

DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-3-57-69>

УТОЧНЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ МОДУЛЯ МЕЖСЛОЙНОГО СДВИГА ПО ПОПРАВКЕ К ПРОГИБУ ОБРАЗЦОВ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ

© Александр Николаевич Полилов, Данила Денисович Власов, Николай Алексеевич Татусь*

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Россия, 101000, Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4;
*e-mail: nikalet@mail.ru

*Статья поступила 25 мая 2022 г. Поступила после доработки 29 июля 2022 г.
Принята к публикации 30 августа 2022 г.*

В полимерных волокнистых композитах сдвиговые и межслойные характеристики, в отличие от металлов, играют определяющую роль в процессах деформирования и разрушения. В связи с этим разрабатывались специальные методы определения межслойной прочности при изгибе короткой балки и модуля межслойного сдвига — по поправке к прогибу. В то же время принятые гипотезы о распределении касательных напряжений, например по формуле Журавского, являются простейшими и не позволяют с высокой точностью определить поправку и рассчитать модуль сдвига. Потенциально использование вместо простейшего параболического распределения решения Сен-Венана – Лехницкого для ортотропной балки позволяет учесть все касательные напряжения, возникающие в балке, а также их распределение по ее высоте и ширине, что должно повысить точность определения поправки к прогибу, а следовательно, и модуля межслойного сдвига. Поскольку строгое решение представлено в рядах гиперболических функций, практическое использование его сильно затруднено. Для решения этой проблемы в данной работе представлена точная аппроксимация строгого решения более простыми квадратичными зависимостями, которая позволяет рассчитать поправку к прогибу и с высокой точностью определить модуль сдвига. С помощью предложенной аппроксимации аналитически показано, что для реальных композитных образцов балочного типа использование уточненного распределения касательных напряжений с учетом неоднородности напряжений по ширине балки дает пренебрежимо малую поправку к прогибам по сравнению с упрощенным параболическим распределением по формуле Журавского. Получено численное подтверждение с помощью метода конечных элементов. Специально проведенные испытания стеклопластиковых образцов разной ширины на трехточечный изгиб также показали отсутствие роста прогиба при увеличении ширины балки, что говорит о незначительном влиянии неоднородности касательных напряжений на прогиб.

Ключевые слова: полимерный слоистый композит; стеклопластик; углепластик; изгиб; распределение касательных напряжений; модуль межслойного сдвига.

A REFINED METHOD FOR ESTIMATING THE INTERLAYER SHEAR MODULUS BY CORRECTING THE DEFLECTION OF POLYMER COMPOSITE SPECIMENS

© Alexander N. Polilov, Danila D. Vlasov, Nikolai A. Tatus*

A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, 4, Maly Kharitonyevsky per. 4, Moscow, 101000, Russia; *e-mail: nikalet@mail.ru

Received May 25, 2022. Revised July 29, 2022. Accepted August 30, 2022.

Shear and interlayer characteristics of polymer fiber composites, in contrast to metals, play a decisive role in the deformation and fracture processes. In this regard, special methods have been developed to determine the interlayer bending strength of a short beam and the interlayer shear modulus by deflection correction. At the same time, the accepted hypotheses about the distribution of shear stresses, for example, by the Zhuravsky formula, are too simple and do not provide the determination of the correction and calculation of the shear modulus with a rather high accuracy. The use of the Saint-Venant – Lekhnitzky solution for an orthotropic beam instead of the simplest parabolic distribution potentially makes it possible to take into account all the shear stresses occurring in the beam, as well as their distribution over the height and width of the beam, which should increase the accuracy of determining the deflection correction and interlayer shear modulus, respectively. Since the strict solution is presented in a series of hyperbolic functions, its practical use is rather difficult. We present an exact approximation of the strict solution by sim-

pler quadratic dependences, which provides determination of the deflection correction and the shear modulus with a high accuracy. It is shown that for real composite beam-type specimens the use of the refined shear stress distribution with allowance for the heterogeneity of stresses along the beam width gives a negligibly small correction for the deflection compared to the simplified parabolic distribution according to the Zhuravsky formula. The numerical verification was carried out using the finite element. Special tests of fiberglass specimens of different widths for three-point bending also showed no increase in the deflection with increasing beam width, which indicates an insignificant influence of the heterogeneity of tangential stresses on the deflection.

Keywords: polymer layered composite; fiberglass; carbon fiber; bending; shear stress distribution; interlayer shear modulus.

Введение

Для анализа изгиба деревянных балок всегда важен учет касательных напряжений. При изгибе металлических балок касательные напряжения несущественны, они значительно меньше нормальных и могут играть роль лишь при разрушении составных балок, когда все перерезывающие силы (возникающие сдвиговые, срезающие усилия) воспринимаются только заклепками, болтами или сварным швом. Интерес к анализу касательных напряжений связан с появлением полимерных волокнистых композитов [1 – 5], у которых межслойные, сдвиговые упругие и прочностные [6 – 10] характеристики намного ниже, чем продольные (вдоль волокон).

Влияние межслойных сдвигов на прогиб легко пояснить на простом примере. Если на строительных лесах заменить одну доску «сороковку» (толщиной 40 мм) на две доски «двадцатки» (толщиной по 20 мм, но той же ширины), то прогиб настила под каменщиком увеличится примерно в четыре раза (если нет трения между досками). Чтобы избежать этого, следует две доски шить гвоздями, исключив межслойный сдвиг (проскальзывание) между ними.

Если модуль межслойного сдвига мал, то сдвиги могут принести существенный вклад в прогиб. Для металлов влияние сдвигов при изгибе невелико, поэтому их не учитывают. Иначе обстоит дело с древесиной или полимерными композитами, модуль межслойного сдвига которых может быть в десятки раз меньше, чем продольный модуль Юнга вдоль волокон. Анализ влияния модуля межслойного сдвига на дополнительный прогиб позволяет оценить значение этого модуля при испытаниях на изгиб образцов различной длины [11 – 14]. Традиционно при обработке результатов экспериментов используют описание эпюры касательных напряжений приближенной формулой Журавского [15, 16].

Цель работы — оценка погрешности метода определения модуля межслойного сдвига полимерных композитов типа стекло-, угле-, органо-пластиков при использовании приближенной формулы для касательных напряжений по сравнению с точной и численными расчетами, а так-

же экспериментальное подтверждение результатов расчетов.

Краткая история теории изгиба балок прямоугольного профиля

Первые исследования прочности при изгибе балок были проведены Галилео Галилеем, который допускал линейное изменение напряжений по сечению, но считал нижнюю поверхность балки ненагруженной [17, 18]. Ошибка применения таких гипотез при оценке максимальных напряжений составляла 50 % по сравнению с более адекватной гипотезой плоских сечений.

Ставшая классической «гипотеза плоских сечений» Барре де Сен-Венана допускала наличие только продольных напряжений растяжения и сжатия, независимых от ширины, а также нейтральной оси в середине прямоугольного сечения балки.

Дальнейшие уточнения [2, 15] касались учета несовпадения модулей упругости при растяжении и сжатии, что приводит к смещению нейтральной оси в сторону большего модуля.

При учете касательных напряжений, уравнивающих перерезывающую силу, согласно Тимошенко, Журавскому [17, 18] сохраняется независимость нормальных и касательных напряжений от ширины и касательных — от длины. Такая постановка содержит явное противоречие: несмотря на наличие касательных напряжений, вызывающих сдвиги и искажающих сечения, они по-прежнему считаются плоскими при расчете нормальных напряжений. Тогда для линейно изменяющихся нормальных напряжений из одного уравнения равновесия находится параболическое распределение касательных напряжений. Это противоречие снимается гипотезой о малости касательных напряжений. Значит, они незначительно искривляют плоское сечение и при расчете нормальных напряжений их можно не учитывать. В результате из линейного распределения нормальных напряжений следует распределение межслойных касательных напряжений по высоте по параболическому закону.

