t^*) + u_{\max}}{-ax_{20} + u_{\max}} \right|, \quad (20)$$

$$t_1 = t^* - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u_{\max}}{ax_2(t^*) + u_{\max}} \right|. \quad (21)$$

Прогноз состояния системы с учетом интервальной неопределенности

Пусть начальное состояние системы известно с точностью до интервала в соответствии с (7). Тогда не существует единственного управления, гарантирующего точный перевод объекта (при любых возможных начальных состояниях $\mathbf{x}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}]$ из состояния $\mathbf{x}^{(0)}$ в состояние $\mathbf{x}^{(1)}$, и управление системой без учета неопределенности может перевести ее в недопустимое состояние. Поэтому первоначально рассмотрим решение задачи прогноза состояния объекта при реализации оптимального управления, полученного по неточно измеренным начальным условиям $\mathbf{x}^{(0)}$.

В этой связи определим такое множество конечных состояний Ω_n , в котором может оказаться система при реализации программного управления (13) – (18), полученного по измеренным начальным условиям $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}$, т.е. без учета интервальной неопределенности на значения начального состояния:

$$\Omega_n = \{u(t) \in R^1: \exists \mathbf{x}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}],$$

$$\mathbf{x}(t_0, t_1, \mathbf{x}^{(0)}, u(v_i)) = \mathbf{x}^{(1)}, i = 1 - 4\}.$$

В данном случае при реализации оптимального управления (14) с учетом (19) – (21) состояние объек-

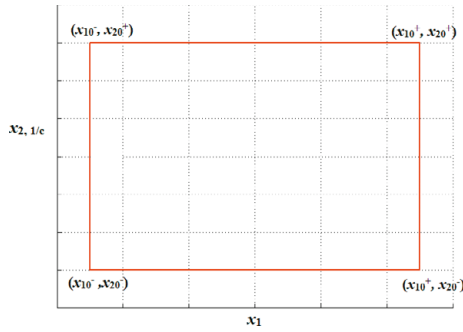


Рис. 2. Область начальных состояний

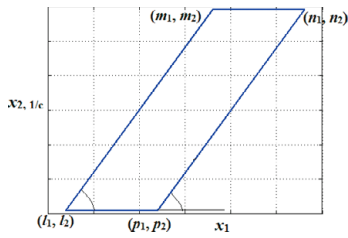


Рис. 3. Область конечных состояний

та в конечный момент времени t_1 при точно известном начальном состоянии определяется соотношениями

$$x_{11} = x_{10} + \frac{x_{20}}{a} + \frac{u_{\max}}{a^2} + \frac{2u_{\max}}{a} t^* - \frac{u_{\max}}{a} t_1 - \frac{2u_{\max}}{a^2} e^{-a(t_1-t^*)} - \left(\frac{x_{20}}{a} - \frac{u_{\max}}{a^2} \right) e^{-at_1}, \quad (22)$$

$$x_{21} = e^{-at_1} \left(\frac{2u_{\max}}{a} e^{at^*} + x_{20} - \frac{u_{\max}}{a} \right) - \frac{u_{\max}}{a}. \quad (23)$$

Обозначим

$$c_1 = \frac{u_{\max}}{a^2} + \frac{2u_{\max}}{a} t^* - \frac{u_{\max}}{a} t_1 - \frac{2u_{\max}}{a^2} e^{-a(t_1-t^*)} + \frac{u_{\max}}{a^2} e^{-at_1},$$

$$c_2 = e^{-at_1} \left(\frac{2u_{\max}}{a} e^{at^*} - \frac{u_{\max}}{a} \right) - \frac{u_{\max}}{a} > 0,$$

$$c_3 = \frac{1}{a} (1 - e^{-at_1}) > 0, \text{ при } t_1 > 0, \quad c_4 = e^{-at_1} > 0.$$

Тогда соотношения (22), (23) можно представить в виде

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & c_3 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Если область начальных состояний объекта (рис. 2) описывается соотношением (7), то область прогноза Ω_{Π} состояний объекта $\mathbf{x}^{(1)}$ при реализации управления (14), (19) – (21) на множестве возможных

