УДК 519.2

ОЦЕНИВАНИЕ СОВМЕСТНОЙ ФУНКЦИИ НАДЕЖНОСТИ ПО ЦЕНЗУРИРОВАННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

© **А. А. Абдушукуров**[1]

Статья поступила 16 июня 2015 г.

Работа посвящена построению непараметрических оценок для многомерной функции выживания при неоднородном цензурировании наблюдений справа. С использованием функционалов множительного, экспоненциального и степенного видов построены и исследованы три класса оценок двумерной функции выживания в общей модели зависимого и неоднородного случайного цензурирования справа. Оценки являются обобщенными аналогами их одномерных вариантов. В частности, доказаны близость этих оценок, равномерно сильная состоятельность и слабая сходимость к гауссовскому процессу.

Ключевые слова: функция надежности; случайное цензурирование; интеграл-произведение; мартингал; гауссовское поле.

На прямой различают модели (однократного, многократного и неоднородного) случайного цензурирования (усечения) с одной стороны (слева или справа), с двух сторон, интервалами наблюдения или ненаблюдения. Такие данные возникают в медико-биологических и инженерных испытаниях, в страховом деле, в социологических и демографических исследованиях. Задачи математической статистики, в частности непараметрического оценивания по неполным (цензурированным, усеченным) наблюдениям, обладают некоторыми особенностями. Дело в том, что для одной и той же функции надежности в различных моделях цензурирования могут быть предложены соответствующие оценки и они исследуются с учетом особенностей самой модели. По степени сложности и оригинальности решаемых задач на передний план следует выдвинуть статистические задачи в моделях случайного цензурирования. В случае одномерных наблюдений лучше, по-видимому, сохранить математический аппарат в более простом виде. Теоретические исследования развивались в основном на базе случайного цензурирования справа. Бурное развитие этой теории началось с 80-х годов XX века благодаря работам B. Efron, N. Breslow, J. Crowley, A. Földes, L. Rejtő, S. Csörgő, R. D. Gill и многих других. Почти вся теория статистики случайного цензурирования справа основана на PL (product-limit) — оценке Каплана-Мейера [1] для функции распределения, хотя она не является единственной в этой модели. Подробный обзор известных и ряда новых результатов для PL-оценок в различных моделях случайного цензурирования на прямой представлены в работах [2 – 4]. Отметим, что если X неотрицательная случайная величина с функцией распределения $E(x) = P(X \le x)$, то экспоненциальная оценка Альтшулера – Бреслоу и PL-оценка Каплана – Мейера получаются из представления функции надежности $1 - E(x)$ через интегральную функцию интенсивности

[1] Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан; e-mail: a_abdushukurov@rambler.ru

$\Lambda_E(x) = \int_0^x [1 - E(u-)]^{-1}\,\mathrm{d}E(u)$ следующим образом [2 – 4]:

$$1 - E(x) = \underset{u=0}{\overset{u=x}{\pi}}[1 - \Lambda_E(\mathrm{d}u)] =$$

$$= \lim_{\substack{\max\\ 0\le i\le m}|s_i - s_{i-1}|\to 0} \prod (1 - [\Lambda_E(s_i) - \Lambda_E(s_{i-1})]), \qquad (1)$$

где $0 = s_0 < s_1 < ... < s_m = x$ — разбиение $[0, x]$. Отметим, что представление (1) (при $0/0 = 0$) можно записать как

$$1 - E(x) = \exp[-\Lambda_E^c(x)] \prod_{u\in D_E(x)} [1 - \Delta\Lambda_E(u)], \qquad (2)$$

где $D_E(x) = \{s \in d(E): s \le x\}$ — множество точек скачка функции распределения E на интервале $[0, x]$;

$$\Delta\Lambda_E(u) = \Lambda_E(u) - \Lambda_E(u-);$$

$$\Lambda_E^c(x) = \Lambda_E(x) - \sum_{u\in D_E(x)} \Delta\Lambda_E(u);\ \Lambda_E(u-) = \lim_{s\uparrow u} \Lambda_E(s).$$