Следующий шаг — так называемое решение Сен-Венана [19]. В этой постановке сохраняется

линейность по нормальным, продольным напряжениям, но учитывается и вторая компонента касательных напряжений. Из удовлетворения уже двум уравнениям равновесия получается решение в рядах по тригонометрическим и гиперболическим функциям. Появляется поправка к параболической эпюре, и обе компоненты касательных напряжений оказываются зависящими от координат не только по высоте, но и по ширине поперечного сечения балки. Подобные решения для изгиба и кручения ортотропной балки получены Лехницким [20, 21].

Все эти гипотезы использовали в целях получения аналитических решений. С появлением эффективных численных методов (МКЭ) кинематические гипотезы (типа «плоских сечений») становятся необязательными. Появляется возможность учета контактных (сжимающих в направлении толщины) напряжений, создаваемых поперечной нагрузкой. В зоне около опор и нагружающего верхнего цилиндра никакой симметричной параболы для касательных напряжений нет [22], но это можно показать только из численного решения.

Методам определения межслойного модуля сдвига посвящено большое число работ (например, [23 – 28]), но для расчета касательных напряжений применительно к экспериментам не использовались уточненные решения [19 – 22].

Метод оценки модуля межслойного сдвига по поправке к прогибу

Модуль Юнга E_x вдоль продольной оси x определяют при поперечном трехточечном изгибе балки (рис. 1) по формуле

$$E_x = \frac{Pl^3}{4\omega wh^3}, \quad (1)$$

где P — приложенная центральная сила; l — длина пролета; ω и h — ширина и толщина образца в виде балки прямоугольного сечения; считается, что $u = u_1$ — максимальный прогиб в центральном сечении под нагрузкой. Мы не анализируем здесь эффект «скатывания» образца с цилиндрических опор и влияние бимодульности, т.е. различия в кажущихся значениях модуля упругости при растяжении и сжатии, приводящего к смещению нейтральной оси [2, 11, 15].

Если проводить испытания одинаковых образцов (а лучше — одного образца) при разных длинах l пролета, результаты определения модуля по формуле (1) окажутся различными, так как формула (1) получена в предположении, что прогиб $u = u_1$ определяется только поворотами сечений, т.е. без учета влияния касательных напряжений, искривляющих первоначально плоское

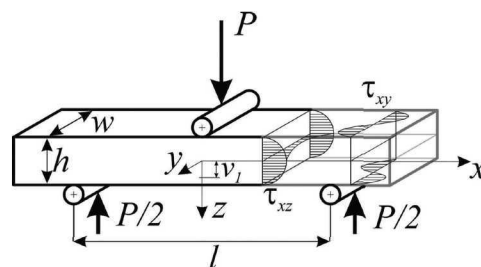


Рис. 1. Схема нагружения прямоугольной балки на поперечный изгиб

Fig. 1. Diagram of loading a rectangular beam for transverse bending

поперечное сечение балки. Более правильно считать, что прогиб состоит из двух частей: $u = u_1 + u_2$, где u_1 , u_2 — прогибы от нормальных и касательных напряжений.

Распределение касательных напряжений по толщине балки обычно предполагается параболическим и не зависящим от координат x и y (см. рис. 1):

$$\tau_{xz} = \frac{3P}{wh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (2)$$

Дополнительный прогиб u_2 можно вычислить из условия перехода работы силы P на этом прогибе в упругую энергию ($\tau \gamma/2$) сдвиговой деформации γ :

$$\frac{1}{2} P u_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau_{xz}^2(z)}{G_{xz}} dx dy dz = \frac{\alpha P^2 l}{8 G_{xz} wh}, \quad (3)$$

где $\alpha = 1,2$ для поперечного изгиба балки прямоугольного сечения. Общий измеряемый прогиб можно представить в виде

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 = \frac{Pl^3}{4E_x wh^3} + \frac{\alpha Pl}{4G_{xz} wh} = \\ &= u_1 \left(1 + \alpha \frac{E_x}{G_{xz}} \frac{h^2}{l^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Определяя на одинаковых образцах по формуле (1) значения «фиктивного» модуля Юнга E_{fx} , обнаружим, что этот модуль растет с увеличением длины пролета l :

$$\frac{1}{E_{fx}} = \frac{1}{E_x} + \frac{\alpha_0}{G_{xz}} \frac{h^2}{l^2}, \quad (5)$$

где E_x — истинный модуль Юнга; G_{xz} — модуль межслойного сдвига. Если в координатах $1/E_{fx} - (h/l)^2$ (рис. 2) провести через экспериментальные точки прямую линию согласно (5), то можно определить обе упругие константы — E_x и G_{xz} .

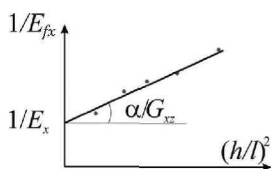


Рис. 2. Схематическая зависимость измеряемого «фиктивного» модуля упругости E_{fx} от длины пролета при испытаниях на изгиб

Fig. 2. Schematic dependence of the measured “fictitious” modulus of elasticity E_{fx} on the span length in bending tests

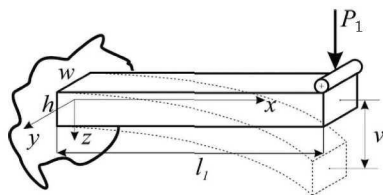


Рис. 3. Расчетная схема консольной балки

Fig. 3. Calculation scheme of the cantilever beam

Влияние характера неоднородности межслойных касательных напряжений

Для простоты анализа далее будем рассматривать консольную балку под действием концевой силы $P_1 = P/2$ (рис. 3) в виде половины образца, представленного на рис. 1, с теми же постоянными размерами сечений: толщиной h (вдоль оси z), шириной w (вдоль оси y), длиной $l_1 = l/2$ вдоль координаты x , отсчитываемой от заделки. Координаты y и z отсчитываются от центра прямоугольного сечения.

Общий вариационный принцип [19, 20] (типа принципа Кастилиано) состоит в том, что тело находится в статическом равновесии, если вариация работы на виртуальных перемещениях внешних поверхностей тела совпадает с вариацией работы внутренних напряжений. Иными словами, работа внешних сил равна изменению энергии деформации (без учета кинетической и тепловой энергии). Граничные условия для консольной балки представляют собой либо фиксированные перемещения (перемещения в заделке равны нулю), либо нулевые напряжения на свободных поверхностях — на этих участках внешние силы не совершают работу. Внешнюю работу совершает только концевая сила P на вариации прогиба u . Эту работу нужно приравнять энергии деформации, которая для единичного объема пропорциональна $1/2$ от свертки тензоров напряжений и деформаций: $\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$. В постановке

Сен-Венана [19] ненулевыми считаются напряжения: одно нормальное продольное σ_{xx} и два касательных — межслойное τ_{xz} и «в плоскости» τ_{xy} .

Поэтому при вычислении общего прогиба следует учитывать вклад от всех трех компонент (σ_{xx} , τ_{xz} , τ_{xy}) тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P v &= \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\sigma_{xx}^2}{E_{xx}} + \frac{\tau_{xz}^2}{G_{xz}} + \frac{\tau_{xy}^2}{G_{xy}} \right) dV = \\ &= \frac{w}{2} \int_0^l \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_{xx}^2(x, z)}{E_{xx}} dx dz + \\ &+ \frac{l}{2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\tau_{xz}^2(y, z)}{G_{xz}} + \frac{\tau_{xy}^2(y, z)}{G_{xy}} \right) dz dy. \end{aligned} \quad (6)$$

В постановке «гипотезы плоских сечений» Сен-Венана из (6) получаем (1), а в постановке [17, 18] — (4), (5). В постановке, допускающей только численные решения, в (6) учитывают и нормальные напряжения (σ_{zz} , σ_{yy}) по толщине и по ширине и все три компоненты (τ_{xz} , τ_{yz} , τ_{xy}) касательных напряжений, т.е. все напряжения, которые не считают равными нулю в рамках принятых гипотез.