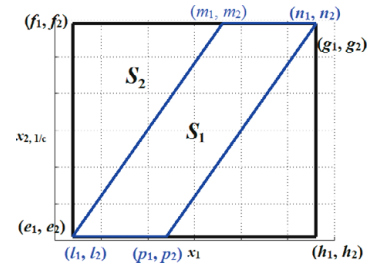


Рис. 4. Область прогноза конечного состояния системы

начальных состояний представляет собой параллелограмм (рис. 3) с вершинами $\mathbf{l}^T = (l_1, l_2)$, $\mathbf{m}^T = (m_1, m_2)$, $\mathbf{n}^T = (n_1, n_2)$, $\mathbf{p}^T = (p_1, p_2)$, где

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} x_{10}^- + c_3 x_{20}^- + c_1 \\ c_4 x_{20}^- + c_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} x_{10}^- + c_3 x_{20}^+ + c_1 \\ c_4 x_{20}^- + c_2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x_{10}^+ + c_3 x_{20}^+ + c_1 \\ c_4 x_{20}^+ + c_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_{10}^+ + c_3 x_{20}^- + c_1 \\ c_4 x_{20}^- + c_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что Ω_{Π} является выпуклым множеством, для построения которого достаточно определить значения $\mathbf{x}(t_0, t_1, u)$ только для начальных состояний, расположенных в вершинах прямоугольника, задающего множество возможных начальных состояний системы.

Таким образом, точность прогноза конечного состояния объекта может быть оценена площадью S_1 параллелограмма (рис. 4), рассчитываемой как

$$S_1 = (n_1 - m_1)(m_2 - l_2) = (x_{10}^+ - x_{10}^-)(x_{20}^+ - x_{20}^-) e^{-at_1}.$$

Вместе с тем определяемое таким образом множество Ω_{Π} является недостаточно наглядным и удобным для формирования условий к точности решения задачи, особенно для случая $n > 2$. Поэтому представляется разумным определить некоторое прямоугольное многогранное подмножество Ω_{Π}^1 минимального объема, обеспечивающего справедливость условия

$$\Omega_{\Pi} \in \Omega_{\Pi}^1.$$

В двумерном случае множество Ω_{Π}^1 будет представлять собой прямоугольник S_2 (см. рис. 4), вершины которого определяются следующими соотношениями:

$$e_1 = f_1 = \min(l_1, m_1, n_1, p_1), \quad e_2 = h_2 = \min(l_2, m_2, n_2, p_2),$$

$$g_1 = h_1 = \max(l_1, m_1, n_1, p_1),$$

$$f_2 = g_2 = \max(l_2, m_2, n_2, p_2). \quad (24)$$

А поскольку

$$c_3 = \frac{1}{a} (1 - e^{-at_1}) > 0 \text{ при } t_1 > 0, \quad c_4 = e^{-at_1} > 0,$$

то

$$e_1 = f_1 = l_1, \quad e_2 = h_2 = l_2, \quad g_1 = h_1 = n_1, \quad f_2 = g_2 = n_2.$$

Площадь прямоугольника S_2 может быть определена по формуле

$$S_2 = (n_1 - l_1)(m_2 - l_2) = \\ = \left[x_{10}^+ - x_{10}^- + \frac{1 - e^{-at_1}}{a} (x_{20}^+ - x_{20}^-) \right] (x_{20}^+ - x_{20}^-) e^{-at_1}.$$

Сравнение значений S_1 и S_2 с областью неопределенности начального состояния (см. рис. 2) позволяет оценить соотношение степени неопределенности начального состояния со степенью неопределенности конечного состояния.