Выражение (2) получается также и как следствие из экспоненциальной формулы Долеан-Дед для семимартингалов [2, 3]. Формула (2) единственным образом определяет функцию распределения E через интегральную функцию интенсивностей Λ_E и она эквивалентна уравнению типа Вольтерра

$$E(x) = \int_0^x [1 - E(u-)\mathrm{d}\Lambda_E(u)]. \qquad (3)$$

PL-оценка для функции распределения E удовлетворяет уравнению (3), в котором Λ_E оценивается статистикой Нельсона – Алена. Такое представление PL-оценки играет существенную роль при исследовании ее свойств теорией мартингалов, образованных считающими процессами [2 – 4].

Следует отметить, что при случайном цензурировании наблюдений справа имеются также степенные оценки Абдушукурова (1998 г.) а также Абдушукурова – Ченга — Лина (1984 г.) в специальной модели пропорциональных интенсивностей, которые обладают рядом преимуществ по сравнению с экспоненциальной и PL-оценкой. Сравнительный анализ всех этих статистик приведен в обзорной работе [4]. В данной статье представлен ряд результатов по построению и исследованию оценок двумерных функций надежности по цензурированным справа наблюдениям.

Оценивание многомерной функции надежности при случайном цензурировании наблюдений

В случае многомерных наблюдений задачи непараметрического оценивания становятся еще более сложными, так как в случае многомерных цензурированных наблюдений не существует однозначного подхода к оцениванию совместной функции надежности. Отметим публикации [5 – 13], в которых такие задачи рассматривались в специальных моделях многомерного цензурирования справа. Были построены и частично исследованы различные непараметрические оценки множительной структуры для функции надежности. Неоднозначность определения этих оценок объясняется тем, что интеграл-произведение в многомерном случае можно ввести различными путями. Трудности, возникающие при оценивании многомерных функций надежности подробно обсуждаются в работах Гилла [14, 15]. Он отмечает, что при многомерном цензурировании не удается построить и исследовать оценки при помощи теории мартингалов. Действительно, в отличие от одномерного, в многомерном случае нет канонического способа определения понятий «прошлого», «настоящего» и «будущего», на которых основывается мартингал-процесс. Поэтому к настоящему времени в многомерном случае нет универсальных методов построения и исследования непараметрических оценок функций надежности по неполным наблюдениям. В данной работе приведены асимптотические результаты для непараметрических оценок трех типов для двумерной функции надежности в общей модели зависимого и неоднородного случайного цензурирования справа. Рассмотрение нами двумерного случая и цензурирования справа объясняется лишь упрощением довольно громоздких формул и технических выкладок, возникающих при рассмотрении многомерных схем.

Пусть $\{X_i = (X_{1i}, X_{2i})\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых и одинаково распределенных двумерных случайных векторов с общей непрерывной функцией надежности $F(s; t) = P(X_{11} > s, X_{21} > t)$, $(s, t) \in R^2$. Эта последовательность цензурируется справа последовательностью $\{Y_i = (Y_{1i}, Y_{2i})\}_{i=1}^{\infty}$ независимых двумерных случайных векторов с функциями надежности $\{G(i)(s,t) = P(Y_{1i} > s, Y_{2i} > s)\}_{i=1}^{\infty}$, $(s, t) \in R^2$. Статистическая модель такова, что в n шаге испытаний наблюдается выборка $V^{(n)} = \{(Z_i, \Delta_i),\ 1 \le i \le n\}$, где $Z_i = (Z_{1i}, Z_{2i})$, $\Delta_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i})$, $Z_{ki} = \min(X_{ki}, Y_{ki})$ и $\delta_{ki} = I(Z_{ki} = X_{ki})$, $k = 1, 2$. Задача состоит в оценивании F по выборке $V^{(n)}$ при мешающих функциях $G_{(1)}$, $G_{(2)}$. Пусть $H_{(i)}(s, t) = P(Z_{1i} > s,\ Z_{2i} > t)$, $(s, t) \in R^2$. Рассматриваемая модель является обобщенной моделью двумерного неоднородного случайного цензурирования справа, где векторы X_i и Y_i могут быть и зависимыми. Анализ имеющейся литературы по исследованиям в этом направлении показывает, что такая модель обобщенного двумерного случайного цензурирования ранее никем не рассматривалась.