Прогиб консоли u_1 под действием нормальных напряжений (при сохранении гипотезы плоских сечений) получают из (6):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P_1 v_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \frac{M^2(x)}{E_x I} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1 &= \int_0^{l_1} \frac{P_1 (l_1 - x)^2}{E_x I} dx = \frac{4 P_1 l_1^3}{E_x w h^3}; I = \frac{w h^3}{12}. \end{aligned}$$

Прогиб u_2 консоли из-за межслойных сдвигов под действием касательных напряжений находят из (6) для принятого распределения касательных напряжений по толщине в предположении о независимости от длины и ширины:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P_1 v_2 &= \frac{1}{2} \iiint \frac{\tau_{xz}^2(x, y, z)}{G_{xz}} dx dy dz \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2 &= w l_1 \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau_{xz}^2(z)}{P_1 G_{xz}} dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Рост неравномерности распределения касательных напряжений (при сохранении их среднего значения $\tau_0 = P_1/w h$, определяемого перерезывающей силой P_1) повышает их влияние на прогиб. Это можно проиллюстрировать на наглядных примерах, если считать, что перерезывающая сила P_1 (интеграл от касательного напряжения τ_{xz} по площади $S = w h$) сохраняется постоянной.

Простейшее предположение (заведомо неверное, но удобное для иллюстрации) состоит в том,

что касательные напряжения τ_0 постоянны по длине, ширине и толщине сечения и их равнодействующая равна перерезывающей силе P_1 . Тогда из (7) получаем

$$\tau_0 wh = P_1 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{P_1 G_{xz}} \iiint \tau_0^2 dx dy dz = \frac{P_1 l_1}{wh G_{xz}}. \quad (8)$$

Из (6), (8) общий прогиб консоли (см. рис. 3), равный прогибу образца (см. рис. 1), составит

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 = \frac{Pl^3}{4E_x wh^3} + \frac{Pl}{4wh G_{xz}} = \\ &= v_1 \left(1 + \alpha_0 \frac{E_x}{G_{xz}} \frac{h^2}{l^2} \right); \alpha_0 = 1 \text{ } (< 1, 2). \end{aligned} \quad (9)$$

Видно, что в простейшем случае равномерного распределения касательных напряжений коэффициент при поправке $\alpha_0 = 1$, т.е. меньше, чем в (3), где $\alpha = 1, 2$.

Рассмотрим три простейшие иллюстрации, опирающиеся на вывод, например из [24], о существенном отклонении реальной эпюры от параболической.

Считаем, что эпюра касательного напряжения кусочно-постоянная: на одной половине площади сечения напряжение равно $\tau_0(1 - a)$, а на второй половине — $\tau_0(1 + a)$. Перерезывающая сила по-прежнему $P_1 = \tau_0[(1 - a)S/2 + (1 + a)S/2] = \tau_0 S$, но поправка к прогибу согласно (8) возрастет:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\tau_0^2 wh l_1}{2 P_1 G_{xz}} [(1 - a)^2 + (1 + a)^2] = \\ &= \frac{P_1 l_1}{wh G_{xz}} (1 + a^2) \Rightarrow \alpha_1 = 1 + a^2. \end{aligned}$$

Если уменьшить неравномерность — разбить сечение на четыре равные по площади части с напряжениями $\tau_0(1 - a)$, $\tau_0(1 - a/2)$, $\tau_0(1 + a/2)$, $\tau_0(1 + a)$, то перерезывающая сила сохранится, а поправка уменьшится:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\tau_0^2 wh l_1}{4 P_1 G_{xz}} \left[(1 - a)^2 + \left(1 - \frac{a}{2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{a}{2} \right)^2 + (1 + a)^2 \right] = \frac{P_1 l_1}{wh G_{xz}} \left(1 + \frac{5}{8} a^2 \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_2 = 1 + \frac{5}{8} a^2. \end{aligned}$$

Чем меньше неравномерность напряжений, тем незначительней поправка к прогибу!

Реальная эпюра касательных напряжений сильно отличается от (2), и ее всплески около опор можно смоделировать кусочно-равномерным распределением, приняв $\tau_{xz} = \tau_1 = \text{const}$ на некотором участке толщиной $t < h$ и $\tau_{xz} = 0$ на оставшемся участке толщиной $h - t$:

$$\tau_{xz}(z) = \begin{cases} \tau_1 (z \leq t); \\ 0 (t < z \leq h) \end{cases} \Leftrightarrow \tau_1 = P_1/(wt). \quad (10)$$

Для модельной эпюры (10) поправка к прогибу из (8) примет вид

$$v_2 = w \frac{\tau_0^2 t l_1}{P_1 G_{xz}} = \frac{\alpha_3 P_1 l_1}{G_{xz} wh}, \alpha_3 = h/t > \alpha. \quad (11)$$

Аналогично можно рассмотреть пример для анализа влияния неравномерности напряжений по ширине. Примем, что по ширине на отрезке длиной b напряжение $\tau_1 = P/bh = \tau_0 w/b$, а вне этого отрезка $\tau = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{P G_{xz}} \iiint \tau^2 dx dy dz = \frac{lh}{P G_{xz}} \int_0^b \tau_1^2 dy = \\ &= \frac{Plh}{h^2 b^2 G_{xz}} b = \frac{Pl}{hb G_{xz}} \Rightarrow v = v_1 + v_2 = \\ &= \frac{Pl^3}{wh^3 E_{xx}} + \frac{Pl}{bh G_{xz}} = v_1 \left(1 + \alpha_4 \frac{l^2 E_{xx}}{h^2 G_{xz}} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_4 = w/b > 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (11), (12) показывают, что с ростом неоднородности распределения касательных напряжений по ширине или толщине (при уменьшении b по сравнению с w и t по сравнению с h) растет поправка к прогибу, а значит, учет реального распределения напряжений по ширине и толщине может иметь значение для достаточно широких образцов, для которых эта неоднородность существенна. Именно через поправку к прогибу определяется такая важная характеристика КМ, как модуль межслойного сдвига.

Приведенные примеры объясняют, почему важно уточненными и численными расчетами оценить погрешность применения параболической эпюры (2) при определении модуля межслойного сдвига и обосновать область ее применимости.

Решение Сен-Венана – Лехницкого для изотропной и ортотропной консольной балки

Изотропная балка. В более строгой постановке задачи изгиба [19 – 21] касательные напряжения на горизонтальных и вертикальных пло-

щадках предполагаются зависящими не только от вертикальной z , но и от поперечной y координаты, что позволяет учесть влияние ширины балки на распределения касательных напряжений, возникающих под действием перерезывающей силы.

Считается, что в консольной балке (см. рис. 3), нагруженной концевой силой $P_1 = P/2$, действующей в плоскости симметрии сечения, все компоненты тензора напряжений равны нулю, кроме

$$\sigma_{xx}, \sigma_{xy} \equiv \tau_{xy}, \sigma_{xz} \equiv \tau_{xz}.$$

Нормальные напряжения вычисляются по элементарной балочной теории, основанной на гипотезе «плоских сечений» и их независимости от y , т.е. постоянства по ширине балки:

$$\sigma_{xx} = -\frac{P_1(l_1 - x)z}{I}, \quad I = \frac{wh^3}{12}. \quad (13)$$

При этих гипотезах единственное невырожденное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{P_1 z}{I} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) можно переписать, введя функцию напряжений F и приняв

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{\partial F}{\partial z}; \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{P_1}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{P_1 z}{I}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь член, содержащий P_1 , представляет элементарное решение (2) для межслойных касательных напряжений (плоскость слоев имеет нормалью ось z):

$$\tau_{xz} = \frac{6P_1}{wh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \Rightarrow \tau_{xz}^{\max} = \frac{3P_1}{2wh} \text{ при } z = 0. \quad (16)$$

