

Исследование структуры и свойств

Structure and properties research

**Физические методы
исследования и контроля**

**Physical methods
of research and monitoring**

DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-9-34-40>

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТИРОВОК ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С НИЗКОЙ СИММЕТРИЕЙ РЕШЕТКИ И ОБРАЗЦА ГАРМОНИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

© **Александра Сергеевна Колянова**

Институт металлургии и материаловедения имени А. А. Байкова РАН (ИМЕТ РАН), Россия, 119334, Москва, Ленинский пр-т, д. 49; e-mail: sasha-kolianova@yandex.ru

*Статья поступила 19 января 2023 г. Поступила после доработки 27 января 2023 г.
Принята к публикации 22 мая 2023 г.*

Многие свойства поликристаллических материалов зависят от кристаллографической текстуры, наиболее полную информацию о которой дает функция распределения ориентировок (ФРО). Основная задача количественного текстурного анализа — восстановление ФРО по ее двумерным проекциям — полюсным фигурам, получаемым методами рентгеновской либо нейтронной дифракции. В работе представлены результаты восстановления ФРО для материалов с низкой симметрией решетки и образца с использованием гармонического метода. Метод основан на разложении ФРО в ряд Фурье по трехмерным симметричным сферическим функциям. Использовали действительные функции — линейные комбинации соответствующих комплексных сферических функций. Исследовали модельную однокомпонентную текстуру и текстуру образца сплава магния, подвергнутого равноканальному угловому прессованию. Текстуры характеризуются гексагональной симметрией решетки и триклинной симметрией образца. В обоих случаях RP -факторы и погрешность расчета ФРО, применяемые для проверки адекватности решения, показали хорошее совпадение расчетных и исходных данных. Получено также, что на ФРО образца сплава магния присутствуют две текстурные компоненты $(\bar{1}2\bar{1}6)[12\bar{1}1]$ и $(\bar{1}2\bar{1}6)[\bar{1}211]$ с максимальными интенсивностями 13,81 и 2,23 соответственно. Полученные результаты могут быть использованы при текстурных исследованиях керамики, горных пород и других неметаллических материалов с низкой симметрией.

Ключевые слова: функция распределения ориентировок; гармонический метод; коэффициенты Фурье; сферические гармоники; низкая симметрия.

RESTORATION OF THE ORIENTATION DISTRIBUTION FUNCTION FOR MATERIALS WITH LOW LATTICE AND SAMPLE SYMMETRY USING THE HARMONIC METHOD

© **Aleksandra S. Kolyanova**

Baikov Institute of Metallurgy and Materials Science, RAS (IMET RAS), 49, Leninsky prosp., Moscow, 119334, Russia; e-mail: sasha-kolianova@yandex.ru

Received January 19, 2023. Revised January 27, 2023. Accepted May 22, 2023.

A lot of the properties polycrystalline materials depend on their crystallographic texture. The most complete information about the texture can be obtained from the orientation distribution function (ODF). We present the results of recovering ODF using series expansion technique for materials with low crystal and sample symmetry. The technique of ODF restoration is based on its Fourier series expansion with symmetrical spherical harmonic functions. Real spherical harmonics which are linear combinations of general spherical harmonics were used. The model single-component texture as well as the real texture of magnesium alloy sample subjected to equal-channel angular pressing have been studied. Textures are characterized by hexagonal crystal symmetry and triclinic sample symmetry. In both cases RP -factors and

ODF calculation errors that were used as reliability criteria of ODF reconstruction showed good agreement between the calculated and experimental data. It was also revealed that the ODF of a magnesium alloy sample subjected to equal-channel angular pressing contains two texture components $(\bar{1}2\bar{1}6)[\bar{1}2\bar{1}1]$ and $(\bar{1}2\bar{1}6)[\bar{1}2\bar{1}1]$ with maximum intensity values of 13.81 and 2.23, respectively. The results obtained can be used for texture studies of ceramics, rocks and other non-metallic materials characterized by a lower symmetry.

Keywords: orientation distribution function; series expansion; Fourier coefficients; spherical harmonics; low symmetry.

Введение

Большинство используемых в промышленности материалов (металлы и сплавы, керамики и минералы) имеют поликристаллическую структуру. Многие свойства поликристаллов зависят в том числе от того, как составляющие их отдельные зерна ориентированы относительно фиксированной внешней системы координат. Если зерна в материале имеют случайные ориентировки, то такое состояние называют бестекстурным. В случае преимущественных ориентировок говорят о кристаллографической текстуре [1, 2].

