

Математические методы исследования

УДК 519.28

ГИПОТЕЗА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОСТИ: МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

© Ю. Д. Григорьев¹*Статья поступила 15 мая 2015 г.*

На примере различных подходов к проверке статических гипотез обсуждаются некоторые методологические аспекты проверки гипотезы экспоненциальности. Рассмотрены примеры, показывающие, что различные критерии экспоненциальности, основанные на одних и тех же данных, могут приводить к противоположным выводам. В связи с этим подчеркивается важная роль таких важных факторов анализа данных, как инженерный анализ, сравнительные характеристики мощности и асимптотической эффективности критериев. Отмечаются методологические особенности процедуры статистического моделирования, в том числе ее ограниченность в плане получения обобщающих выводов на основе частных результатов.

Ключевые слова: гипотеза экспоненциальности; статистика критерия; статистическое моделирование; мощность критериев; асимптотически оптимальная эффективность; методологические принципы.

Экспоненциальное распределение — одно из наиболее востребованных в статистике после нормального распределения. Оно играет важную роль в таких областях, как теория надежности, анализ данных типа времени жизни и др. (см., например, [1 – 4]). Поэтому, как и в работе [5], возникает закономерный вопрос — а так ли часто оно на самом деле встречается на практике и не является ли идеализацией, призванной лишь облегчить обработку экспериментальных данных?

Именно стремлением к этой идеализации объясняется наличие большого числа критериев и вообще подходов к проверке гипотезы экспоненциальности. На этом пути возникает много методологических трудностей как с инженерной, так и с чисто математической точек зрения. Обсуждению этих трудностей посвящен, в частности, раздел 4.2 в монографии [2, с. 241 – 253]. В любом случае следует помнить, что ни один из аспектов — инженерный или математический — не следует применять изолированно один от другого. При обработке реальных данных они должны дополнять друг друга.

Инженерный аспект анализа данных, включающий в себя графический анализ функций интенсивности отказов, риска и надежности, различных выборочных моментов, коэффициентов и квантилей, в статье не рассматривается, поскольку основное внимание уделено математической стороне вопроса.

Цель данной работы — описание процедур выбора критериев для проверки гипотезы экспоненциаль-

ности, вопросов вычисления мощности и асимптотической эффективности соответствующих критериев, освещение вычислительных аспектов, связанных с применением статистического моделирования, и выработка на основе рассмотренных примеров рекомендаций по выбору критериев экспоненциальности.

В последние годы предложено множество критериев проверки экспоненциальности в тех или иных непараметрических классах распределений. Первые же критерии экспоненциальности появились, по-видимому, в середине двадцатого века (критерии Гринвуда [6], Морана [7] и ряд других).

В настоящее время регулярно появляются обзорные работы, где систематизируются методы построения и исследования критериев экспоненциальности [8 – 11]. Имеются даже два справочника, посвященные экспоненциальному распределению и родственным с ним распределениям [12, 13], в которых описан ряд критериев экспоненциальности. Более подробные библиографические данные обычно приводятся в диссертациях, посвященных исследованиям критериев экспоненциальности (см., например, [14 – 16]).

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — повторная выборка, т.е. набор независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.), имеющих функцию распределения (ф.р.) F . Требуется на основании выборки X проверить сложную гипотезу $H_0: F = F_0 \equiv \exp(\lambda)$, где

$$\exp(\lambda) = \{F: F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \lambda > 0, x \geq 0\} \quad \text{—}$$

семейство экспоненциальных распределений с неизвестным параметром масштаба λ . Альтернативная

¹ Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет («ЛЭТИ»), г. Санкт-Петербург, Россия;
e-mail: yur_grigoriev@mail.ru

гипотеза H_1 состоит в том, что F не принадлежит классу $\{\exp(\lambda), \lambda > 0\}$. Иногда класс альтернатив сужается, например, до конкретного распределения с известными параметрами, класса альтернатив с возрастающей или убывающей функциями интенсивности (ВФИ или УФИ) отказов $h(x) = F'(x)/[1 - F(x)]$, до так называемых L -, M - и LM -классов [17–19], и т.д. Аналогично вводятся некоторые классы статистик для проверки гипотезы H_0 , что позволяет с единых позиций рассматривать свойства различных критериев.

Классические критерии проверки гипотез, обычно излагаемые в учебниках, редко имеют удобный для вычислений вид и не всегда являются оптимальными против конкретных альтернатив. Поэтому на практике обычно стремятся к использованию таких критериев, статистики, квантили и мощности которых против конкретных альтернатив легко вычисляются. Чтобы оценить преимущества и недостатки классических и новых критериев, в статье рассмотрены оба связанных с ними подхода.

Классический подход

Рассмотрение задачи проверки H_0 начнем с классических критериев Неймана – Пирсона, Вальда, Рао [20, с. 370]. Отметим, что близкая к проверке гипотез задача доверительного оценивания на основе статистик Неймана – Пирсона и Кульбака – Лейблера рассматривалась также в статье [21].

В качестве альтернативы H_1 выберем семейство распределений Вейбулла

$$We(\theta) = \{F: F(x, \theta) = 1 - e^{-\lambda x^k}, \\ \theta = (k, \lambda), x \geq 0, k > 0, \lambda > 0\}.$$

В этом случае гипотеза экспоненциальности равносильна гипотезе $H_0 = \{k = 1\}$ при мешающем параметре масштаба λ .

Логарифм функции правдоподобия для $X \in We(\theta)$ имеет вид

$$\log L = n \log k + kn \log \lambda + (k-1) \sum \log X_i - \lambda^k \sum X_i^k. \quad (1)$$

Из условий

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \log L}{\partial k} = 0$$

получим $\hat{\lambda} = \bar{X}^{-1/k}$, а $\hat{k}$ найдем как решение уравнения

$$\frac{n}{k} + \sum \log X_i - \frac{n \sum X_i^k \log X_i}{\sum X_i^k} = 0. \quad (2)$$

Используя функцию правдоподобия (1), определим наблюдаемую в эксперименте информационную матрицу

$$L_{\alpha\beta}(\theta) = -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_\alpha \partial \theta_\beta} = \begin{pmatrix} L_{kk} & L_{k\lambda} \\ L_{\lambda k} & L_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} \quad (3)$$

с элементами

$$L_{kk} = \frac{n}{k^2} + \sum (\lambda X_j)^k [\log(\lambda X_j)]^2,$$

$$L_{k\lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \lambda^{k-1} (1 + k \log \lambda) \sum X_j^k + k \lambda^{k-1} \sum X_j^k \log X_j,$$

$$L_{\lambda\lambda} = \frac{kn}{\lambda^2} + k(k-1) \lambda^{k-2} \sum X_j^k.$$

Очевидно, $M_{\alpha\beta} + ML_{\alpha\beta}$ является информационной матрицей Фишера.

Критерий Неймана – Пирсона [20, с. 369]. Статистика данного критерия как функция k имеет вид $T_{NP}(X) = 2[\log L(\theta) - \log L(\theta_0)]$. Однако в нашем случае вектор θ содержит мешающий параметр λ , гипотезу относительно которого мы не рассматриваем. Вместо λ мы сразу подставим в статистику $T_{NP}(X)$ его оценку $\hat{\lambda}$, т.е. будем полагать $\theta = (k, \hat{\lambda})$, $\theta_0 = (k_0, \hat{\lambda})$. Поэтому можно записать

$$T_{NP}(k) = 2[\log L(k, \hat{\lambda}) - \log L(k_0, \hat{\lambda})] = \\ = 2 \left\{ n \log \frac{k}{k_0} + (k - k_0) \sum \log \frac{X_i}{\bar{X}} + \right. \\ \left. + \sum \left(\frac{X_i}{\bar{X}} \right)^{k_0} \left[1 - \left(\frac{X_i}{\bar{X}} \right)^{k - k_0} \right] \right\}. \quad (4)$$

Функцию $\log L(k, \hat{\lambda})$ в статистике иногда называют профильным логарифмом правдоподобия для k .