Подставим выражения (16) в уравнения Бельтрами – Митчела [19]:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij} + \frac{3}{1+\nu} \sigma_{ij} &= 0; \sigma = \frac{1}{3} \sum \sigma_{ii} = \frac{\sigma_{xx}}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3}{1+\nu} \sigma_{ij} &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{1+\nu} \frac{P_1}{I}; \\ \Delta \tau_{xz} &= \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z^2} = \Delta \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{P_1}{I}, \end{aligned}$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Для изотропного материала

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{xy} &= \Delta \frac{\partial F}{\partial z} = 0; \Delta \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P_1}{I} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta F &= \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P_1 y}{I}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для прямоугольного сечения принимаются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } y = \pm \frac{1}{2} w &\Rightarrow \tau_{xy} = -\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \\ \text{при } z = \pm \frac{1}{2} h &\Rightarrow \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{P_1}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

На контуре сечения функция F либо постоянная, либо равна нулю. Решение уравнения Пуассона (17) для прямоугольного сечения можно найти, выбрав сначала частное решение F_1 , удовлетворяющее одному из граничных условий (18), т.е. обращающееся в ноль на сторонах, нормальных оси y :

$$y = \pm \frac{1}{2} w \Leftrightarrow F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P_1}{6I} \left(y^3 - \frac{1}{4} y w^4 \right). \quad (19)$$

Принимается $F = F_0 + F_1$, где F_0 — гармоническая функция, удовлетворяющая следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{при } y = \pm \frac{1}{2} w &\Rightarrow F_0 = 0; \\ \text{при } z = \pm \frac{1}{2} h &\Rightarrow F_0 + F_1 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Для балки прямоугольного сечения функция напряжений ищется в виде ряда по тригонометрическим и гиперболическим функциям с учетом соображений четности и граничных условий. Окончательное выражение для функции напряжений получается в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(y, z) &= \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{P_1 w^3}{4I \pi^3} \left[\frac{\pi^3 y}{6w} \left(\frac{4y^2}{w^2} - 1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{\text{ch}(2\pi n z/w)}{\text{ch}(\pi n h/w)} \sin \frac{2\pi n y}{w} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

По формулам (15) с использованием (21) просто получить касательные напряжения, которые изменяются не только по толщине, но и по ширине балки, что необходимо учитывать в методе оп-

ределения модуля межслойного сдвига по поправке к прогибу:

$$\tau_{xy} = \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{6P_1 w}{h^3 \pi^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{sh}(2\pi n z/w)}{\text{ch}(\pi n h/w)} \sin \frac{2\pi n y}{w} \right];$$

$$\tau_{xz} = \frac{P_1}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) + \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{6P_1}{w h^3} \left[y^2 - \frac{w^2}{12} - \frac{w^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{ch}(2\pi n z/w)}{\text{ch}(\pi n h/w)} \cos \frac{2\pi n y}{w} \right]. \quad (22)$$

Справедливость выражений для касательных напряжений проверяется удовлетворением граничным условиям на сторонах прямоугольного сечения:

1. $y = \pm \frac{1}{2} w \Rightarrow \tau_{xy} = 0.$
2. $z = \pm \frac{1}{2} h \Rightarrow \frac{3P_1}{2wh} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) = 0;$

$$\frac{\nu}{1+\nu} \frac{6wP_1}{h^3} \left[\frac{y^2}{w^2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{2\pi n y}{w} \right] = 0.$$
3. $z = y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tau_{xz}^{\min} = \frac{3P_1}{2wh} \left\{ 1 - \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{w^2}{3h^2 \pi^2} \times \right.$$

$$\times \left[1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{\text{ch}(\pi n h/w)} \right] \left. \right\} < \frac{3P_1}{2wh}.$$
4. $z = 0; y = \pm w/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tau_{xz}^{\max} = \frac{3P_1}{2wh} \left[1 + \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{2w^2}{h^2} \times \right.$$

$$\times \left. \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\text{ch}(\pi n h/w)} \right) \right] > \frac{3P_1}{2wh}. \quad (23)$$

Из формул (23) явно видна зависимость межслойных касательных напряжений от отношения ширины балки к ее толщине. При этом в центре балки напряжение ниже, чем τ_1 , полученное по элементарной формуле (16), а на краю — выше; это различие растет с увеличением ширины балки.

Ортотропная балка. Уравнение для функции напряжений F приобретает следующий вид:

$$\frac{1}{G_{xz}} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{G_{xy}} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{2P_1 \nu_{xy}}{E_{zz} I} y. \quad (24)$$

Найдем функцию F , обращающуюся в ноль на всех сторонах прямоугольника $z = \pm h/2$; $y = \pm w/2$. Правую часть (24) можно разложить в ряд Фурье как функцию, заданную на интервале $y \in (-w/2, +w/2)$. В силу нечетности по y этот ряд содержит лишь синусы, и уравнение (24) приобретает вид

$$\frac{1}{G_{xz}} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{G_{xy}} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} =$$

$$= -\frac{2P_1 w \nu_{xy}}{E_{xx} I \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{2\pi n y}{w}. \quad (25)$$

При выводе (25) использовано известное разложение функции $f(y) = y$ в ряд Фурье на интервале $(-\pi, \pi)$ и сделана линейная замена переменной y_1 на y :

$$y_1 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n y_1; \quad y_1 \in (-\pi, \pi),$$

$$y = y_1 \frac{w}{2\pi} \Rightarrow y \in (-w/2, w/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{w}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{2\pi n y}{w}.$$

Решение уравнения (25) ищется в виде ряда, удовлетворяющего условиям на сторонах $y = \pm w/2$, тогда из (25) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(z) \sin \frac{2\pi n y}{w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{G_{xy}} Y_n'' - \frac{1}{G_{xz}} \left(2n \frac{\pi}{w} \right)^2 Y_n = -\frac{2P_1 w \nu_{xy}}{E_{xx} I \pi} \frac{(-1)^n}{n}. \quad (26)$$

Общий интеграл уравнения (26) имеет вид

$$Y_n(z) = A_n \text{sh} \frac{2n\pi \sqrt{gz}}{w} + B_n \text{ch} \frac{2n\pi \sqrt{gz}}{w} +$$

$$+ \frac{P_1 w^3 G_{xz} \nu_{xy}}{2E_{xx} I \pi^3} \frac{(-1)^n}{n^3}, \quad g = \frac{G_{xy}}{G_{xz}}. \quad (27)$$

Константы A_n, B_n в (27) находятся из граничных условий на сторонах $z = \pm h/2$, где функция напряжений F должна обращаться в ноль. Окончательно получаем

$$F = \frac{P_1 w^3 G_{xz} \nu_{xy}}{2E_{xx} I \pi^3} \times$$

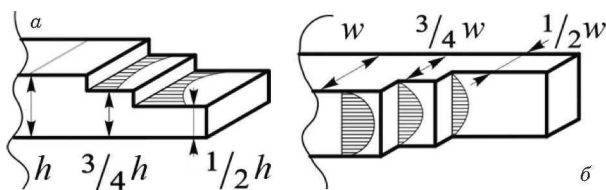


Рис. 4. Распределение касательных межслойных напряжений τ_{xz} по ширине (а) и толщине (б) балки

Fig. 4. Distribution of shear interlayer stresses τ_{xz} over the beam width (a) and height (b)

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^3} \left(1 - \frac{\text{ch}(2n\pi z \sqrt{g/w})}{\text{ch}(n\pi h \sqrt{g/w})} \right) \sin \frac{2n\pi y}{w} \right]. \quad (28)$$

Из (28) находим распределения касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{P_1 w^2 G_{xz} v_{xy}}{E_{xx} I \pi^2} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{sh}(2n\pi z \sqrt{g/w})}{\text{ch}(n\pi h \sqrt{g/w})} \sin \frac{2n\pi y}{w} \right]; \\ \tau_{xz} &= \frac{P_1}{2I} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) - \frac{P_1 w^2 G_{xz} v_{xy}}{E_{xx} I \pi^2} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} \left(1 - \frac{\text{ch}(2n\pi z \sqrt{g/w})}{\text{ch}(n\pi h \sqrt{g/w})} \right) \cos \frac{2n\pi y}{w} \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