Наиболее полную информацию о текстуре материала дает функция распределения ориентировок (ФРО) — функция распределения плотности вероятности, нормированная на объем ориентационного пространства. Основная задача количественного текстурного анализа — восстановление ФРО по ее двумерным проекциям — полюсным фигурам (ПФ), получаемым с помощью рентгеновского либо нейтронного дифрактометра.

Восстановить ФРО можно с помощью так называемых прямых методов (WIMV-метод, метод произвольно определенных ячеек — ADC (arbitrarily defined cells), векторный метод), основанных на том, что дискретная полусфера ПФ соответствует семействам проекционных трубок в пространстве ФРО [3 – 7]. Достоинство прямых методов — строгое выполнение условия неотрицательности ФРО, недостаток — возникновение ложных максимумов.

Применяют также метод компонент, при котором ФРО описывается набором стандартных компонент с различными весами и параметрами рассеяния [8, 9]. Его преимущества: малое количество текстурных компонент, прямое получение информации об объемных долях полученных компонент, выполнение условия неотрицательности ФРО, отсутствие ложных максимумов. Главный минус — сложность определения начальных значений параметров (текстурных компонент, их весов и рассеяний) из анализа ПФ.

Аналоги метода компонент — автоматизированный метод компонент, метод восстановления ФРО с помощью суперпозиции нормальных распределений и МТЕХ-метод [4, 10 – 12]. В них ФРО определяется в виде суперпозиции большо-

го числа стандартных распределений с фиксированным рассеянием.

Метод восстановления ФРО путем разложения в ряд Фурье по сферическим гармоникам (гармонический метод) отличается простотой, универсальностью, устойчивостью найденного решения [1, 3, 13, 14]. К его минусам относятся определение только четной части ФРО из-за особенностей дифракционного эксперимента, что приводит к появлению отрицательных значений и ложных максимумов [14 – 16], а также неприменимость для острых текстур.

Гармонический метод позволяет получить ФРО для любых классов материалов и любых симметрий образца, прежде всего для кубической или гексагональной симметрии образца и орторомбической симметрии решетки, характерных для текстур прокатки металлов. Для выполнения условия неотрицательности ФРО и устранения ложных максимумов в гармоническом методе используют такие подходы, как регуляризация решения, метод положительности [17, 18].

Цель работы — восстановление ФРО для материалов с низкой симметрией решетки и образца гармоническим методом.

Методика

Первичная обработка экспериментальных ПФ включала поправку на эффект дефокусировки, возникающий при наклоне образца в процессе съемки ПФ, симметризацию и псевдонормировку.

Поправочные коэффициенты для эффекта дефокусировки определяли согласно принятой методике [19, 20]. Для псевдонормировочных множителей N'_i использовали формулу [21]

$$N'_i = \frac{\int_0^{\Phi_{\max}} \int_0^{2\pi} \sin(\Phi) d\Phi d\beta}{\int_0^{\Phi_{\max}} \int_0^{2\pi} I(\Phi, \beta) \sin(\Phi) d\Phi d\beta}, \quad (1)$$

где Φ, β — радиальный и азимутальный углы на ПФ; $\Phi_{\max}$ — максимальный угол наклона при съемке ПФ; $I(\Phi, \beta)$ — измеренные значения интенсивности.

Симметризация заключается в уравнивании значений интенсивностей в симметричных точках на ПФ:

$$I^{\text{sym}}(\Phi_1, \beta_1) = I^{\text{sym}}(\Phi_2, \beta_2) = [I(\Phi_1, \beta_1) + I(\Phi_2, \beta_2)]/2, \quad (2)$$

где (Φ_1, β_1) , (Φ_2, β_2) — симметричные точки на ПФ; $I(\Phi_i, \beta_i)$, $I^{\text{sym}}(\Phi_i, \beta_i)$ — фактически измеренные и симметризованные значения интенсивности.

Симметризация необходима для уменьшения статистических ошибок экспериментальных ПФ, уровень которых можно оценить по разностям интенсивности в симметричных точках [17]. Отметим, что в случае триклинной симметрии образца выбирают плоскость, относительно которой рефлексы на ПФ располагаются симметрично, и проводят симметризацию относительно этой плоскости.