Асимптотически $T_{NP}(X)$ при $k = \hat{k}$ имеет χ^2 -распределение с одной степенью свободы. Поэтому соответствующая область принятия гипотезы H_0 имеет вид

$$X_{0\alpha} = \{k: T_{NP}(X) \leq \chi_1^2(1 - \alpha)\}, \quad (5)$$

где $\chi_1^2(1 - \alpha)$ — верхняя $(1 - \alpha)100\%$ -ная точка χ_1^2 -распределения. Уравнение $T_{NP}(X) = \chi_1^2(1 - \alpha)$, имеющее два корня — k_1 и k_2 ($k_1 < k_2$), дает область $X_{0\alpha} = (k_1, k_2)$.

Критерий Вальда [20, с. 369]. Статистика критерия в общем случае имеет вид $T_W(X) = (\hat{\theta} - \theta_0)^T M(\hat{\theta})(\hat{\theta} - \theta_0)$. Положим $D_{\alpha\beta} = (M^{-1})_{\alpha\beta}$. Поскольку в нашем случае параметр λ является мешающим, то статистика $T_W(X)$ трансформируется к виду

$$T_W(X) = (\hat{k} - k_0)^T D_{kk}^{-1}(\hat{k}, \hat{\lambda})(\hat{k} - k_0), \quad (6)$$

где

$$D_{kk}^{-1}(\hat{k}, \hat{\lambda}) = L_{kk} - \frac{L_{k\lambda}^2}{L_{\lambda\lambda}} \quad (7)$$

наблюдаемая в эксперименте информационная матрица (в данном случае 1-го порядка) для основно-

го параметра k . В случае, когда основной параметр $k \in R^l$ имеет размерность $l \geq 2$, матрица (3) в модели с мешающим параметром $\lambda \in R^m$ определяется не как главный минор L_{11} блочной матрицы $L(\theta) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21}^T \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$ порядка $l + m$, а по формуле Фробениуса $L(k) = L_{11} - L_{21}^T L_{22}^{-1} L_{21}$ (см. [22, с. 21]), откуда при $l = m = 1$ и следует (7).

Так как при $n \rightarrow \infty$ статистика $T_W(X)$ также распределена как χ_1^2 , то область $X_{0\alpha}$ в данном случае аналогична (5) с заменой $T_{NP}(k)$ на $T_W(k)$. С другой стороны, $X_{0\alpha}$ можно представить и как симметричный интервал:

$$X_{0\alpha} = (\hat{k} - \hat{\sigma} u_{1-\alpha/2}, \hat{k} + \hat{\sigma} u_{1-\alpha/2}), \quad (8)$$

где $\hat{\sigma} = D_{kk}^{-1/2}(\hat{k})$ и $\Phi(u_{1-\alpha/2}) = -\Phi(u_{1-\alpha/2}) = \alpha/2$, $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей. Если интервал (8) покрывает $k_0 = 1$, т.е. $k_0 \in X_{0\alpha}$, то гипотеза H_0 не отклоняется.

Критерий Рао (score test) [20, с. 369]. Обозначим

$$V_0 = \frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}, \quad \theta \in R^m, \quad m \geq 1, \quad U_i = \frac{X_i}{\bar{X}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Статистика критерия Рао имеет вид $T_R(X) = V_0^T M^{-1}(\theta_0) V_0$, т.е. не требует вычисления оценки $\hat{\theta}$. Как и в предыдущих случаях, $\theta_0 = (k_0, \hat{\lambda}) \in R^2$, где k — основной, а λ — мешающий параметры. Отсюда получаем

$$T_R(X) = V_0^2 \left(L_{kk} - \frac{L_{k\lambda}^2}{L_{\lambda\lambda}} \right)^{-1} \Big|_{k=k_0, \lambda=\hat{\lambda}} = V_0^2 \left(\frac{H_1}{H_2} \right)^{-1}, \quad (9)$$

где

$$V_0 = \frac{\partial \log L(k, \hat{\lambda})}{\partial k} = \frac{n}{k} + \sum (1 - U_i^k) \log U_i,$$

$$H_1 = (k-1)n^2 + [k(a-n) +$$

$$+ (1-2k)n]a + k_2[(a-n)(b+2c) - (ab-c^2)],$$

$$H_2 = k_2[(a-n) - k],$$

$$a = \sum U_i^k, \quad b = \sum U_i^k (\log U_i)^2, \quad c = \sum U_i^k \log U_i.$$

Рассматривая $T_R(X)$ как функцию k , получим уравнение $T_R(k) = 3,841$. Его корни k_1 и k_2 дают область $X_{0\alpha} = (k_1, k_2)$.

Пример 1 [2, с. 249]. Имеются данные об $n = 10$ первых отказах $N = 100$ изделий, поставленных на испытание в предположении, что новые элементы вместо отказавших на испытание не ставятся. Пусть t_i — моменты отказов, $X_i = (N - i + 1)(t_i - t_{i-1})$ — суммарные наработки на отказ. Результаты испытаний представлены в табл. 1. Пусть $X_i \in \{We(k, \lambda)\}$. Согласно табл. 1 получаем $\hat{k} = 1,3666$, $\hat{\lambda} = 1 / \bar{X} = 0,04054$. Пусть $\alpha = 0,95$, $\chi_1^2(0,95) = 3,841$ — верхняя 95 %-я квантиль χ_1^2 -распределения.

Критерий $T_{NP}(X)$. Решая уравнение (4) с правой частью, равной $\chi_1^2(0,95)$, находим корни $k_1 = 0,7712$, $k_2 = 1,9456$. Поскольку $\hat{k} \in (k_1, k_2)$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Критерий $T_W(X)$. Используя оценки $\hat{k}$ и $\hat{\lambda}$, согласно (7) получаем $D_{kk}^{-1}(\hat{k}, \hat{\lambda}) = 7,5678$. Так как уравнение $(k-1)^2 D_{kk}^{-1} = 3,841$ дает интервал $X_{0\alpha} = (0,2876, 1,7124)$ и $\hat{k} \in X_{0\alpha}$, то гипотеза H_0 не отвергается. Аналогичный результат получаем, полагая $\hat{\sigma} = D_{kk}^{1/2}(\hat{k}, \hat{\lambda}) = 0,3635$, $u_{0,975} = \sqrt{0,3841} = 1,9598$, где $u_{0,975}$ — квантиль нормального распределения. Тогда $X_{0\alpha} = (\hat{k} \pm \hat{\sigma} u_{0,975}) = (0,6541, 2,0791)$ — интервал, который покрывает точку $k = 1$.

Критерий $T_R(X)$. Решая уравнение (9) с правой частью 3,841, находим корни $k_1 = 0,6862$, $k_2 = 1,6931$. Поскольку $k_0 = 1 \in (k_1, k_2)$, то гипотеза $H_0 = \{k_0 = 1\}$ не отвергается. Отметим, что в отличие от двух предыдущих случаев статистика $T_R(X) \geq 0$ как функция k_0 определена только при $k_0 \in (0, 2)$, при этом она достигает минимума, равного нулю, в точке $k_0^* = 1,3177$.

Если сравнить длины интервалов $\Delta = k_2 - k_1$ для рассмотренных критериев, то получим $\Delta_{NP} = 1,1743$, $\Delta_W = 1,4248$, $\Delta_R = 1,0070$. Так как длина Δ_R минимальна, то это говорит в пользу предположения Рао о том, что его критерий локально более мощный, чем два остальных [20, с. 370].

Таблица 1. Числовые данные к примеру 1

Данные	i									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	3	10	20	34	48	70	108	147	204	264
X_i	300	693	980	1358	1344	2090	3572	3627	5244	5460
U_i	0,122	0,281	0,397	0,551	0,545	0,847	1,448	1,470	2,126	2,213

Примечание. Здесь $n = 10$, t_i — моменты отказов, $X_i = (100 - i + 1)(t_i - t_{i-1})$, $\bar{X} = 2466,8$, $U_i = X_i / \bar{X}$, $i = 1, \dots, 10$.

Критерии согласия, свободные от масштаба

Обратим внимание на то, что критерий Рао (9) отличается от (4) и (6) тем, что полностью определяется случайными величинами $\{U_i\}_{i=1}^n$, в то время как два остальных критерия этим свойством не обладают.

В настоящее время большое внимание в литературе сосредоточено на построении критериев экспоненциальности с использованием именно этих случайных величин (с.в.). Предложенное число соответствующих критериев не поддается точной оценке, однако в любом случае их существует несколько десятков. В связи с этим, как уже отмечалось, для них выработаны классификации, позволяющие использовать общие подходы для их исследования.