Решение задачи управления с заданной точностью в условиях интервальной неопределенности

При наличии интервальной неопределенности на параметры задачи вряд ли стоит говорить о ее решении в том смысле, в котором оно понимается при точно известных параметрах. Действительно, если начальное состояние известно точно, то его состояния в конечный момент времени и параметры управления определяются в соответствии с выражением (14) с учетом (19) – (21). Если же значение $\mathbf{x}^{(0)}$ точно не известно, то нельзя гарантировать, что управление, рассчитанное для конкретного начального состояния $\mathbf{x}^{(0)}$, обеспечит выполнение условия $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{(1)}$ для произвольных значений $\mathbf{x}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}]$. Более того, нетрудно показать, что множество управляющих воздействий будет пустым.

Поэтому ставится следующая задача: определить такое множество управляющих воздействий Ω_u , любое управление из которого гарантировало бы заданную точность решения для любого $\mathbf{x}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}]$, т.е. предлагается установить требование справедливости отношения

$$\mathbf{x}(t_1) \in \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} [x_{11}] \\ [x_{21}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x_{11}^-, x_{11}^+] \\ [x_{21}^-, x_{21}^+] \end{pmatrix}, \quad (25)$$

где $[x_{11}]$, $[x_{21}]$ задаются из условия достаточной точности решения.

Тогда задача (8) – (12) принимает вид

$$J = t_1 - t_0 \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_2 + u,$$

$$|u| \leq u_{\max}, \quad x_1 + \frac{1}{a}x_2 \leq b_1, \quad x_1 + \frac{1}{a}x_2 \geq b_2,$$

$$\mathbf{x}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}], \quad \mathbf{x}(t_1) \in [\mathbf{x}^{(1)}],$$

Области конечных состояний системы при применении управляющих воздействий из Ω_u

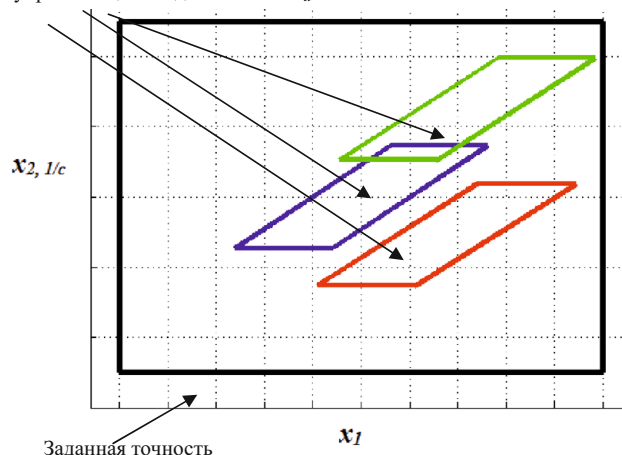


Рис. 5. Область конечных состояний объекта при $u \in \Omega_u$

где $\mathbf{x}^{(1)}$ задается из некоторых априорных соображений с учетом допустимых пределов точности решения задачи.

Предлагается найти в классе кусочно-постоянных функций такое множество управляющих воздействий Ω_u , любое управление $u(t^*, t_1, v)$ из которого позволит осуществить перевод объекта из начального состояния в конечное с требуемой точностью:

$$\Omega_u = \{u \in R^1: \forall \mathbf{x}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}],$$

$$\mathbf{x}(t_0, t_k, \mathbf{x}^{(0)}, u(v_i)) \in [\mathbf{x}^{(1)}], \quad i = 1 - 4\}.$$

Выше было показано, что если область начальных состояний объекта представляет собой прямоугольник в пространстве состояний, то реализация управления $u(t^*, t_1, v)$ вида (14) переводит объект в область конечных состояний, описываемую параллелограммом в пространстве состояний.

Таким образом, для решения задачи управления объектом с заданной точностью требуется, чтобы при применении любого управляющего воздействия $u(t^*, t_1, v)$ из множества Ω_u область конечных состояний объекта лежала внутри прямоугольника, заданного интервалами (25) (рис. 5).