Предлагаемые нами оценки для F будут построены при помощи оценивания двумерной интегральной функции интенсивностей $-\log F(s, t) = L(s, t)$. Определим усредненные функции

$$G^{(n)}(s,t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G_{(i)}(s,t),\ H^{(n)}(s,t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_{(i)}(s,t),$$

$$M^{(n)}(s,t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_{(i)}(s,t),\ N^{(n)}(s,t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_{(i)}(s,t),$$

$$\widetilde{M}^{(n)}(s,t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{M}_{(i)}(s,t),\ \widetilde{N}^{(n)}(s,t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \widetilde{N}_{(i)}(s,t),$$

где

$$M_{(i)}(s, t) = P(Z_{1i} \le s,\ Z_{2i} > t),\ N_{(i)}(s, t) = P(Z_{1i} > s, Z_{2i} \le t),$$

$$\widetilde{M}_{(i)}(s,t) = P(Z_{1i} \le s, Z_{2i} > t, \delta_{1i} = 1),$$

$$\widetilde{N}_{(i)}(s,t) = P(Z_{1i} > s, Z_{2i} \le t, \delta_{2i} = 1).$$

Введем следующие интегральные функции интенсивностей, соответствующие определенным ранее усредненным функциям,

$$\Lambda_1^{(n)}(s,t) = \int_{-\infty}^{s} \frac{M^{(n)}(\mathrm{d}u,t)}{H^{(n)}(u-,t)},\ \Lambda_2^{(n)}(s,t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{N^{(n)}(s,\mathrm{d}v)}{H^{(n)}(s,v-)},$$

$$\widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(s,t) = \int_{-\infty}^{s} \frac{\widetilde{M}^{(n)}(\mathrm{d}u,t)}{H^{(n)}(u-,t)},\ \widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s,t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\widetilde{N}^{(n)}(s,\mathrm{d}v)}{H^{(n)}(s,v-)},$$

а также их оценки по выборке $V^{(n)}$:

$$\Lambda_{1n}(s,t) = \int_{-\infty}^{s} \frac{M_n(\mathrm{d}u,t)}{H_n(u-,t)},\ \Lambda_{2n}(s,t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{N_n(s,\mathrm{d}v)}{H_n(s,v-)},$$

$$\widetilde{A}_1^n(s,t) = \int_{-\infty}^{s} \frac{\widetilde{M}_n(\mathrm{d}u,t)}{H_n(u-,t)},\ \widetilde{A}_2^n(s,t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\widetilde{N}_n(s,\mathrm{d}v)}{H_n(s,v-)}.$$

Здесь

$$M_n(s,t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_1 \le s, Z_{2i} > t),$$

$$N_n(s,t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{1i} > s, Z_{2i} \le t),$$

$$\widetilde{M}_n(s,t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{1i} \le s, Z_{2i} > t, \delta_{1i} = 1),$$

$$\widetilde{N}_n(s,t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(Z_{1i} > s, Z_{2i} \le t, \delta_{2i} = 1) \text{ —}$$

эмпирические аналоги вышеопределенных усредненных функций $M^{(n)}(s, t)$, $N^{(n)}(s, t)$, $\widetilde{M}^{(n)}(s,t)$ и $\widetilde{N}^{(n)}(s,t)$.