Так, в работе [15] предложено разделение критериев экспоненциальности, свободных от масштаба, на три группы. Статистики критериев первой группы имеют вид $T_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n r(U_i)$, где r — некоторая функция, заданная на положительной полуоси. Соответствующие примеры представлены в табл. 2 (первая строка).

Введем дополнительные обозначения. Пусть $X_{(i)}$ — i -я порядковая статистика выборки X . Например, если $X = (5, 4, 3, 2, 6)$, то $X_{(1)} = 2$, $X_{(2)} = 3$, $X_{(3)} = 4$, $X_{(4)} = 5$, $X_{(5)} = 6$, т.е. это те же элементы выборки, но расположенные в порядке возрастания, при этом они получают новые номера, указанные в круглых скобках. Далее также положим $U_{(i)} = X_{(i)} / \bar{X}$.

Вторая группа содержит нормированные L -статистики, т.е. линейные комбинации порядковых статистик $U_{(i)}$ вида $T_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n w_i U_{(i)}$, где w_i — некоторые коэффициенты. К этой группе относятся статистики, представленные во второй строке табл. 2, при этом в

качестве статистики Джини рассматривается ее центрированный вариант $T_n = G_n - 1/2$.

В третью группу входят критерии вида $T_n = \sup_{x \geq 0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r(U_i, x)$, где $r(s, x)$ — функция, определенная на первом квадранте. Сюда относятся критерии Лилефорса [32, 33], Барингхауза – Хенце [34], а также их взвешенные варианты. Они тесно связаны с критериями согласия типа Колмогорова – Смирнова [35, 36]. Далее мы их не рассматриваем.

Классификация [15] не охватывает все виды существующих критериев, свободных от масштаба. Некоторые из них представлены в табл. 3. Однако и здесь часть статистик при внимательном рассмотрении обнаруживает непосредственную связь с классификацией [15]. Например, это касается статистик Шапиро – Уилка и Бартлетта, которые с точностью до множителя и после соответствующего центрирования могут быть отнесены к первой группе.

Отметим также, что многие критерии экспоненциальности как в табл. 2, так и в табл. 3 тесно связаны с мерами неравенства и разнообразия, используемыми в экономике и социологии [36, с. 416 – 421]. К их числу относятся критерии Морана (мера Сена $\phi(x) = \sqrt{n^{-1} \sum \log^2 \frac{x_i}{\bar{x}}}$, Гринвуда (мера равенства по Дальтону $\phi(x) = n^{-1} \sum \frac{g(x_i)}{g(\bar{x})}$, где g — вогнутая функция), Джини (индекс Джини как удвоенная площадь между кривой Лоренца и диагональю квадрата), Кокса – Оукса [энтропия $\phi(x) = -\sum x_i \log x_i$], а также критерии Шермана (близок к коэффициенту Шутца) и Стивенса (основан на использовании выборочной дисперсии).

Таблица 2. Статистики $T_n(X)$ для проверки гипотезы экспоненциальности согласно классификации [15]

Группа критериев		Статистики	
1	Кокс – Оукс [4]: $1 + \frac{1}{n} \sum (1 - U_i) \log U_i$	Гринвуд [6]: $2 - \frac{1}{n} \sum U_i^2$	Моран [7]: $\frac{1}{n} \sum \log U_i + C$
2	Джини [25]: $\frac{1}{n} \sum p_i U_{(i)}$	Джексон [29]: $\frac{1}{n} \sum q_i U_{(i)}$	Фортиана – Гране [31]: $\frac{1}{n} \sum \omega_i U_{(i)}$

Примечание. Здесь $U_i = X_i / \bar{X}$, $C = -\Gamma'(1) = 0,5772$ — постоянная Эйлера; $p_i = \frac{2(i-1)}{n-1} - \frac{3}{2}$; $q_i = MX_{(i)} = \frac{1}{n-i+1}$; $\omega_i = (n-i) \log(n-i) - (n-i+1) \log(n-i+1) + \log n$.

Таблица 3. Некоторые статистики $T_n(X)$, не охватываемые классификацией [15]

Гнеденко [2, с. 249]: $\frac{n-r}{r} \frac{V_r}{1-V_r}, V_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r U_i$	Шерман [23]: $\frac{1}{2n} \sum U_i - 1 $	Шапиро – Уилк [24]: $\frac{1}{n} \sum (U_i - 1)^2$
Бартлетт [26]: $\frac{2}{1 + (n+1)/6n} \sum \log U_i$	Эппс – Пулли [27]: $\sqrt{48n} \left(\frac{1}{n} \sum e^{-U_i} - \frac{1}{2} \right)$	Стивенс [28]: $\frac{1}{\sum U_i^2 + n^{-1} \sum (U_i^2 - 1)}$

Другие критерии

В методическом аспекте задача проверки статистических гипотез является нетривиальной в том смысле, что использование одних критериев приводит к принятию гипотезы H_0 , а других — к ее отклонению. Это наглядно показывают следующие три критерия, не охваченные приведенной выше классификацией.

Пусть $X_i \in \exp(\lambda)$. Поскольку плотность χ^2 -распределения с n степенями свободы имеет вид $g(x) = [2n/2\Gamma(n/2)]^{-1}x^{n/2-1}e^{-x/2}$, то при $n=2$ получаем $g(x) = (1/2)e^{-x/2}$. Это означает, что с.в. $Y_i = 2\lambda X_i$, $i = 1, \dots, n$ имеют χ^2 -распределения с двумя степенями свободы, а сумма k таких независимых с.в. — χ^2 -распределение с $2k$ степенями свободы.

Положим $n = r + s$. Тогда с.в.

$$T_n(r, n-r) = \frac{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r X_i}{\frac{1}{n-r} \sum_{i=r+1}^n X_i}, \quad 0 < r < n, \quad (10)$$

имеет F -распределение с $\nu_1 = 2r$ и $\nu_2 = 2n - 2r$ степенями свободы. Очевидно, $T_n(r, n-r)$ совпадает с F -статистикой Гнеденко, представленной в табл. 3. В качестве $T_n(X)$ далее рассмотрим статистику

$$T_n(X) = \max\{T_n(r, s), T_n^{-1}(r, s)\}. \quad (11)$$

Одним из способов проверки экспоненциальности является использование характеристических свойств экспоненциально распределенных случайных векторов и их преобразований. В статье [36] предложено преобразование вектора независимых с.в. X_j вида

$$Y_r = \sum_{j=1}^r X_j \bigg/ \sum_{j=1}^{r+1} X_j, \quad r = 1, \dots, n-1, \quad (12)$$

при этом с.в. Y_r остаются взаимно независимыми и подчиняются B -распределению

$$P(Y_r < x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \quad (13)$$

с параметрами $a = r$, $b = 1$, т.е. $P\{Y_r < x\} = x^r$, $0 \leq x \leq 1$. Отсюда следует, что с.в. $Z_r = Y_r^r$, $r = 1, \dots, n-1$, равномерно распределены на $[0, 1]$.

Положим $m = n - 1$. Для проверки равномерности распределения координат вектора $\{Z_r\}_{r=1}^m$ можно применить критерий Колмогорова $\{\sqrt{m}D_m > \lambda_\alpha(m)\}$, определяемый статистикой [39, с. 81]

$$D_m = \max_{0 \leq x \leq 1} |F_m(x) - x| = \max\{D_m^+, D_m^-\},$$

где

$$D_m^+ = \max_{1 \leq k \leq m} \left[\frac{k}{m} - Z_{(k)} \right]; \quad D_m^- = \min_{1 \leq k \leq m} \left[Z_{(k)} - \frac{k-1}{m} \right],$$

$\lambda_\alpha(m)$ — квантиль распределения $K_m(x)$, предельным для которого при $m \rightarrow \infty$ является распределение Колмогорова $K(x)$. Отсюда видим, что так как элементы вектора $\{Z_{(r)}\}_{r=1}^m$, играющие роль значений аргумента x при построении критерия, расположены по возрастанию, то эмпирическая функция распределения $F_m(x)$ выражается равенством

$$F_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq Z_{(1)}, \\ k/m, & \text{если } Z_{(k)} < x < Z_{(k+1)}, 1 \leq k \leq m-1, \\ 1, & \text{если } x > Z_{(m)}. \end{cases}$$

Если при заданном значении α оказывается, что $\sqrt{m}D_m > \lambda_\alpha(m)$, то гипотеза экспоненциальности отвергается.