Для того чтобы параллелограмм, задающий множество конечных состояний при реализации управляющего воздействия при $\forall \mathbf{x}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}]$, лежал внутри прямоугольника, определяемого выражением (25), необходимо обеспечить справедливость неравенств

$$\min(l_1, m_1, n_1, p_1) \geq x_{11}^-, \quad \min(l_2, m_2, n_2, p_2) \geq x_{21}^-;$$

$$\max(l_1, m_1, n_1, p_1) \leq x_{11}^+, \quad \max(l_2, m_2, n_2, p_2) \leq x_{21}^+.$$

Поскольку

$$c_3 = \frac{1}{a}(1 - e^{-at_1}) > 0 \quad \text{при } t_1 > 0, \quad c_4 = e^{-at_1} > 0,$$

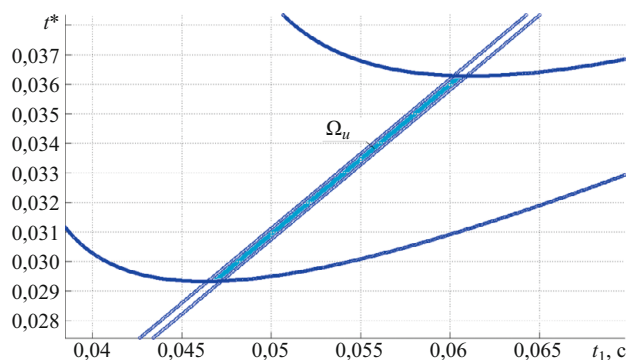


Рис. 6. Множество управляющих воздействий Ω_u

то с учетом (24) получим

$$\min(l_1, m_1, n_1, p_1) = l_1 \geq x_{11}^-,$$

$$\min(l_2, m_2, n_2, p_2) = p_2 = l_2 \geq x_{21}^-;$$

$$\max(l_1, m_1, n_1, p_1) = n_1 \leq x_{11}^+,$$

$$\max(l_2, m_2, n_2, p_2) = n_2 = m_2 \leq x_{21}^+.$$

В соответствии с этим множество Ω_u определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x_{10}^+ + c_3 x_{20}^+ + c_1 \leq x_{11}^+, \\ c_4 x_{20}^+ + c_2 \leq x_{21}^+, \\ x_{10}^- + c_3 x_{20}^- + c_1 \geq x_{11}^-, \\ c_4 x_{20}^- + c_2 \geq x_{21}^-, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{u_{\max}}{a^2} + \frac{2u_{\max}}{a} t^* - \frac{u_{\max}}{a} t_1 - \\ &\quad - \frac{2u_{\max}}{a^2} e^{-a(t_1 - t^*)} + \frac{u_{\max}}{a^2} e^{-at_1}; \\ c_2 &= e^{-at_1} \left(\frac{2u_{\max}}{a} e^{at^*} - \frac{u_{\max}}{a} \right) - \frac{u_{\max}}{a}; \\ c_3 &= \frac{(1 - e^{-at_1})}{a}; \quad c_4 = e^{-at_1}. \end{aligned}$$

При построении множества Ω_u возможны три варианта:

1) Ω_u включает множество допустимых управлений, если выполняются условия (26); вид множества Ω_u , рассчитанного на основании конкретных численных данных из [7], приведен на рис. 6;

2) Ω_u — пустое множество, если нарушается хотя бы одно условие из системы (26);

3) Ω_u содержит единственное допустимое управление, если неравенства (26) обращаются в равенства; в предположении, что границы вектора $[x^{(1)}]$ симмет-

ричны относительно нуля, что не снижает общности подхода, получим

$$t^* = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{1}{2} - \frac{x_{20}^+ a}{4u_{\max}} - \frac{x_{20}^- a}{4u_{\max}} + \frac{1}{2e^{-at_1}} \right|. \quad (27)$$

Соотношение (27) с учетом системы неравенств (26), обращенной в систему равенств, позволяет определить значения $[x^{(1)}]$, t_1 , которые совместно с t^* , определенным по выражению (27), обеспечивают существование единственного управления в Ω_u .

Различные методы анализа интервальных данных рассмотрены в обзоре [8].

Таким образом, проведен анализ основных моделей описания неопределенности и установлены области их предпочтительного применения, определяемые характером имеющейся информации об объекте.