Пусть

$$\Lambda^{(n)}(s,t) = \Lambda_1^{(n)}(s,-\infty) + \Lambda_2^{(n)}(s,t),$$

$$\widetilde{\Lambda}^{(n)}(s,t) = \widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(s,-\infty) + \widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s,t),$$

$$\Lambda_n(s,t) = \Lambda_1^n(s,-\infty) + \Lambda_2^n(s,t),$$

$$\widetilde{\Lambda}_n(s,t) = \widetilde{\Lambda}_1^n(s,-\infty) + \widetilde{\Lambda}_2^n(s,t).$$

Для функции двух аргументов $\psi(s, t)$ запишем:

$$\psi(\Delta s, t) = \psi(s, t) - \psi(s-, t),\ \ \psi(s, \Delta t) = \psi(s, t) - \psi(s, t-).$$

Рассмотрим задачу оценивания функции $F(s, t)$ посредством оценивания следующих функционалов трех типов:

$$F_1^{(n)}(s,t) = \exp[-\widetilde{\Lambda}^{(n)}(s,t)] = \exp\{-[\widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(s,-\infty) + \widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s,t)]\};$$

$$F_2^{(n)}(s,t) = \exp\{-[\widetilde{\Lambda}_1^{(n)} c(s,-\infty)]\}\times$$

$$\times\prod_{u\le s}[1-\widetilde{\Lambda}_1^{(n)}(\Delta u,-\infty)]\cdot\exp\{-[\widetilde{\Lambda}_2^{(n)} c(s,t)]\}\prod_{v\le t}(1-\widetilde{\Lambda}_2^{(n)}(s,\Delta v));$$

$$F_3^{(n)}(s,t) = [H^{(n)}(s,t)]^{R^{(n)}(s,t)}, \tag{4}$$

где $R^{(n)}(s,t) = \dfrac{\widetilde{\Lambda}^{(n)}(s,t)}{\Lambda^{(n)}(s,t)}$. Соответствующими оценками функционалов (4) являются

$$F_1^n(s,t) = \exp(-\widetilde{\Lambda}_n(s,t)) = \exp(-\widetilde{\Lambda}_1^n(s,-\infty) + \widetilde{\Lambda}_2^n(s,t))),$$

$$F_2^n(s,t) = \prod_{u\le s}(1-\widetilde{\Lambda}_1^n(\Delta u,-\infty))\prod_{v\le t}(1-\widetilde{\Lambda}_2^n(s,\Delta v)),$$

$$F_3^n(s,t) = [H_n(s,t)]^{R_n(s,t)}, \tag{5}$$

где $R_n(s,t) = \dfrac{\widetilde{\Lambda}_n(s,t)}{\Lambda_n(s,t)}$. Приведем некоторые свойства оценок (5). Полученный результат позволяет оценивать разность между оценками.

Теорема 1 [2, 3, 16]. Для всех $(s, t) \in (-\infty, Z_{1(n)}) \times \times (-\infty, Z_{2(n)})$:

I) $0 \le F_{1n}(s,t) - F_{2n}(s,t) = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, п.н.;

II) $|F_{1n}(s, t) - F_{3n}(s, t)| \le \pi_n(s, t)$, п.н.;

III) $|F_{3n}(s,t) - F_{2n}(s,t)| \le \pi_n(s,t) + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, п.н.,

где $\pi_n(s, t) = |-\log H_n(s, t) - \Lambda_n(s, t)|$; $Z_{m(1)} \le \ldots \le Z_{m(n)}$ — вариационный ряд, построенный по Z_{mj}, $m = 1, 2$; $j = 1, \ldots, n$.

Далее приведем условия, при которых $\pi_n(s, t)$ сходится к нулю. Это, в свою очередь, обеспечит близость оценок $F_{mn}(s, t)$, $m = 1, 2$, с $F_{3n}(s, t)$. Для функции $K(s, t) \in [0, 1]$, $(s, t) \in R^2$ обозначим $Supp(K) = \{(s, t) \in R^2\colon\ 0 < K(s, t) < 1\}$. Исследования дальнейших свойств оценок (5) требуют рассмотрения следующих условий:

1) существует предел $\lim_{n\to\infty} G^{(n)}(s,t) = G(s,t) \in \in [0;\ 1]$ для $(s, t) \in Supp(G)$, где $G(s, t)$ не возрастает и непрерывна слева по обоим аргументам;