Стремясь использовать преобразование Большева (12) в замкнутой форме, Ванг и Чанг [40] предложили на его основе статистику

$$WC_n = -2 \sum_{r=1}^{n-1} \log g(Y_r), \quad (14)$$

где

$$g(Y_r) = \begin{cases} 2Y_r, & 0 \leq Y_r \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-Y_r), & \frac{1}{2} \leq Y_r \leq 1. \end{cases}$$

Статистика (14) имеет χ^2 -распределение с $f = 2(n-1)$ степенями свободы.

Пусть с.в. $X_i = t_i - t_{i-1}$ и $Y_i = (n-i+1)X_i$, $t_0 = 0$, $i = 1, \dots, r$ те же, что и в критериях Гнеденко и Большева с той лишь разницей, что в данном случае $N = n$ (нет цензурирования). Определим статистику $T_n(X)$ как количество пар $i < j$, для которых $Y_i > Y_j$, причем в случае равенства указанных величин к величине $T_n(X)$ прибавляется $1/2$. Таким образом,

$$T_n(X) = V_{1n} + V_{2n}, \quad (15)$$

где

$$V_{1n} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n 1_{\{s_i > s_j\}}, \quad V_{2n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n 1_{\{s_i = s_j\}}.$$

При справедливости гипотезы об экспоненциальности интервалов между отказами среднее и дисперсия с.в. V_n составляют [1, с. 328]

$$a = MT_n(X) = \frac{n(n-1)}{4}, \quad \sigma^2 = DT_n(X) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}.$$

При справедливости гипотезы H_0 статистика $T_n(X)$ распределена асимптотически нормально. Таким образом, критерий Прошана заключается в отклонении гипотезы H_0 и принятии H_1 , если $T_n(X)$ превышает некоторое критическое значение, зависящее от n .

Пример 2 (продолжение примера 1). Пусть выборка X та же, что и в примере 1, следовательно, $n = 10$.

F -критерий Гнеденко. Пусть $r = 5$, $s = n - r = 5$, $\alpha = 0,05$. Тогда $T_n(5,5) = 0,2338$, $T_n^{-1}(5,5) = 4,2765$. Поскольку $F_{0,95}(10,10) = 2,9782$ [38, с. 209] и $4,2765 > 2,9782$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Преобразование Большевца. Согласно преобразованию Большевца (12) при $n = 10$ получаем $Z = (Y_r^r)_{r=1}^9 = (0,3021, 0,2533, 0,2078, 0,2577, 0,1576, 0,0786, 0,1218, 0,0780, 0,0866)$. Отсюда $D_9 = \max\{D_9^+, D_9^-\} = \{0,6979, 0,0780\} = 0,6979$. Поскольку $\lambda_{0,05}(9) = 0,4300$, то гипотеза H_0 отклоняется. Однако статистика Ванг – Чанга $WC_9 = 21,1157$, имеющая согласно (14) 18 степеней свободы, удовлетворяет неравенствам $10,865 = \chi_{18}^2(0,1) < WC_9 < \chi_{18}^2(0,9) = 25,989$, т.е. H_0 не отклоняется даже при размере критерия $\alpha = 0,2$.

Критерий Прошана. В табл. 4 представлены данные к критерию Прошана (15). Отсюда получаем $T_{10}(X) = 1$, $a = 22,5$, $\sigma^2 = 31,25$. Таким образом, доверительный интервал для числа инверсий $T_{10}(X)$ имеет вид $(a \pm \sigma u_{0,975}) = (11,5438, 33,4562)$, где $u_{0,975} = 1,9599$ — квантиль нормального распределения. Следовательно, гипотеза H_0 отвергается.

Таким образом, использование данной группы критериев позволяет получить результат, противоположный тому, что дают критерии Неймана – Пирсона, Вальда и Рао в примере 1. Требуется дополнительные сведения о критериях, связанные с их мощностью или асимптотической эффективностью. Свою роль здесь должны также сыграть дополнительный анализ каких-либо характеристических свойств экспоненциального распределения (скажем, близость выборочного коэффициента вариации к единице), графическое представление функции интенсивности отказов $h(x)$ на основе выборочных данных, и т.п.

Статистическое моделирование

Вычисление квантилей распределений по методу Монте-Карло — обычная и необходимая практика. Во многих статьях, посвященных гипотезе экспоненциальности, приводятся их обширные таблицы (см., например, [24, 25, 28]). Конечно, этот способ не дает той точности вычислений, которая достигается при аналитическом подходе (см., например, таблицы [39]), но для практических целей и для высказывания тех или иных теоретических предположений она, как правило, оказывается достаточной.

В качестве примера, позволяющего оценить точность моделирования квантилей, рассмотрим статистику Джини G_n . Ее выражение, представленное в табл. 2, запишем в более удобном для моделирования виде [25]

$$G_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)[U_{(i+1)} - U_{(i)}]. \quad (16)$$

Известны точное выражение ф.р. $F(x)$ статистики (16) и ее квантили. Для $n = 3, \dots, 10$ квантили представлены в левой части табл. 5. В ее правой части для сравнения приведены квантили, полученные методом моделирования. Поскольку G_n симметрична относительно точки $x = 0,5$, то квантили u_α нижнего «хвоста» распределения $F(x)$ вычисляются согласно равенству $u_\alpha = 1 - u_{1-\alpha}$.

Сравнение левой и правой частей табл. 5 показывает, что при данном количестве испытаний квантили вычисляются хотя и достаточно точно, но все-таки с заметной погрешностью. Вопросы точности статистического моделирования заслуживают отдельного рассмотрения. В краткой формулировке они затрагиваются, например, в работах [41, с. 75 – 84; 42].

Таблица 4. Числовые данные к критерию Прошана

Данные	i									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	3	10	20	34	48	70	108	147	204	264
X_i	3	7	10	14	14	22	38	39	57	60
Y_i	297	686	970	1344	1330	2068	3534	3588	5187	5400

Примечание. Здесь t_i — моменты отказов; $X_i = t_i - t_{i-1}$ — интервалы между отказами; $Y_i = (100 - i + 1)(t_i - t_{i-1})$ — наработки на отказ.

Таблица 5. Квантили статистики Джини (16)

n	Точные значения [25]			Моделированные значения		
	0,950	0,975	0,990	0,950	0,975	0,990
5	0,73834	0,77997	0,82501	0,73535	0,77820	0,82184
10	0,65855	0,68768	0,72070	0,65781	0,68610	0,72167
15	0,62704	0,65076	0,67792	0,62839	0,65037	0,67745
20	0,60902	0,62952	0,65308	0,60969	0,63042	0,65480

Примечание. $N = 10\,000$ — количество испытаний; $\alpha = 0,05, 0,025, 0,01$ — размер критерия; n — объем выборки.

Алгоритмы моделирования н.о.р.с.в. хорошо изучены и в ряде случаев достаточно легко реализуемы. В нашем случае для этого используются инверсии экспоненциального и Вейбулла распределений (метод обратной функции). Для моделирования гамма распределенных с.в., в том числе χ^2 -распределенных, обычно применяется процедура суммирования экспоненциально распределенных с.в.

С методологической точки зрения статистическое моделирование весьма обманчиво. С одной стороны, это универсальный способ вычисления квантилей и мощности практически любых критериев, с другой — этот способ исследования ограничен в том смысле, что не позволяет делать точных аналитических заключений. Всякий раз попытка выполнить индукционный шаг, т.е. перейти от частного к общему, должна быть поддержана выводами точной теории.

Мощность критериев

Пусть $\mathfrak{Z}$ — множество всех возможных значений статистики T_n , $X_{1\alpha} = \mathfrak{Z} \setminus X_{0\alpha}$. При обилии имеющихся критериев для проверки гипотезы H_0 следует отдать какому-либо из них предпочтение. Для этого требуется вычислять мощность критериев $W(T_n) = P\{T_n(X) \in X_{1\alpha} | H_1\}$ и затем сделать выбор.