По аналогии с (23) проверяем удовлетворение граничным условиям:

$$\begin{aligned} 1. \quad z = 0, y = 0 &\Rightarrow \tau_{xy} = 0; \tau_{xz}^{\min} = -\frac{3P_1}{2wh} \times \\ &\times \left(1 - \frac{G_{xz} v_{xy}}{3E_{xx}} c^2 \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \text{ch}(n\pi/c)} \right] \right); \\ 2. \quad z = 0, y = \pm w/2 &\Rightarrow \tau_{xy} = 0; \tau_{xz}^{\max} = -\frac{3P_1}{2wh} \times \\ &\times \left(1 + \frac{G_{xz} v_{xy}}{3E_{xx}} c^2 \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \text{ch}(n\pi/c)} \right] \right); \\ c &= \frac{w}{h\sqrt{g}}. \quad (30) \end{aligned}$$

Вычисление поправки к прогибу с помощью аппроксимации эпюр касательных напряжений. Поскольку прогиб определяется выражением (6), необходимо представить распределения напряжений в доступном для интегрирования виде. Нормальные напряжения σ_{xx} линейны по толщине и длине и не зависят от ширины. Одна-

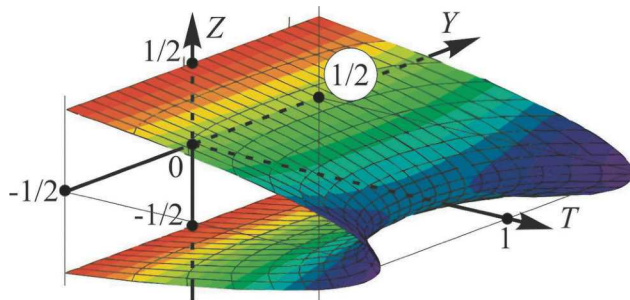


Рис. 5. Распределение межслойных касательных напряжений τ_{xz} в сечении yz в виде поверхности

Fig. 5. Distribution of shear tangential interlayer stresses τ_{xz} as a surface in the section yz

ко вид эпюр касательных напряжений τ_{xz} , τ_{xy} из решения (29) неочевиден, выражения (29) не позволяют проводить расчеты прогибов даже с помощью специализированных программ, поэтому необходима их аппроксимация достаточно простыми функциями.

Аппроксимация эпюры межслойных касательных напряжений. Рассмотрим более подробно распределение межслойных касательных напряжений τ_{xz} . Вместо криволинейной поверхности второго порядка для наглядности будем анализировать отдельно распределения напряжений по ширине и толщине балки (рис. 4).

Для визуального восприятия сложного распределения по сечению yz межслойных касательных напряжений τ_{xz} построена поверхность (рис. 5), отражающая наложение эпюр, приведенных на рис. 4. Принято следующее обозначение осей: $Y = y/w$; $Z = z/h$; $T = \tau_{xz}/\tau_{xz}^{\max}$.

Из точных расчетов (29) (см. рис. 4) видно, что распределения межслойных напряжений по ширине и толщине хорошо описываются квадратичными зависимостями (параболами). Зависимость по ширине можно описать выражением $\tau(y) = a(1 + by^2)$, поскольку ветви параболы направлены вверх, а зависимость по толщине — формулой типа Журавского $\tau(z) = a(1 - 4z^2/h^2)$. Общее выражение межслойных касательных напряжений имеет следующий вид:

$$\tau_{xz} = a(1 + by^2)(1 - 4z^2/h^2). \quad (31)$$

Для использования выражения (31) при определении поправки к прогибу по формуле (6) необходимо рассчитать по формулам (30) наибольшее и наименьшее значения касательных напряжений, приняв $a = \tau_{xz}^{\min}$; $b = 4(\tau_{xz}^{\max}/\tau_{xz}^{\min} - 1)/w^2$, с учетом равенства перерезывающей силы интеграла от касательных напряжений:

$$P = 4 \int_0^{h/2} \int_0^{w/2} \tau_{xz} dy dz =$$

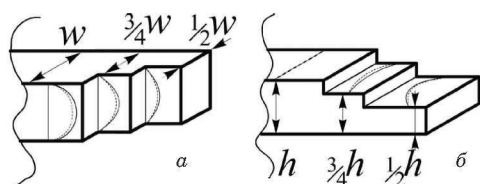


Рис. 6. Эпюры межслойных касательных напряжений τ_{xz} по толщине (а) и ширине (б) балки: — — точное решение (29); - - - - аппроксимация (31)

Fig. 6. Diagrams of interlayer shear stresses τ_{xz} along the beam height (a) and width (b): — — precise solution (29); - - - - approximation (31)

$$= aw h \left(1 + \frac{bw^2}{12} - \frac{kh^2}{12} - \frac{bkh^2w^2}{144} \right). \quad (32)$$

На рис. 6 схематично показаны эпюры напряжений, построенные на основе точного решения (29) и аппроксимации (31). Видно, что кривые практически совпадают, что говорит о возможности описания межслойных напряжений квадратичными зависимостями.

С применением соотношения (31) возможна проверка влияния на прогиб неоднородности распределения по ширине межслойных касательных напряжений. Поскольку с ростом ширины балки значения напряжений в середине сечения $\tau_{xz}^{\min}$ и на краю $\tau_{xz}^{\max}$ будут значительно различаться, поправка к прогибу может увеличиться, а значит, в расчетах необходимо учитывать отношение $\tau_{xz}^{\max}/\tau_{xz}^{\min}$.

Было рассчитано влияние неоднородности межслойных касательных напряжений по ширине на поправку к прогибу. Для реальных отношений ширины к толщине (<3) и модуля сдвига в плоскости к модулю межслойного сдвига (<5) отношение $\tau_{xz}^{\max}/\tau_{xz}^{\min} \leq 1,1$. Но даже при изменении по ширине напряжений не на 10 %, а на 30 % поправка, рассчитанная по аппроксимации (31), отличалась от поправки к прогибу, определенной по традиционной формуле (4) без учета изменений напряжений по ширине, всего на 0,7 %. Таким образом, получен важный результат — реальная неоднородность межслойных касательных напряжений практически не влияет на прогиб u_2 , что позволяет не учитывать ее в расчетах.

Аппроксимация эпюры касательных напряжений в плоскости XY

Распределения касательных напряжений τ_{xy} не являются параболическими, из (29) эпюры этих напряжений представлены в графическом виде на рис. 7.

По аналогии с рис. 5 можно представить распределение касательных напряжений в виде по-

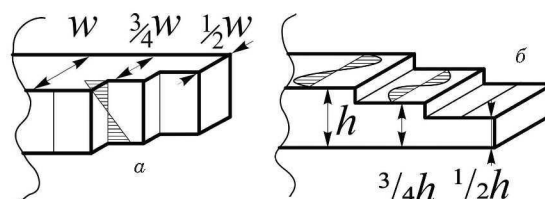


Рис. 7. Распределения касательных напряжений τ_{xy} по толщине (а) и ширине (б) балки

Fig. 7. Distribution of shear stresses τ_{xy} along the beam height (a) and width (b)

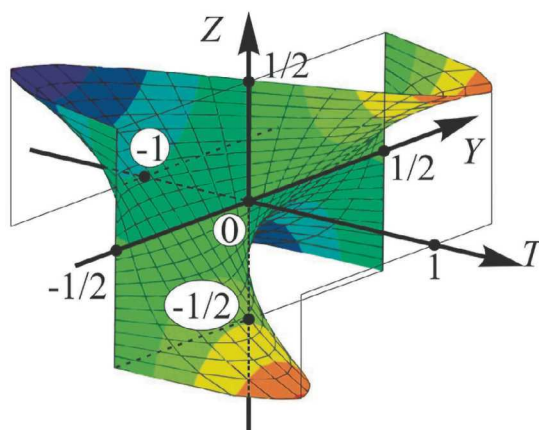


Рис. 8. Распределение касательных напряжений τ_{xy} в сечении yz в виде поверхности

Fig. 8. Distribution of shear stresses τ_{xy} as a surface in the section yz

верхности (рис. 8). Принято следующее обозначение осей: $Y = y/w$; $Z = z/h$; $T = \tau_{xy}/\tau_{xy}^{\max}$.