2) существует предел $\lim_{n\to\infty} H^{(n)}(s,t) = H(s,t) \in \in [0;\ 1]$ для $(s, t) \in Supp(H)$, где $H(s, t)$ не возрастает и непрерывна слева по обоим аргументам;

3) существует предел $\lim_{n\to\infty} N^{(n)}(s,t) = N(s,t) \in \in [0;\ 1]$ для $(s, t) \in Supp(N)$;

4) существует предел $\lim_{n\to\infty} M^{(n)}(s,t) = M(s,t) \in \in [0;\ 1]$ для $(s, t) \in Supp(M)$;

5) существует предел $\lim_{n\to\infty} \widetilde{N}^{(n)}(s,t) = \widetilde{N}(s,t) \in \in [0;\ 1]$ для $(s, t) \in Supp(\widetilde{N})$;

6) существует предел $\lim_{n\to\infty} \widetilde{M}^{(n)}(s,t) = \widetilde{M}(s,t) \in \in [0;\ 1]$ для $(s, t) \in Supp(\widetilde{M})$.

Пусть $Q = Supp(n) \in Supp(M) \in Supp(\widetilde{N}) \in \in Supp(\widetilde{M}) \in \varnothing$. Введем функции

$$\Lambda(s,t) = \Lambda_1(s,-\infty) + \Lambda_2(s,t),$$
$$\widetilde{\Lambda}(s,t) = \widetilde{\Lambda}_1(s,-\infty) + \widetilde{\Lambda}_2(s,t),$$

где

$$\Lambda_1(s,t) = \int_{-\infty}^{s} \frac{M(du,t)}{H(u-,t)},\ \Lambda_2(s,t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{N(s,dv)}{H(s,v-)};$$

$$\widetilde{\Lambda}_1(s,t) = \int_{-\infty}^{s} \frac{\widetilde{M}(du,t)}{H(u-,t)},\ \widetilde{\Lambda}_2(s,t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\widetilde{N}(s,dv)}{H(s,v-)}.$$

В следующей теореме найдены равномерно-сильные пределы трех классов статистик (5).

Теорема 2 [2, 3, 16].

I) В условиях 2, 5 и 6 при $m = 1, 2$ получим

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{(s,t)\in Q} |F_{mn}(s,t) - \exp(-\widetilde{\Lambda}(s,t))| = 0\right) = 1;$$

II) в условиях 2 – 6

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{(s,t)\in Q} |F_{3n}(s,t) - \Gamma(s,t)| = 0\right) = 1,$$

где $\Gamma(s, t) = [H(s, t)]^{R(s,\, t)}$, $R(s, t) = \widetilde{\Lambda}(s, t)[\Lambda(s, t)]^{-1}$.

Теорема 2 показывает, что пределами статистик (5) могут быть функционалы, вообще говоря, различные, не совпадающие с оцениваемой функцией $F(s, t)$.

В следующей теореме перечислены условия, при которых имеет место требуемый результат.

Теорема 3 [2, 3, 16]. Пусть последовательности случайных векторов $\{X_i,\ i \ge 1\}$ и $\{Y_j,\ j \ge 1\}$ независимы, тогда:

I) $\exp(-\widetilde{\Lambda}(s,t)) \equiv F(s, t),\ (s, t) \in Q$;

II) в условиях 1, 2, где $G(s, t)$ — непрерывная функция,

$$H(s, t)^{R(s,\, t)} \in F(s, t),\ (s, t) \in Q.$$

Замечание 1. Из теорем 2 и 3 следует равномерная строгая сходимость оценок $F_{mn}(s, t)$, $m = 1, 2, 3$, к одному и тому же пределу $F(s, t)$. В этих же условиях мы можем установить сходимость к нулю и функции $\pi_n(s, t)$ из теоремы 1 при $n \to \infty$. Действительно, ввиду непрерывности $H(s, t)$ для всех $(s, t) \in Q \in \in [(-\infty;\ Z_{1(n)}) \times (-\infty;\ Z_{2(n)})] = Q_n$

$$\pi_n(s, t) \le |-\log H_n(s, t) + \log H^{(n)}(s, t)| +$$
$$+ |-\log H^{(n)}(s, t) + \log H(s, t)| + |-\log H(s, t) -$$
$$-\Lambda^{(n)}(s,t)| + |\Lambda^{(n)}(s,t) - \Lambda^{(n)}(s,t)| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п. н}} 0$$