Соответствующая задача выглядит так: если $X_{1\alpha}$ — критическая область, скажем, $X_{1\alpha} = \{X: T_n(X) \geq u_\alpha\}$ и задан набор из J критериев, то выбирают j^* -й критерий из условий

$$P\{T_{nj^*} > u_\alpha | H_0\} = \alpha,$$

$$P\{T_{nj^*} > u_\alpha | H_1\} = \max_{1 \leq j \leq J} \{P\{T_{nj} > u_\alpha | H_1\}\}.$$

В работе [43] проведено сравнение 12 критериев экспоненциальности против семейства альтернатив $We(k)$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$ и $n = 10$. Ее фрагмент, дополненный нами критерием Рао, представлен в табл. 6. В ней, кроме упомянутых выше критериев, представлены свободный от масштаба адаптивный критерий [43], задаваемый статистикой

$$T_p = \sum_{k=1}^p \lambda_{jk}^p U_{(ik)}, \quad p = 1, \dots, n,$$

где суммирование происходит по индексам $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p$; критерий Хенце [44]

$$H_n = n \int_0^\infty \left(\psi_n(t) - \frac{1}{1+t} \right)^2 e^{-\alpha t} dt, \quad \alpha = 2,5,$$

где $\psi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-t} X_i$ — эмпирическое преобразование Лапласа экспоненциального распределения; критерий Ибрагима – Набибуллы – Суфи E_n [45], основанный на оценке энтропии Васицека

$$E_n = \exp \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{n}{6} (U_{(i+3)} + U_{(i-3)}) - 1 \right],$$

$$U_{(j)} = \begin{cases} 0, & j \leq 0, \\ U_{(n)}, & j \geq n. \end{cases}$$

Отметим также, что статистика (10) критерия Рао при $H_0 = We(1)$ в силу равенств $a = n$, $H_1 = -n^2 - bn + c^2$, $H_2 = -n$ приобретает следующий вид:

$$T_R(X) = \frac{nV_0^2}{1 + n^{-1} \sum U_i (\log U_i)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum U_i \log U_i \right)^2},$$

$$V_0 = 1 + \frac{1}{n} \sum (1 - U_i) \log U_i.$$

Функцию V_0 в литературе называют функцией вклада [4, с. 47]. Наряду с критерием Рао ее также используют в качестве статистики соответствующего критерия. В работе [43] этот критерий назван критерием Кокса – Оукса (см. табл. 2).

Из анализа табл. 6 следует вывод о том, что среди представленных в ней критериев нет равномерно наиболее мощного. В то же время для конкретных значений k наиболее мощные критерии можно выделить. Например, для $k = 0,5$ таковым является CO_n , а для $k = 1,5$ — критерий EP_n . Отметим также, что критерии T_p , EP_n и G_n занимают два первых места для практически всех рассмотренных сценариев.

Пример 3. Критерий Джини. В табл. 7 представлены результаты вычислений мощности критерия

Таблица 6. Мощность критериев экспоненциальности против семейства альтернатив $We(k)$

k	T_p	R_n	Q_n	S_n	G_n	E_n	EP_n	CO_n	H_n
0,25	0,998	0,996	0,955	0,956	0,980	0,802	0,982	1,000	0,969
0,50	0,789	0,759	0,641	0,653	0,768	0,125	0,681	0,910	0,645
1,5	0,345	0,275	0,326	0,339	0,353	0,328	0,888	0,294	0,236
2,0	0,735	0,679	0,715	0,765	0,755	0,712	0,995	0,629	0,624
3,0	0,993	0,983	0,987	0,991	0,994	0,981	1,000	0,988	0,989

Примечание. Статистики: T_p — адаптивная ($p = 4$); R_n — Рао; Q_n — Фортиана – Гране; S_n — Стивенс; G_n — Джини; E_n — Ибрагим – Набибулла – Суфи; EP_n — Эппс – Пули; CO_n — Кокс – Оукс; H_n — Хенце ($\alpha = 2,5$). Объем выборки $n = 10$; уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Джини для различных альтернатив $H_1 = We(k)$. Верхние квантили $u_{1-\alpha}$ при $k < 1$ и нижние квантили $u_\alpha = 1 - u_{1-\alpha}$ при $k > 1$ заимствуются из табл. 5, при этом

$$X_{1\alpha} = \{G_n(X) \geq u_{1-\alpha}, k < 1, G_n(X) \leq u_\alpha, k > 1\}$$

Распределение статистики G_n симметрично относительно $x = 0,5$. Поэтому имеет место равенство $u_\alpha = 1 - u_{1-\alpha}$. Если критерий G_n предназначен для выявления отклонений от нулевой гипотезы в сторону ВФИ-распределений $We(k)$ ($k > 1$), то используется критерий $X_{1\alpha} = \{G_n(X) > u_{1-\alpha}\}$, а в случае УФИ-распределений ($k < 1$) — критерий $X_{1\alpha} = \{G_n(X) < u_\alpha\}$. Из табл. 7 видно, что с ростом n мощность критерия G_n растет, что свидетельствует о его состоятельности.

Для статистики Джини характерна ее хорошая аппроксимация нормальным распределением уже при малых n [25]. Действительно, поскольку $MG_n = 0,5$ и $DG_n = 1/12(n-1)$, то нормальная аппроксимация для $n = 10$ дает 95 %-ю квантиль $\frac{1,645}{\sqrt{12(n-1)}} + 0,5 = 0,65829$.

В то же время точная теория позволяет получить $P\{G_{10} \leq 0,65829\} = 0,9497$, что очень незначительно отличается от 0,95.

Асимптотически оптимальная эффективность

С исследованием мощности критериев тесно связан вопрос их асимптотически оптимальной эффективности (АОЭ). Для этого существуют различные подходы [20, с. 414–420], основными из которых являются подходы Питмена, Ходжеса – Лемана и Бахадура [47, с. 6]. Так, информация о вычислении АОЭ по Бахадуру, когда фиксируется мощность критериев и сравниваются скорости убывания их размеров при $n \rightarrow \infty$, содержится во многих источниках (см., например, [46–49]).

Суть вычисления АОЭ состоит в следующем. Пусть $T_n \xrightarrow{P_\theta} b(\theta)$, $\theta \in \Theta_1$ и $k(\alpha)$ — функция уклонов. Величину $c_T(\theta) = -2k[b(\theta)]$ принято называть *точным наклоном* по Бахадуру. При всех $\theta \in \Theta_1$ имеет место неравенство $c_T(\theta) \leq 2Q(\theta)$, где

$$Q(\theta) = \inf_{\theta \in \Theta_1} \{K(\theta, \theta_0) : \theta_0 \in \Theta_0\},$$

$K(\theta, \theta_0)$ — «расстояние» между H_0 и H_1 , называемое информацией Кульбака – Лейблера [47, с. 19].

Если для каждого $\theta_0 \in \partial\Theta_0$ выполняется асимптотическое равенство $c_T(\theta) \approx 2Q(\theta)$, $\theta \rightarrow \theta_0$, то отсюда возникает определение АОЭ (по Бахадуру) как отношения точного наклона к его потенциальной верхней границе:

$$e_T(\theta) = \frac{c_T(\theta)}{2Q(\theta)}. \quad (17)$$

Если гипотезы $H_1 = \{\theta \in \Theta_1\}$, $i = 0, 1$, сближаются, то определяется локальная АОЭ

$$e_T = \lim_{\theta \rightarrow \partial\Theta_0} \frac{c_T(\theta)}{2Q(\theta)}. \quad (18)$$

Чем выше значение e_T , тем лучше критерий улавливает отклонение альтернативы H_1 от H_0 при их сближении. Поэтому при известной альтернативе $H_1 = \{F\}$ предпочтительнее тот критерий T_n из числа заданных, у которого e_T выше других.

Покажем, как вычисляется e_T в случае критерия Джини. Пусть

$$H(u, k) = [-\log(1-u)]^{1/k}, \quad k > 0, \quad (19)$$

инверсия распределения Вейбулла, которая используется при моделировании квантилей и мощности по методу Монте-Карло. Обозначим

$$\eta(k) = \int_0^1 (2u-1)H(u, k) du, \quad \mu(k) = \int_0^1 H(u, k) du.$$

В работе [25] показано, что при альтернативе $H_1 = We(k)$ среднее статистики Джини удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} MG_n(k) = \frac{\eta(k)}{\mu(k)}.$$

Определение e_T как чувствительности критерия к различению гипотез H_0 и H_1 в данном контексте эквивалентно равенству

$$e_T(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Dk}{DG_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial MG_n(k)}{\partial k} \right)^2 = V(k)G(k), \quad (20)$$

где величины $V(k)$ и $G(k)$, соответствующие первому и второму сомножителям в (20), подлежат определению.