Для распределения τ_{xy} по толщине (см. рис. 7, а) удобно использовать простейшую линейную зависимость вида $\tau_{xy} = nz$. Из (29) видно, что эпюры τ_{xy} определяются нечетными функциями, так что интеграл от них равен нулю ввиду отсутствия поперечной перерезывающей силы. Эпюру напряжений τ_{xy} по ширине можно заменить либо двумя квадратичными зависимостями $\tau_{xy} = |a_1 y(y - w/2)|$; $0 \leq |y| \leq w/2$, либо синусоидой $\tau_{xy} = k \sin 2\pi y/w$. Выражение для касательных напряжений представим в виде

$$\tau_{xy} = |a_1 z y (w/2 - y)|; \quad \tau_{xy} = kz \sin 2\pi y/w,$$

$$\text{где } k = \frac{2}{h} \tau_{xy}^{\max}; \quad a_1 = \tau_{xy}^{\max} \frac{32}{hw^2}; \quad 0 \leq |y| \leq w/2.$$

Заметим, что выражение (6) содержит интеграл от отношения квадрата напряжений к модулю сдвига τ_{xy}^2/G_{xy} . Поскольку $G_{xy} \gg G_{xz}$ и $\tau_{xy} \gg \tau_{xz}$, межслойные сдвиговые деформации будут значительно больше ($\gamma_{xy} > \gamma_{xz}$), а следовательно, намного сильнее влияние межслойных сдвигов на поправку к прогибу. Из выражений (29) опре-

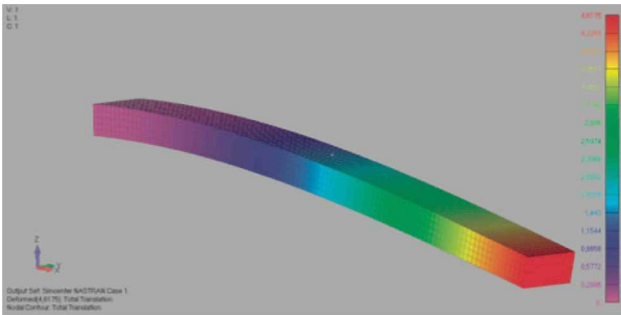


Рис. 9. Результаты МКЭ-расчета прогиба модели консольной балки с поперечным сечением 5×10 мм и длиной пролета 100 мм; $P = 100$ Н

Fig. 9. Results of FEM calculation of the deflection of a cantilever beam model with a cross-section of 5×10 mm and a span length of 100 mm; $P = 100$ N

делены наибольшие значения касательных напряжений: $\tau_{xz}^{\max} = 2,28$ МПа; $\tau_{xy}^{\max} = 0,744$ МПа. Ввиду того, что межслойные касательные напряжения τ_{xz} больше «внутрислойных» τ_{xy} в три раза, а модуль G_{xz} меньше G_{xy} в два – три раза, вклад касательных напряжений τ_{xy} в энергию деформации и в дополнительный прогиб пренебрежимо мал, поэтому их можно не учитывать.

Численное моделирование изгиба консольной ортотропной балки

Проверка влияния ширины балки на поправку к прогибу. Для проведения численного эксперимента в программном комплексе FEMAP NASTRAN была построена модель консольной ортотропной балки (рис. 9) со следующими механическими характеристиками: $E_{xx} = 70$ ГПа; $G_{xy} = 15$ ГПа; $G_{xz} = 5$ ГПа.

Таблица 1. Результаты аналитического и численного расчетов прогиба

Table 1. The results of analytical and numerical calculation of the deflection

$h \times w$, мм ²	МКЭ, мм	Аналитический расчет, мм
5×5	4,619	4,619
5×10	4,617	
5×30	4,612	

Таблица 2. Рассчитанные значения модуля Юнга и модуля сдвига

Table 2. Calculated values of the shear modulus and Young’s modulus

$h \times w$, мм ²	E_x , ГПа	G_{xz} , ГПа	Отличие E_x от заданного, %	Отличие G_{xz} от заданного, %
5×5	70,028	4,867	0,04	2,66
5×10	70,028	4,907	0,04	1,86
5×30	70,077	4,888	0,11	2,24
Заданные значения	70,0	5,0	0,0	0,0

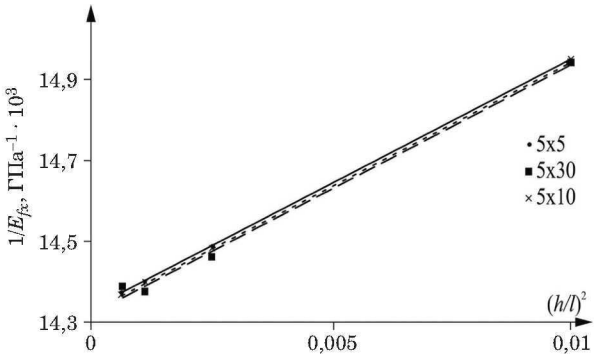


Рис. 10. Зависимости измеряемого «фиктивного» модуля Юнга от длины пролета балки

Fig. 10. Dependences of the measured Young’s modulus on the beam span length

Расчеты для различных значений размеров поперечного сечения и длины пролета проводили при МКЭ-моделировании с помощью элементов типа SOLID.

Были получены результаты численного и аналитического по формулам (6) и (31) расчетов для балки длиной 100 мм и $w/h = 1; 2; 6$. При изменении размеров поперечного сечения начальную нагрузку снижали пропорционально уменьшению ширины балки. Результаты, представленные в табл. 1, показывают различие рассчитанных прогибов в тысячных долях миллиметра (сотые доли %).

Проверка корректности методики определения модуля межслойного сдвига по поправке к прогибу. С помощью метода конечных элементов определяли прогиб балок различного поперечного сечения при изменении их длины. На основе формулы (1) для каждого значения длины (50; 100; 150; 200 мм) находили «фиктивный» модуль упругости. Далее по аналогии с рис. 2 для каждой ширины поперечного сечения строили прямые в координатах $1/E_{fx} - (h/l)^2$ (рис. 10), с помощью которых согласно (5) определяли истинный модуль Юнга E_x и модуль межслойного сдвига G_{xz} . Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Численные расчеты показали хорошее согласие оценок истинного модуля упругости и модуля сдвига, при этом даже значительное изменение

Таблица 3. Прогиб балки при изменении отношения модулей сдвига**Table 3.** Beam deflection with a change in the shear modulus ratio

g	МКЭ, мм	Аналитический расчет, мм
1	4,618	4,619
3	4,618	
5	4,617	
10	4,616	

ширины балки (в шесть раз) практически не повлияло на результат. Значение модуля сдвига отличается от заданного в расчетах меньше, чем на 3 %, а погрешность при определении «истинного» модуля упругости составляет доли процента.

Влияние отношения модулей сдвига на поправку к прогибу. Во всех представленных выше расчетах предполагали, что модуль межслойного сдвига меньше «внутрислойного» модуля сдвига в три раза: $g = G_{xy}/G_{xz} = 3$. Однако в реальных композитах отношение модулей сдвига может сильно отличаться от принятого значения. При этом g входит в соотношения (29) и может влиять на поправку к прогибу. Для проверки этого влияния для сравнения были проведены численный и аналитический расчеты прогиба балки при различных значениях g (табл. 3).