согласно закону повторного логарифма и ввиду условий 1 – 4. Если еще и предполагать одинаковую распределенность элементов последовательности $\{Y_i,\ i \ge 1\}$, то

$$\sup_{(s,t)\in Q} \pi_n(s,t) \le \sup_{(s,t)\in Q} |-\log H_n(s,t) + \log H(s,t)| +$$
$$+ \sup_{(s,t)\in Q} |-\log H(s,t) - \Lambda_n(s,t)| = \xrightarrow{\text{п. н}} O\left(\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right).$$

В следующей теореме найдены условия равномерной строгой состоятельности оценок (5), когда цензоры являются одинаково распределенными, однако не обязательно независимыми от цензурируемых случайных векторов.

Теорема 4 [2, 3, 16]. Пусть пары $\{(X_i, Y_i),\ i \ge 1\}$ одинаково распределены и для случая $m = 3$ функция $G(s, t) = P(Y_{11} > s,\ Y_{21} > t)$ непрерывна. При $m = 1, 2, 3$ равенства

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{(s,t)\in Q} |F_{mn}(s,t) - F(s,t)| = 0\right) = 1 \qquad (6)$$

имеют место тогда и только тогда, когда для всех $(s, t) \in Q$

$$\begin{cases} P(Y_{11} \ge s / X_{11} = s) = P(Y_{11} \ge s / X_{11} > s), \\ P(Y_{11} > s, Y_{21} \ge t / X_{11} > s, X_{21} = t) = \\ \qquad = P(Y_{11} > s, Y_{21} \ge t / X_{11} > s, X_{21} > t). \end{cases} \qquad (7)$$

Замечание 2. Легко видеть, что если пара (X_{11}, Y_{11}) первых компонент векторов $X_1 = (X_{11}, X_{21})$ и $Y_1 = = (Y_{11}, Y_{21})$ не зависит от пары (X_{21}, Y_{21}) вторых компонент, то систему (7) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} P(Y_{11} \ge s / X_{11} = s) = P(Y_{11} \ge s / X_{11} > s), \\ P(Y_{21} \ge t / X_{21} = t) = P(Y_{21} \ge t / X_{21} > t). \end{cases} \qquad (8)$$

Пример. Пусть пары $\{(X_{k1}, Y_{k1}),\ k = 1, 2\}$ имеют двумерные экспоненциальные функции надежности

Маршалла – Олкина с параметрами $\{(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{3k}), k = 1,2\}$ соответственно:

$$P(X_{k1} > s,\ Y_{2k} > t) = \exp\{-\lambda_{1,k}s - \lambda_{2,k} - \lambda_{3,k}\max\{s, t\}\},$$

где $(s, t) \in [0; \infty) \times [0, \infty)$. Заметим, что маргинальные распределения X_{k1} и Y_{k1} являются непрерывными. Вычисления показывают, что вероятности в системе (8) с обеих сторон равенств равны $\exp(-\lambda_{2,1}s)$ и $\exp(-\lambda_{2,2}t)$ соответственно. Следовательно, система (7) имеет место.

Теперь сформулируем утверждение о слабой сходимости последовательностей

$$l_{mn}(s,t) = \frac{\sqrt{n}[F_{mn}(s,t) - F_m(s,t)]}{F_m(s,t)},\ m = 1, 2, 3,\ n \geq 1,$$

к соответствующим предельным гауссовским полям.