Таблица 7. Мощность критерия Джини $W(X_{1\alpha}) = P\{T_n(X) \in X_{1\alpha} | H_1\}$, $H_1 = We(k)$

n	k							
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,2	1,4	1,6	1,8
10	0,993	0,891	0,550	0,210	0,129	0,289	0,466	0,635
20	1,0	0,989	0,790	0,332	0,223	0,498	0,759	0,915

Примечание. Число испытаний $N = 10\,000$; размер критерия $\alpha = 0,05$.

Чтобы найти $V = V(1)$, вычислим информационную матрицу Фишера $M_{\alpha\beta} = ML_{\alpha\beta}$ в точке $k = 1$ для одного наблюдения ($n = 1$). Согласно (3) получаем

$$M_{kk} = \int_0^{\infty} u(\log^2 u) e^{-u} du = \frac{\pi^2}{6} + (1-C)^2,$$

$$M_{k\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[-1 + \int_0^{\infty} u(1 + \log u) e^{-u} du \right] = \frac{1-C}{\lambda},$$

$$M_{\lambda\lambda} = 1/\lambda^2.$$

Следовательно,

$$D\hat{k} = \left(M_{kk} - \frac{V_{k\lambda}^2}{M_{\lambda\lambda}} \right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Поскольку для $n \geq 2$ имеем $DG_n = 1/12(n-1)$, $D\hat{k} = 6/\pi^2 n$, то отсюда $V = V(1) = 72/\pi^2$.

Далее получаем

$$\eta'(1) = \int_0^1 (2u-1) \left(\frac{\partial H}{\partial k} \right)_{k=1} du = \frac{-1}{2} (1-C + \log 2),$$

$$\mu(k) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad \mu'(1) = -\Gamma'(2) = C - 1.$$

Поскольку $\eta(1) = 1/2$, $\mu(1) = 1$, то

$$G = G(1) = \left(\frac{\mu\eta' - \mu'\eta}{\mu^2} \right)_{k=1}^2 = \frac{1}{4} \log^2 2.$$

Отсюда окончательно запишем

$$e_T = VG = 18 \left(\frac{\log 2}{\pi} \right)^2 = 0,8762.$$

В работе [15] вычислены локальные АОЭ некоторых перечисленных выше статистик для четырех видов альтернатив, считающихся в литературе стандартными. Для гамма и Вейбулла альтернатив они представлены в табл. 8 [15], дополненной статистикой Кокса – Оукса. В частности, для гамма альтернатив эффективность статистики Джини

$$e_T = \frac{18(2\log 2 - 1)^2}{\pi^2 - 6} = 0,6941.$$

Как отмечено в [50], на самом деле в [25] вычислена асимптотическая эффективность критерия Джини по Питмену, однако в силу асимптотической нормальности статистики G_n эффективности по Питмену и Бахадуру данного критерия против гамма и Вейбулла альтернатив совпадают.

Из табл. 8 видно, что в рассматриваемом классе критерий Морана обладает максимальной АОЭ для гамма альтернативы, а критерий Кокса – Оукса — для Вейбулла альтернативы. Отметим также, что критерии Фортиана – Гране и Джексона равнозначны для названных альтернатив. Это означает, что здесь необходимо более тонкое исследование их эффективности.

Проведенный анализ гипотезы экспоненциальности показывает, что в методологическом плане при ее проверке следует придерживаться определенных принципов. Кратко перечислим некоторые из них.

1. Проводить тщательный предварительный анализ данных. Цензурированность данных, возможные альтернативы, близость распределения статистики критерия к асимптотически нормальной, значения выборочных моментов и коэффициента вариации и т.д. — все это должно учитываться при выборе статистики T_n .

2. Критерий T_n должен быть по возможности наиболее мощным или асимптотически эффективным.

3. Моделирование применять в случае, если недостаточно аналитических данных о свойствах используемого критерия, в том числе в случае малых объемов выборки.

4. Если есть возможность увеличения объема выборки n , то эту возможность необходимо использовать.

5. При принятии решения об экспоненциальности данных следует руководствоваться не одним, а несколькими критериями, а в случае расхождения выводов — более тщательно провести априорный анализ данных.

6. Учитывать сведения о свойствах тех или иных критериев, извлекая их в первую очередь из первоисточников.

7. Не принимать за окончательный ответ выводы, полученные на основе лишь формальной проверки на экспоненциальность по какому-либо одному из выбранных критериев. Необходимо сверить их с профессиональным видением ситуации на основе знания предметной области, в том числе знания плана эксперимента по сбору данных, точностью и надежностью этих данных.

Таблица 8. Локальные АОЭ для некоторых статистик из табл. 2 [15, с. 67]

Альтернатива	Статистики					
	Моран	Кокс – Оукс	Гринвуд	Джини	Фортиана – Гране	Джексон
H_1						
We	0,9426	1,0	0,6079	0,8762	0,6079	0,6079
Ga	1,0	0,9426	0,3876	0,6941	0,3876	0,3876

Очевидно, что перечисленные принципы можно с таким же успехом отнести и к другим гипотезам, скажем, к гипотезе нормальности [51, 52]. В любом случае все нарастающий объем числа предлагаемых в литературе критериев экспоненциальности следует тщательно фильтровать, так как даже среди новых критериев могут оказаться заведомо слабые.

Имеется в виду то, что не все критерии ведут себя одинаково с ростом N . В одних случаях, чтобы принять гипотезу экспоненциальности, достаточно выбрать объем выборки $N = 20 - 30$ (когда статистика критерия быстро сходится к нормальной, альтернативы достаточно далеки от нулевой гипотезы [1 - 4]), а в других случаях (медленная сходимость распределений статистик к известным распределениям, достаточная близость альтернатив, малая асимптотическая эффективность) даже большие объемы выборок могут приводить к ошибочным выводам. В этом отношении показательным является пример, рассмотренный в работе [1, с. 323 - 324], где показано, что ни увеличение объема выборки, ни тот факт, что критерий типа Колмогорова - Смирнова не отвергает гипотезу экспоненциальности, не могут быть гарантией принятия правильного решения. На самом деле распределение может не являться экспоненциальным.

Следует констатировать, что в литературе по поводу выбора необходимого значения N для подтверждения гипотезы экспоненциальности нет однозначного мнения. В каждом отдельном случае все зависит от ряда дополнительных факторов.