Результаты расчетов показали крайне незначительное изменение прогиба при существенном увеличении G_{xy}/G_{xz} , что говорит о справедливости сделанных ранее выводов даже для материалов с сильной анизотропией свойств.

Экспериментальная проверка влияния ширины на прогиб образца

Классические испытания на трехточечный изгиб проводили на образцах из тканого стеклопластика. В ходе эксперимента проверяли влияние ширины образца на прогиб. Для этого испытывали образец шириной 30 мм при различной нагрузке. Затем ширину образца уменьшали путем механической обработки и снова нагружали его силой, уменьшенной пропорционально изменению ширины. Испытания проводили при ширине образца 30, 15, 10 и 5 мм, длину пролета (100 мм) в ходе эксперимента не изменяли. Использование одного образца в серии испытаний необходимо для исключения влияния на прогиб таких случайных факторов, как локальные изменения модуля упругости, связанные с возможными дефектами и разориентацией волокон в различных образцах. Испытания проводили на машине INSTRON, входящей в перечень оборудования ЦКП ИМАШ РАН «Наукоемкие технологии создания машин будущего».

Таблица 4. Прогиб образцов при начальной нагрузке 100 Н**Table 4.** Deflection of specimens at an initial load of 100 N

w , мм	Прогиб, мм	Нагрузка, Н
30	0,48	100
15	0,47	50
10	0,45	33
5	0,47	17

Таблица 5. Прогиб образцов при начальной нагрузке 200 Н**Table 5.** Deflection of specimens at an initial load of 200 N

w , мм	Прогиб, мм	Нагрузка, Н
30	0,96	200
15	0,96	100
10	0,90	67

Результаты испытаний образцов с различной шириной приведены в табл. 4 и 5.

Полученные при различных нагрузках и ширинах образца значения прогиба показали несущественный разброс. Явного изменения прогиба не обнаружено при увеличении ширины образца даже в шесть раз при пропорциональном увеличении нагрузки. Разброс в значениях прогиба в пределах 5 % определяется неизбежными погрешностями измерений.

Выводы

Уточненные аналитические и численные расчеты привели к основному выводу: при определении модуля межслойного сдвига композитов через поправку к прогибу при испытаниях на изгиб прямоугольных балок с различной длиной пролета влиянием неоднородности касательных напряжений по ширине балки можно пренебречь. Таким образом, доказана корректность метода определения модуля межслойного сдвига на основе традиционной теории изгиба с учетом распределения касательных напряжений в форме Журавского – Тимошенко. Результаты испытаний композитных балок на трехточечный изгиб подтвердили отсутствие влияния ширины балки на определяемое значение модуля межслойного сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1988. — 272 с.
2. Полилов А. Н. Этюды по механике композитов. — М.: Физматлит, 2015. — 320 с. ISBN 978-5-9221-1617-6
3. Полилов А. Н., Татусь Н. А. Принципы совершенствования структуры композитных изделий, основанные на изучении биотехнологий и биоматериалов / Вестник МГСУ. 2021. Т. 16. № 9. С. 1191 – 1216. DOI: 10.22227/1997-0935.2021.9.1191-1216

4. Милейко С. Т., Колчин А. А., Галышев С. Н. и др. Новые композиты с металлической матрицей в Институте физики твердого тела РАН / Композиты и наноструктуры. 2020. Т. 12. № 3(47). С. 88 – 100.
DOI: 10.36236/1999-7590-2020-12-3-88-100
5. **Flora F., Pinto F., Meo M.** Manufacturing and Characterisation of a New Thermal Pre-Stressed Carbon Fibre-Reinforced Lattice Core for Sandwich Panels / *Journal of Composite Materials*. 2022. N 56(8). P. 1233 – 1254.
DOI: 10.1177/00219983211021659
6. **Полилов А. Н., Хохлов В. К.** Расчетный критерий прочности композитных балок при изгибе / *Машиноведение*. 1979. № 2. С. 53 – 57.
7. **Олегин И. П., Бурнышева Т. В., Лапердина Н. А.** Определение эффективных жесткостей однонаправленного слоя композита методом конечных элементов и по приближенным формулам / *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2021. Т. 87. № 3. С. 40 – 50.
DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-3-40-50
8. **Кривень Г. И., Лыкосова Е. Д.** Анализ прочности волокнистых композитов, модифицированных различными нановолокнами, в случае чистого сдвига вдоль волокна / *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2021. Т. 27. № 1. С. 125 – 142.
DOI: 10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.125_142.09
9. **Олейников А. И.** Варианты критерия прочности однонаправленных полимерных композитов по условию разрушения связующего при наличии сжатия перпендикулярно волокнам / *Прикладная математика и механика*. 2022. Т. 86. № 2. С. 223 – 234. DOI: 10.31857/S0032823522020102
10. **Sieberer S., Savandaiah C., LeBlhumer J., Schagerl M.** Shear Property Measurement of Additively Manufactured Continuous Fibre Reinforced Plastics by in-Plane Torsion Testing / *Additive Manufacturing*. 2022. Vol. 55. 102805.
DOI: 10.1016/j.addma.2022.102805
11. **Тарнопольский Ю. М., Кинцис Т. Я.** Методы статических испытаний армированных пластиков. Изд. 3-е. — М.: Химия, 1981. — 271 с.
12. **Паймушин В. Н., Газизуллин Р. К., Шишов М. А.** Мини- и микромасштабные плоские внутренние формы потери устойчивости элементов волокнистых композитов в условиях растяжения и сжатия / *Прикладная механика и техническая физика*. 2019. Т. 60. № 3(355). С. 173 – 185.
DOI: 10.15372/PMTF20190318
13. **Merzkirch M., Foecke T.** Investigation of the Interlaminar Shear Properties of Fiber-Reinforced Polymers via Flexural Testing Using Digital Image Correlation / *Materials Performance and Characterization*. 2020. Vol. 9(5).
DOI: 10.1520/MPC20190206
14. **Merzkirch M., Foecke T.** 10° off-Axis Testing of CFRP Using DIC: A Study on Strength, Strain and Modulus / *Composites Part B: Engineering*. 2020. Vol. 196. 108062.
DOI: 10.1016/j.compositesb.2020.108062
15. **Полилов А. Н.** Экспериментальная механика композитов: Учебное пособие для технических университетов. Изд. 2-е. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. — 375 с.
16. **Banat D.** Load-Carrying Capacity of the GFRP and CFRP Composite Beams Subjected to Three-Point Bending Test — Numerical Investigations / *Mechanics and Mechanical Engineering*. 2019. Vol. 23(1). P. 277 – 286.
DOI: 10.2478/mme-2019-0037
17. **Тимошенко С. П.** История науки о сопротивлении материалов (С краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений). — М.: ГИТТЛ, 1957. — 536 с.
18. **Малинин Н. Н.** Кто есть кто в сопротивлении материалов. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. — 248 с. ISBN 5-7038-1326-3
19. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
20. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. — М. — Л.: Гостехиздат, 1950. — 300 с.
21. **Лехницкий С. Г.** Кручение анизотропных и неоднородных стержней. — М.: Наука, 1971. — 240 с.
22. **Поляков В. Н., Жигун И. Г.** Контактная задача для балок из композиционных материалов / *Механика полимеров*. 1977. № 1. С. 63 – 74.
23. **Михеев В. П., Муранов А. Н., Гусев С. А.** Экспериментальное определение модуля межслойного сдвига слоистых углепластиков / *Конструкции из композиционных материалов*. 2015. № 4(140). С. 46 – 50.
24. **Жигун В. И., Плуме Э. З., Муйжниекс К. И., Краснов Л. Л.** Простые и надежные методы определения модулей сдвига конструкционных материалов / *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2019. Т. 25. № 4. С. 473 – 491. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2019.25.04.473_491.02
25. **Жигун В. И., Плуме Э. З., Муйжниекс К. И., Краснов Л. Л.** Универсальные методы определения модулей сдвига композиционных материалов / *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2020. Т. 26. № 3. С. 313 – 326. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2020.26.03.313_326.02
26. **Дударьков Ю. И., Лимонин М. В.** Определение напряжений поперечного сдвига в слоистом композите / *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2020. Т. 86. № 2. С. 44 – 53. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-2-44-53
27. **Фирсанов В. В.** Расчетные модели изгиба балки с учетом деформации сдвига / *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2020. Т. 26. № 1. С. 98 – 107. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2020.26.01.098_107.06
28. **Гусейнов К., Сапожников С. Б., Кудрявцев О. А.** Особенности испытаний на трехточечный изгиб для определения межслойного модуля сдвига слоистых композитов / *Механика композитных материалов*. Т. 58. № 2. С. 223 – 240. DOI: 10.22364/mkm.58.2.01