Теорема 5 [2, 3, 16]. Пусть пары $\{(X_i, Y_i),\ i \geq 1\}$ распределены одинаково, при этом $\{X_i, i \geq 1\}$ и $\{Y_i, i \geq 1\}$ взаимонезависимы. Тогда при $n \to \infty$ в пространстве Скорохода $D_2(Supp(H))$ справедливы сходимости

$$l_{mn}(\cdot;\cdot) \overset{D}{\Rightarrow} W(\cdot;\cdot),\ m = 1, 2, \text{ и } l_{3n}(\cdot;\cdot) \overset{D}{\Rightarrow} W^*(\cdot;\cdot),$$

где $W(s, t)$ и $W^*(s, t)$ — гауссовские поля с нулевыми средними и различными ковариационными функциями.

Следует отметить, что приведенные результаты обобщены и на случай случайного пуассоновского объема выборки. В работе [17] авторами рассмотрены задачи оценивания многомерных функций надежности в зависимых моделях случайного цензурирования с использованием копула функций.

Таким образом, представленные в работе результаты (теоремы 3 – 5) для статистик (5) дают основания для их использования при оценивании двумерной функции надежности $F(s, t)$ при случайном цензурировании справа наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kaplan E. L., Meier P.** Nonparametric estimation from incomplete observations / JASA. 1958. Vol. 53. P. 457 – 481.
2. **Абдушукуров А. А.** Статистика неполных наблюдений. Асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей. — Ташкент: Университет, 2009. — 267 с.
3. **Абдушукуров А. А.** Оценки неизвестных распределений по неполным наблюдениям и их свойства. — LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 299 с.
4. **Абдушукуров А. А., Мурадов Р. С.** Об оценках функции распределения в моделях случайного цензурирования / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2014. Т. 80. № 11. С. 62 – 67.
5. **Campbell G.** Nonparametric bivariate estimation with randomly censored data / Biometrika. 1981. Vol. 68. P. 417 – 422.
6. **Campbell G., Földes A.** Large sample properties of nonparametric bivariate estimators with censored data / Nonparametric Statistical Inference. Colloquia Mathematica-Societatis. János Bolyai. — Amsterdam: North-Holland, 1982. P. 103 – 122.
7. **Korwar R., Dahiya R.** Estimation of a bivariate distribution function from incomplete observations / Commun. Statist. Ser. A. 1982. Vol. 11. P. 887 – 897.
8. **Hanley J. A., Parnes M. N.** Nonparametric estimation of a multivariate distribution in the presence of censoring / Biometrics. 1983. Vol. 39. P. 129 – 139.
9. **Horváth L.** The rate of strong uniform consistency for the multivariate product-limit estimator / J. Multivar. Anal. 1983. Vol. 13. P. 202 – 209.
10. **Tsai W. Y., Leurgans S., Crowley J.** Nonparametric estimation of a bivariate survival function in the presence of censoring / Ann. Statist. 1986. Vol. 14. P. 1351 – 1365.
11. **Burke M. D.** Estimation of a bivariate distribution function under random censorship / Biometrika. 1988. Vol. 75. N 2. P. 379 – 382.
12. **Dabrowska D. M.** Kaplan – Meier estimate on the plane / Ann. Statist. 1988. Vol. 16. N 4. P. 1475 – 1489.
13. **Dabrowska D. M.** Kaplan – Meier estimate on the plane: weak convergence, LIL and the bootstrap / J. Multivar. Anal. 1989. Vol. 29. P. 308 – 325.
14. **Гилл Р. Д.** Анализ многомерных данных типа времени жизни I / Теор. вероятн. и прим. 1992. Т. 37. Вып. 1. С. 19 – 35.
15. **Гилл Р. Д.** Анализ многомерных данных типа времени жизни. Часть 2. Методы / Теор. вероятн. и прим. 1992. Т. 37. Вып. 2. С. 307 – 328.
16. **Абдушукуров А. А.** Непараметрические оценки функции выживания на плоскости по цензурированным наблюдениям / Узб. матем. журнал. 2004. № 2. С. 3 – 11.
17. **Мурадов Р. С., Абдушукуров А. А.** Оценивание многомерных распределений и их смесей по неполным данным. — LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 123 с.