Отмечены особенности применения аппарата интервального анализа по сравнению с интервальной арифметикой. Такой подход особенно ценен в задачах, где неопределенности возникают с самого начала, будучи неотъемлемой частью постановки задачи, а отказаться от операций с именами не представляется возможным.

Показано, что если область возможных начальных состояний объекта описывается n -мерным прямоугольным параллелепипедом, то область прогноза состояний объекта на множестве возможных начальных состояний представляет собой n -мерный параллелепипед и не существует единственного управления, гарантирующего точный перевод объекта при любых возможных начальных состояниях из заданной области в точно заданное конечное состояние. При этом для построения указанной области прогноза достаточно определить значения состояния объекта как функцию только начальных состояний, расположенных в вершинах n -мерного прямоугольного параллелепипеда, задающего множество возможных начальных состояний системы.

Сформулирована и решена задача определения такого множества кусочно-постоянных управляющих воздействий, любое управление из которого гарантирует заданную точность решения для любого начального состояния из исходной интервальной области неопределенности. Получены условия, при которых оно включает множество допустимых управлений, является пустым или содержит единственное допустимое управление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайдук А. Р. Алгебраические методы анализа и синтеза систем автоматического управления. — Ростов-на-Дону: Издательство РГУ, 1988. — 208 с.
2. Скибицкий Н. В., Чекавинская Я. С. Преобразование модели системы управления в условиях интервальной неопределенности / Вестник МЭИ. 2012. № 1. С. 91 – 96.
3. Вошинин А. П., Сотиров Г. Р. Оптимизация в условиях неопределенности. — М.: Изд-во МЭИ, 1989. — 224 с.

4. Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ. — М.: XYZ, 2013. — 606 с.
5. Алефельд Г. Ш., Херцберг Ю. Введения в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 370 с.
6. Вошинин А. П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2002. Т. 68. № 1. С. 118 – 126.
7. Булкин А. Е. Автоматическое регулирование энергоустановок. — М.: Издательский дом МЭИ, 2009. — 508 с.
8. Орлов А. И. Статистика интервальных данных / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81. № 3. С. 61 – 69.

REFERENCES

1. Gaiduk A. R. Algebraicheskie metody analiza i sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya [Algebraic methods of analysis and synthesis of automatic control systems]. — Rostov-on-Don: Izd. RGU, 1988. — 208 p. [in Russian].
2. Skibitskiy N. V., Chekavinskaya Ya. S. Preobrazovanie modeli sistemy upravleniya v usloviyakh interval'noi neopredelennosti [Transformation

of system control model in the condition of an interval uncertainty] / Vestnik MÉI. 2012. N 1. P. 91 – 96 [in Russian].

3. Voshchinin A. P., Sotirov G. R. Optimizatsiya v usloviyakh neopredelennosti [Optimization under uncertainty in conditions]. — Moscow: Izd. MÉI, 1989. — 224 p. [in Russian].
4. Sharyi S. P. Konechnomernyi interval'nyi analiz [The finite-dimensional interval analysis]. — Moscow: XYZ, 2013. — 606 p. [in Russian].
5. Ahlefeld G. S., Herzberg J. Introduction to interval calculations. — Moscow: Mir, 1987 — 370 p. [Russian translation].
6. Voshchinin A. P. Interval'nyi analiz dannykh: razvitie i perspektivy / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2002. Vol. 68. N 1. P. 91 – 96. [Voshchinin A. P. Interval data analysis: development and prospects / Industr. Lab. Diagn. Mater. 2002. Vol. 68. N 1. P. 118 – 126.]
7. Bulkin A. E. Avtomaticheskoe regulirovanie énergoustanovok [Automatic control of power plants]. — Moscow: Izd. dom MÉI, 2009. — 508 p. [in Russian].
8. Orlov A. I. Statistika interval'nykh dannykh [Statistics of interval data (generalizing paper)] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2015. Vol. 81. N 3. P. 61 – 69 [in Russian].