REFERENCES

1. **Vasiliev V. V.** Mechanics of Constructions from Composite Materials. — Moscow: Mashinostroenie, 1988. — 272 p. [in Russian].
2. **Polilov A. N.** Etudes on the Mechanics of Composites. — Moscow: Fizmatlit, 2015. — 320 p. ISBN 978-5-9221-1617-6 [in Russian].
3. **Polilov A. N., Tatus' N. A.** Experience Nature as a Basis for Building Strong Composite Structures / *Vestn. MGSU*. 2021. Vol. 16. N 9. P. 1191 – 1216 [in Russian].
DOI: 10.22227/1997-0935.2021.9.1191-1216
4. **Милейко С. Т., Колчин А. А., Галышев С. Н., et al.** New Metal Matrix Composites in Institute of Solid State Physics of RAS / *Kompoz. Nanostr.* 2020. Vol. 12. N 3(47). P. 88 – 100 [in Russian]. DOI: 10.36236/1999-7590-2020-12-3-88-100
5. **Flora F., Pinto F., Meo M.** Manufacturing and Characterisation of a New Thermal Pre-Stressed Carbon Fibre-Reinforced Lattice Core for Sandwich Panels / *Journal of Composite Materials*. 2022. N 56(8). P. 1233 – 1254.
DOI: 10.1177/00219983211021659
6. **Polilov A. N., Khokhlov V. K.** Calculation Criterion for the Strength of Composite Beams in Bending / *Mashinovedenie*. 1979. N 2. P. 53 – 57 [in Russian].
7. **Olegin I. P., Burnysheva T. V., Laperdina N. A.** Determination of the Effective Stiffness of a Unidirectional Layer by the Finite Element Method and Approximate Formulas / *Zavod. Lab. Diagn. Mater.* 2021. Vol. 87. N 3. P. 40 – 50 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-3-40-50
8. **Kriven G. I., Lykosova E. D.** Strength Analysis of Fiber Composites Modified with Various Nanofibers in the Case Of Pure Shear Along the Fiber / *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.* 2021. Vol. 27. N 1. P. 125 – 142 [in Russian].
DOI: 10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.125_142.09
9. **Oleinikov A. I.** Strength Criterion Variants of Polymeric Unidirectional Composites by Inter-Fibre Fracture Conditions with there is a Transverse Compression / *Prikl. Matem. Mekh.* 2022. Vol. 86. N 2. P. 223 – 234 [in Russian].
DOI: 10.31857/S0032823522020102
10. **Sieberer S., Savandaiah C., LeBlhumer J., Schagerl M.** Shear Property Measurement of Additively Manufactured Continuous Fibre Reinforced Plastics by in-Plane Torsion Testing /

- Additive Manufacturing. 2022. Vol. 55. 102805. DOI: 10.1016/j.addma.2022.102805
11. **Tarnopolsky Yu. M., Kintsis T. Ya.** Methods for Static Testing of Reinforced Plastics. 3rd edition. — Moscow: Khimiya, 1981. — 271 p. [in Russian].
 12. **Paimushin V. N., Gazizullin R. K., Shishov M. A.** Flat Internal Buckling Modes of Fibrous Composite Elements under Tension and Compression at the Mini- and Microscale / Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. Vol. 60. N 3. P 548 – 559. DOI: 10.1134/S0021894419030180
 13. **Merzkirch M., Foecke T.** Investigation of the Interlaminar Shear Properties of Fiber-Reinforced Polymers via Flexural Testing Using Digital Image Correlation / Materials Performance and Characterization. 2020. Vol. 9(5). DOI: 10.1520/MPC20190206
 14. **Merzkirch M., Foecke T.** 10° off-Axis Testing of CFRP Using DIC: A Study on Strength, Strain and Modulus / Composites Part B: Engineering. 2020. Vol. 196. 108062. DOI: 10.1016/j.compositesb.2020.108062
 15. **Polilov A. N.** Experimental Mechanics of Composites. Textbook for Technical Universities. 2nd edition. — Moscow: MSTU im. N. E. Bauman, 2018. — 375 p. [in Russian].
 16. **Banat D.** Load-Carrying Capacity of the GFRP and CFRP Composite Beams Subjected to Three-Point Bending Test — Numerical Investigations / Mechanics and Mechanical Engineering. 2019. Vol. 23(1). P 277 – 286. DOI: 10.2478/mme-2019-0037
 17. **Timoshenko S. P.** History of Strength of Materials. — McGraw-Hill, 1953. — 452 p.
 18. **Malinin N. N.** Who is Who in Strength of Materials. — Moscow: MSTU im. N. E. Bauman, 2000. — 248 p. ISBN 5-7038-1326-3 [in Russian].
 19. **Rabotnov Yu. N.** Mechanics of a Deformable Solid Body. 2nd edition. — Moscow: Nauka, 1988. — 712 p. [in Russian].
 20. **Lekhnitsky S. G.** Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. — Moscow – Leningrad: Gostekhizdat, 1950. — 300 p. [in Russian].
 21. **Lekhnitsky S. G.** Torsion of Anisotropic and Inhomogeneous Rods. — Moscow: Nauka, 1971. — 240 p. [in Russian].
 22. **Polyakov V. N., Zhigun I. G.** Contact Problem for Composite Beams / Mekh. Polimerov. 1977. N 1. P 63 – 74 [in Russian].
 23. **Miheev V. P., Muranov A. N., Gusev S. A.** Experimental Definition of the Module of Interlayered Shift of the Layered Carbon Fibre Reinforced Plastic / Konstr. Kompoz. Mater. 2015. N 4(140). P 46 – 50 [in Russian].
 24. **Zhigun V. I., Plume E. Z., Mujzhnieks K. I., Krasnov L. L.** Simple and Reliable Methods for Determining the Shear Moduli of Structural Materials / Mekh. Kompoz. Mater. Konstr. 2019. Vol. 25. N 4. P 473 – 491 [in Russian]. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2019.25.04.473_491.02
 25. **Zhigun V. I., Plume E. Z., Mujzhnieks K. I., Krasnov L. L.** Universal Methods for Determining the Shear Modules of Composite Materials / Mekh. Kompoz. Mater. Konstr. 2020. Vol. 26. N 3. P 313 – 326 [in Russian]. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2020.26.03.313_326.02
 26. **Dudarkov Y. I., Limonin M. V.** Determination of the transverse shear stress in layered composites / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2020. Vol. 86. N 2. P 44 – 53 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-2-44-53
 27. **Firsanov V. V.** Computational Models of Beam Bending Taking into Account Shear Deformation / Mekh. Kompoz. Mater. Konstr. 2020. Vol. 26. N 1. P 98 – 107 [in Russian]. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2020.26.01.098_107.06
 28. **Guseinov K., Sapozhnikov S. B., Kudryavtsev O. A.** Features of Three-Point Bending Tests for Determining out-of-Plane Shear Modulus of Layered Composites / Mechanics Of Composite Materials. 2022. Vol. 58. N 2. P 155 – 168. DOI: 10.1007/s11029-022-10020-7