REFERENCES

1. **Kaplan E. L., Meier P.** Nonparametric estimation from incomplete observations / JASA. 1958. Vol. 53. P. 457 – 481.
2. **Abdushukurov A. A.** Statistika nepolnykh nablyudenii. Asimptoticheskaya teoriya otsenivaniya dlya neklassicheskikh modelei [Statistics of incomplete data. Asymptotical estimation theory for nonclassical models] — Tashkent University, 2009. — 267 p. [in Russian].
3. **Abdushukurov A. A.** Otsenki neizvestnykh raspredelenii po nepolnym nablyudeniyam i ikh svoistva [Estimators of unknown distributions by incomplete observations and its properties]. — LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 299 p. [in Russian].
4. **Abdushukurov A. A., Muradov R. S.** Ob otsenkakh funktsii raspredeleniya v modelyakh sluchainogo tsenzurirovaniya [On the Estimates of the Distribution Function in a Random Censorship Model] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2014. Vol. 80. N 11. P. 62 – 67.
5. **Campbell G.** Nonparametric bivariate estimation with randomly censored data / Biometrika. 1981. Vol. 68. P. 417 – 422.
6. **Campbell G., Földes A.** Large sample properties of nonparametric bivariate estimators with censored data / Nonparametric Statistical Inference. Colloquia Mathematica-Societatis. János Bolyai. — Amsterdam: North-Holland, 1982. P. 103 – 122.
7. **Korwar R., Dahiya R.** Estimation of a bivariate distribution function from incomplete observations / Commun. Statist. Ser. A. 1982. Vol. 11. P. 887 – 897.
8. **Hanley J. A., Parnes M. N.** Nonparametric estimation of a multivariate distribution in the presence of censoring / Biometrics. 1983. Vol. 39. P. 129 – 139.
9. **Horváth L.** The rate of strong uniform consistency for the multivariate product-limit estimator / J. Multivar. Anal. 1983. Vol. 13. P. 202 – 209.
10. **Tsai W. Y., Leurgans S., Crowley J.** Nonparametric estimation of a bivariate survival function in the presence of censoring / Ann. Statist. 1986. Vol. 14. P. 1351 – 1365.
11. **Burke M. D.** Estimation of a bivariate distribution function under random censorship / Biometrika. 1988. Vol. 75. N 2. P. 379 – 382.
12. **Dabrowska D. M.** Kaplan – Meier estimate on the plane / Ann. Statist. 1988. Vol. 16. N 4. P. 1475 – 1489.
13. **Dabrowska D. M.** Kaplan – Meier estimate on the plane: weak convergence, LIL and the bootstrap / J. Multivar. Anal. 1989. Vol. 29. P. 308 – 325.
14. **Gill R. D.** Analiz mnogomernykh dannykh tipa vremeni zhizni I [Multivariate Survival Analysis I] / Teor. Veroyatn. Primen. 1992. Vol. 37. Issue 1. P. 19 – 35 [in Russian].
15. **Gill R. D.** Analiz mnogomernykh dannykh tipa vremeni zhizni. Chast' 2. Metody [Multivariate Survival Analysis. Part 2. Methods] / Teor. Veroyatn. Primen. 1992. Vol. 37. Issue 2. P. 307 – 328 [in Russian].
16. **Abdushukurov A. A.** Neparametricheskie otsenki funktsii vyzhivaniya na ploskosti po tsenzurirovannym nablyudeniyam [Nonparametrical estimates of survival function on plane by censored observations] / Uzb. Matem. Zh. 2004. N 2. P. 3 – 11 [in Russian].
17. **Muradov R. S., Abdushukurov A. A.** Otsenivanie mnogomernykh raspredelenii i ikh smesei po nepolnym dannym [Estimation of multivariate distributions and there mixes by incomplete data]. — LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 123 p. [in Russian].