И наконец, поскольку для данных примера 1 статистика Джини принимает значение $G_n = 0,44556$, то в силу того, что $0,44556 \in (u_{0,05}, u_{0,95}) = (0,34145, 0,65855)$, где квантили заимствуем из табл. 5, заключаем, что гипотеза экспоненциальности не отклоняется. Мощность критерия Джини при альтернативе $H_1 = \{k = \hat{k} = 1,3666\}$ согласно табл. 7 меньше, чем $W(1,4) = 0,289$. Поэтому к принятию гипотезы экспоненциальности, хотя и поддержанной критериями Неймана - Пирсона, Вальда и Рао, следует при прочих равных условиях относиться с достаточной осторожностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. — М.: Советское радио, 1969. — 488 с.
2. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. — М.: Наука, 1965. — 524 с.
3. Капур Л., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. — М.: Мир, 1980. — 606 с.
4. Кокс Д. Р., Оукс Д. Анализ данных типа времени жизни. — М.: Финансы и статистика, 1988. — 192 с.
5. Орлов А. И. Часто ли распределение результатов наблюдений является нормальным? / Заводская лаборатория. 1991. Т. 57. № 7. С. 64 - 66.
6. Greenwood M. The statistical study of infectious diseases / JRSS. 1946. A109. P. 85 - 110.
7. Moran P. The random division of an interval. Part II / JRSS. 1951. B13. N 1. P. 147 - 150.
8. Doksum K. A., Yandell B. S. Tests of exponentiality. In: Handbook of Statistics. — North-Holland. 1984. Vol. 4(2). P. 579 - 612.
9. Spurrier J. D. On overview of tests of exponentiality / Commun. Stat.-Theor. Meth. 1984. Vol. 13. N 13. P. 1635 - 1654.
10. Asher S. A survey of tests for exponentiality / Commun. Stat.-Theor. Meth. 1990. Vol. 19. P. 1811 - 1825.
11. Henze N., Meintanis S. G. Recent and classical tests of exponentiality: a partial review with comparisons / Metrika. 2005. Vol. 61. P. 29 - 45.
12. Balakrishnan N., Basu A. (eds.), The Exponential Distribution: Theory, Methods and Applications. — Langhorne, PA: Gordon and Breach, 1995.
13. Nabendu P., Chun J., Crouse R. Handbook of Exponential and Related distributions for Engineers and Scientists. — Chapman and Hall, 2002.
14. Литвинова В. В. Асимптотические свойства критериев согласия и симметрии, основанных на характеристиках: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — СПбГУ, 2004.
15. Чирнина А. В. Асимптотическая эффективность критериев экспоненциальности, свободных от параметра масштаба: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — СПбГУ, 2005.
16. Rank R. F. Statistische Anpassungstests und Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen. Vom Fachbereich Mathematik der Universität Hannover zur Erlangung des Grades Doktor der Naturwissenschaften. Dr. rer. nat. genehmigte Dissertation. — Hannover, 1999.
17. Henze N., Klar B. Testing exponentiality against the L-class of life distributions / Mathem. Meth. Stat., 2001. N 10. P. 232 - 246.
18. Klar B. On a test for exponentiality against Laplace order dominance / Statistics. 2003. Vol. 37. P. 505 - 515.
19. Klar B. Tests for exponentiality against the M and LM classes of life distributions / Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Test. 2005. Vol. 14. N 2. P. 543 - 565.
20. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применения. — М.: Наука, 1968. — 548 с.
21. Григорьев Ю. Д. Алгоритмы доверительного оценивания в нелинейной регрессии / Заводская лаборатория. 1994. Т. 60. № 7. С. 44 - 48.
22. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. — М.: Наука, 1971. — 312 с.
23. Sherman B. A random variable related to the spacing of sample values / Ann. Math. Stat. 1950. Vol. 421. P. 339 - 361.
24. Shapiro S., Wilk M. An analysis of variance test for the exponential distribution complete samples / Technometrics. 1972. Vol. 14. P. 355 - 370.
25. Gail M. H., Gastwirth J. L. A scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Gini statistic / JRSS. 1978. B40. N 3. P. 350 - 357.
26. Epstein B. Testing for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential / Technometrics. 1960. Vol. 2. N 1. P. 83 - 101; N 2. P. 167 - 183.
27. Epps T. W., Pulley L. B. A test for exponentiality vs. monotone hazard alternatives derived from the empirical characteristic functions / JRSS. 1986. B 48. P. 206 - 213.
28. Stephens M. A. On the W test for exponentiality with origin known / Technometrics. 1978. Vol. 20. P. 353 - 357.
29. Jackson O. A. Y. An analysis of departures from the exponential distribution / JRSS. 1967. B29. P. 540 - 549.
30. Gail M. H., Gastwirth J. L. A scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Lorenz curve / JASA. 1978. Vol. 73. P. 787 - 793.
31. Fortiana G., Grane A. A scale-free goodness-of-fit statistic for the exponential distribution based on maximum correlations / J. Stat. Plann. Infer. 2002. Vol. 108. P. 85 - 97.
32. Lilliefors H. On the Kolmogorov - Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown / JASA. 1969. Vol. 64. P. 387 - 389.
33. Durbin J. Kolmogorov - Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests to exponentiality and tests on spacings / Biometrika. 1975. Vol. 62. P. 5 - 22.
34. Baringhaus L., Henze N. Tests of fit for exponentiality based on a characterization via the mean residual life function / Statistical Papers. 2000. Vol. 41. P. 225 - 236.
35. Орлов А. И. О критериях Колмогорова и Смирнова / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1995. Т. 61. № 7. С. 59 - 61.
36. Орлов А. И. Непараметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова, Омега-квадрат и ошибки при их применении / Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ). 2014. № 3(97). С. 647 - 675. Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/47.pdf>
37. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. — М.: Мир, 1983. — 576 с.

38. **Большев Л. Н.** К вопросу о проверке «показательности» / Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11. № 3. С. 542 – 544.
39. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.
40. **Wang Y. H., Chang S. A.** A new approach to the nonparametric tests of exponential distribution with unknown parameters. Theory and Applications of Reliability. Vol. 2. — New York: Acad. Press, 1977. P. 235 – 258.
41. **Ермаков С. М., Михайлов Г. А.** Курс статистического моделирования. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
42. **Орлов А. И.** Комментарий к статье С. М. Ермакова «О датчиках случайных чисел» / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1993. Т. 59. № 7. С. 51.
43. **Grané A., Fortiana J.** A directional test of exponentiality based on maximum correlations / Metrika. 2011. Vol. 3. P. 255 – 274.
44. **Henze N.** A new flexible class of omnibus tests for exponentiality / Commun. Stat.-Theor. Meth. 1993. Vol. 22. P. 115 – 123.
45. **Ebrahimi N., Habibullah M., Soofi E.** Testing exponentiality based on Kullback – Leibler information / JRSS. 1986. B54. N 3. P. 739 – 748.
46. **Bartholomew D. J.** Testing for departure from the exponential distribution / Biometrika. 1957. Vol. 44. P. 253 – 256.
47. **Никитин Я. Ю.** Асимптотическая эффективность непараметрических критериев. — М.: Наука, 1995. — 240 с.
48. **Tchirina A.** Asymptotic properties of exponentiality tests based on L-statistics / Acta Appl. Math. 2007. Vol. 97. P. 297 – 309.
49. **Grané A., Fortiana J.** Karhunen – Loeve basis in goodness-of-fit test decomposition: an evaluation / Commun. Stat.-Theor. Meth. 2008. Vol. 37. N 19. P. 3144 – 3163.
50. **Nikitin Ya. Yu., Tchirina A. V.** Bahadur efficiency and local optimality of a test for the exponential distribution based on the Gini statistic / J. Ital. Stat. Soc. 1996. N 1. P. 163 – 175.
51. **Селезнев В. Д., Денисов К. С.** Исследование свойств критериев согласия функции распределения данных с гауссовой методом Монте-Карло для малых выборок / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2005. Т. 71. № 1. С. 68 – 72.
52. **Орлов А. И.** Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.
- scale-free goodness-of-fit tests for the exponential distribution]. Candidate's Thesis. — St. Petersburg State University, 2004 [in Russian].
16. **Rank R. F.** Statistische Anpassungstests und Wahrscheinlichkeiten großer Abweichungen. Vom Fachbereich Mathematik der Universität Hannover zur Erlangung des Grades Doktor der Naturwissenschaften. Dr. rer. nat. genehmigte Dissertation. — Hannover, 1999.
17. **Henze N., Klar B.** Testing exponentiality against the L-class of life distributions / Mathem. Meth. Stat., 2001. N 10. P. 232 – 246.
18. **Klar B.** On a test for exponentiality against Laplace order dominance / Statistics. 2003. Vol. 37. P. 505 – 515.
19. **Klar B.** Tests for exponentiality against the M and LM classes of life distributions / Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Test. 2005. Vol. 14. N 2. P. 543 – 565.
20. **Rao C. R.** Linear Statistical Inference and its Applications. — New York – London – Sydney: John Wiley and Sons, Inc.
21. **Grigor'ev Yu. D.** Algoritmy doveritel'nogo otsenivaniya v nelineinoi regressii [Confidence estimation algorithms for the nonlinear regression] / Zavod. Lab. 1994. Vol. 60. N 7. P. 44 – 48 [in Russian].
23. **Sherman B.** A random variable related to the spacing of sample values / Ann. Math. Stat. 1950. Vol. 421. P. 339 – 361.
24. **Shapiro S., Wilk M.** An analysis of variance test for the exponential distribution complete samples / Technometrics. 1972. Vol. 14. P. 355 – 370.
25. **Gail M. H., Gastwirth J. L.** A scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Gini statistic / JRSS. 1978. B40. N 3. P. 350 – 357.
26. **Epstein B.** Testing for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential / Technometrics. 1960. Vol. 2. N 1. P. 83 – 101; N 2. P. 167 – 183.
27. **Epps T. W., Pulley L. B.** A test for exponentiality vs. monotone hazard alternatives derived from the empirical characteristic functions / JRSS. 1986. B48. P. 206 – 213.
28. **Stephens M. A.** On the W test for exponentiality with origin known / Technometrics. 1978. Vol. 20. P. 353 – 357.
29. **Jackson O. A. Y.** An analysis of departures from the exponential distribution / JRSS. 1967. B29. P. 540 – 549.
30. **Gail M. H., Gastwirth J. L.** A scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Lorenz curve / JASA. 1978. Vol. 73. P. 787 – 793.
31. **Fortiana G., Grane A.** A scale-free goodness-of-fit statistic for the exponential distribution based on maximum correlations / J. Stat. Plann. Infer. 2002. Vol. 108. P. 85 – 97.
32. **Lilliefors H.** On the Kolmogorov – Smirnov test for the exponential distribution with mean unknown / JASA. 1969. Vol. 64. P. 387 – 389.
33. **Durbin J.** Kolmogorov – Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests to exponentiality and tests on spacings / Biometrika. 1975. Vol. 62. P. 5 – 22.
34. **Baringhaus L., Henze N.** Tests of fit for exponentiality based on a characterization via the mean residual life function / Statistical Papers. 2000. Vol. 41. P. 225 – 236.
35. **Orlov A. I.** O kriteriyakh Kolmogorova i Smirnova [On Kolmogorov's and Smirnov's criteria] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 1995. Vol. 61. N 7. P. 59 – 61 [in Russian].
36. **Orlov A. I.** Neparаметрические критерии согласия Колмогорова, Смирнова, Омга-квадрат и ошibки при их применении [Nonparametric goodness of fit tests of Kolmogorov, Smirnov, Omega-square, and errors at their application] Politem. Set. Elektron. Nauch. Zh. Kuban. Gos. Univ. 2014. N 03(097). P. 647 – 675. <http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/47.pdf> [in Russian].
37. **Marshall A. W., Olkin I.** Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. — New York – London – Toronto – Sydney – San Francisco: Acad. Press.
38. **Bol'shev L. N.** K voprosu o proverke «pokazatel'nosti» [To a question on the testing exponentiality] / Teor. Veroyatn. Primen. 1966. Vol. 11. N 3. P. 542 – 544 [in Russian].
39. **Bol'shev L. N., Smirnov N. V.** Tablitsy matematicheskoi statistiki [Tables of Mathematical Statistic]. — Moscow: Nauka, 1983. — 416 p. [in Russian].
40. **Wang Y. H., Chang S. A.** A new approach to the nonparametric tests of exponential distribution with unknown parameters. Theory and Applications of Reliability. Vol. 2. — New York: Acad. Press, 1977. P. 235 – 258.
41. **Ermakov S. M., Mikhailov G. A.** Kurs statisticheskogo modelirovaniya [Course of Statistical modelling]. — Moscow: Nauka, 1976 — 320 p. [in Russian].

REFERENCES

1. **Barlow R., Proschan F.** Mathematical Theory of Reliability. — New York – London – Sydney: John Wiley and Sons, Inc.
2. **Gnedenko B. V., Belyaev Yu. K., Solov'ev A. D.** Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti [Mathematical Methods in the Theory of Reliability]. — М.: Наука, 1965. — 524 p. [in Russian].
3. **Kapur K. S., Lamberson L. R.** Reliability in Engineering Design. — New York – Santa Barbara – London – Sydney – Toronto: John Wiley and Sons, Inc.
4. **Cox D. R., Oakes D.** Analysis of Survival Data. — London – New York: Charman and Hall.
5. **Orlov A. I.** Chasto li raspredelenie rezul'tatov nablyudenii yavlyayet-sya normal'nym? [How often do the distribution of observations results are normal?] / Zavod. Lab. 1991. Vol. 57. N 7. P. 64 – 66 [in Russian].
6. **Greenwood M.** The statistical study of infectious diseases / JRSS. 1946. A109. P. 85 – 110.
7. **Moran P.** The random division of an interval. Part II / JRSS. 1951. B13. N 1. P. 147 – 150.
8. **Doksum K. A., Yandell B. S.** Tests of exponentiality. In: Handbook of Statistics. — North-Holland. 1984. Vol. 4(2). P. 579 – 612.
9. **Spurrer J. D.** On overview of tests of exponentiality / Commun. Stat.-Theor. Meth. 1984. Vol. 13. N 13. P. 1635 – 1654.
10. **Asher S.** A survey of tests for exponentiality / Commun. Stat.-Theor. Meth. 1990. Vol. 19. P. 1811 – 1825.
11. **Henze N., Meintanis S. G.** Recent and classical tests of exponentiality: a partial review with comparisons / Metrika. 2005. Vol. 61. P. 29 – 45.
12. **Balakrishnan N., Basu A.** (eds.), The Exponential Distribution: Theory, Methods and Applications. — Langhorne, PA: Gordon and Breach, 1995.
13. **Nabendu P., Chun J., Crouse R.** Handbook of Exponential and Related distributions for Engineers and Scientists. — Chapman and Hall, 2002.
14. **Litvinova V. V.** Asimptoticheskie svoystva kriteriev soglasiya i simmetrii, osnovannykh na kharakterizatsiyakh [Asymptotic properties of goodness of fit and symmetry tests based on characterizations]. Candidate's Thesis. — St. Petersburg State University, 2004 [in Russian].
15. **Chirina A. V.** Asimptoticheskaya éffektivnost' kriteriev éksponentsial'nosti, svobodnykh ot parametra masshtaba [Asymptotic efficiency of a

42. **Orlov A. I.** Kommentarii k stat'e S. M. Ermakova "O datchikakh sluchainykh chisel" ["On a random-number generators"] / *Zavod. Lab. Diagn. Mater.* 1993. Vol. 59. N 7. P. 51 [in Russian].
43. **Grané A., Fortiana J.** A directional test of exponentiality based on maximum correlations / *Metrika*. 2011. Vol. 3. P. 255 – 274.
44. **Henze N.** A new flexible class of omnibus tests for exponentiality / *Commun. Stat.-Theor. Meth.* 1993. Vol. 22. P. 115 – 123.
45. **Ebrahimi N., Habibullah M., Soofi E.** Testing exponentiality based on Kullback – Leibler information / *JRSS.* 1986. B54. N 3. P. 739 – 748.
46. **Bartholomew D. J.** Testing for departure from the exponential distribution / *Biometrika*. 1957. Vol. 44. P. 253 – 256.
47. **Nikitin Ya. Yu.** Asimptoticheskaya éffektivnost' neparametricheskikh kriteriev [Asymptotic efficiency of nonparametric tests]. — Moscow: Nauka, 1995. — 240 p. [in Russian].
48. **Tchirina A.** Asymptotic properties of exponentiality tests based on L-statistics / *Acta Appl. Math.* 2007. Vol. 97. P. 297 – 309.
49. **Grané A., Fortiana J.** Karhunen – Loeve basis in goodness-of-fit test decomposition: an evaluation / *Commun. Stat.-Theor. Meth.* 2008. Vol. 37. N 19. P. 3144 – 3163.
50. **Nikitin Ya. Yu., Tchirina A. V.** Bahadur efficiency and local optimality of a test for the exponential distribution based on the Gini statistic / *J. Ital. Stat. Soc.* 1996. N 1. P. 163 – 175.
51. **Seleznev V. D., Denisov K. S.** Issledovanie svoystv kriteriev soglasiya funktsii raspredeleniya dannykh s gaussvoi metodom Monte-Karlo dlya malykh vyborok [Investigation of goodness of fit tests properties for empirical distribution function regard to Gaussian distribution function by Monte-Carlo method from a small sample] / *Zavod. Lab. Diagn. Mater.* 2005. Vol. 71. N 1. P. 68 – 72 [in Russian].
52. **Orlov A. I.** *Prikladnaya statistika* [Applied Statistics]. — Moscow: Ékzamen, 2006. — 671 p. [in Russian].