Полюсная плотность $P_h(\mathbf{y}) = N_h I_h(\mathbf{y})$ связана с ФРО $f(g)$ следующими соотношениями [1, 16]:

$$P_h(\mathbf{y}) = [Rf(\mathbf{h}, \mathbf{y}) + Rf(-\mathbf{h}, \mathbf{y})]/2, \\ Rf(\mathbf{h}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \int f(g) dg, \quad (3)$$

где $\mathbf{h}$ — кристаллографическое направление; $\mathbf{y}$ — направление в образце; g — ориентировка в пространстве углов Эйлера (интегрирование проводится по всем ориентировкам, переводящим направление $\mathbf{h}$ в направление $\mathbf{y}$: $g\mathbf{h} = \mathbf{r}$).

Гармонический метод восстановления ФРО основан на разложении ее в ряд Фурье по трехмерным симметричным сферическим функциям $\dot{T}_l^{\mu\vartheta}$ [1]:

$$f(g) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{\mu}^{M(l)} \sum_{\vartheta}^{N(l)} C_l^{\mu\vartheta} \dot{T}_l^{\mu\vartheta}, \quad (4)$$

где g — ориентировка в Эйлеровом пространстве; $C_l^{\mu\vartheta}$ — коэффициенты разложения ($l = 0, 2, \dots$, $l_{\max}$ — порядок сферических функций; $\mu = 1, 2, \dots, M(l)$, $\vartheta = 1, 2, \dots, N(l)$ — индексы суммирования; $M(l)$, $N(l)$ — число линейно независимых гармоник, зависящее от симметрии решетки и образца соответственно).

Симметричные сферические функции $\dot{T}_l^{\mu\vartheta}$ — линейная комбинация обобщенных гармонических функций T_l^{mn} [1]:

$$\dot{T}_l^{\mu\vartheta} = \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l \ddot{A}_l^{m\mu} \dot{A}_l^{n\vartheta} T_l^{mn},$$

$$T_l^{mn} = e^{im\varphi_1} P_l^{mn}(\cos \Phi) e^{in\varphi_2}, \quad (5)$$

где $\ddot{A}_l^{m\mu}$, $\dot{A}_l^{n\vartheta}$ — коэффициенты, обеспечивающие выполнение условий симметрии решетки и образца; $P_l^{mn}(\cos \Phi)$ — обобщенные присоединенные функции Лежандра.

ФРО, описываемой уравнением (2), соответствует полюсная плотность на прямой полюсной фигуре (ППФ) [1]:

$$P_h(\mathbf{y}) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{\mu}^{M(l)} \sum_{\vartheta}^{N(l)} \frac{4\pi}{2l+1} C_l^{\mu\vartheta} \ddot{k}_l^{*\mu}(\mathbf{h}) \dot{k}_l^{\vartheta}(\mathbf{y}), \quad (6)$$

где $\ddot{k}_l^{*\mu}(\mathbf{h})$, $\dot{k}_l^{\vartheta}(\mathbf{y})$ — поверхностные сферические гармоники (surface spherical harmonics), обладающие симметрией решетки и образца (звездочкой обозначено комплексное сопряжение).

Обратная полюсная фигура описывается аналогичным образом.

Симметричные поверхностные гармоники $\dot{k}_l^{\vartheta}$ аналогично сферическим функциям $\dot{T}_l^{\mu\vartheta}$ — линейная комбинация нормированных сферических поверхностных гармоник k_l^n [1]:

$$\dot{k}_l^{\vartheta}(\Phi, \beta) = \sum_{n=-l}^l \dot{A}_l^{n\vartheta} k_l^n(\Phi, \beta), \\ k_l^n(\Phi, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\beta} \bar{P}_l^n(\cos \Phi), \quad (7)$$

где $\dot{A}_l^{n\vartheta}$ — коэффициенты симметрии; $\bar{P}_l^n(\cos \Phi)$ — нормированные присоединенные функции Лежандра.

Сферические гармоники $k_l^n(\Phi, \beta)$ и T_l^{mn} в общем случае комплексные и, как следствие, коэффициенты $C_l^{\mu\vartheta}$ также комплексные. Однако можно ввести действительные функции $\bar{k}_l^n(\Phi, \beta)$ и $\bar{T}_l^{mn}$, представляющие собой линейные комбинации соответствующих комплексных функций. Симметричные действительные гармоники определяются аналогично симметричным комплексным гармоникам согласно (5) и (7). Действительные гармоники также образуют ортогональный базис и могут использоваться для разложения ФРО в ряд Фурье [22].

Неизвестные коэффициенты разложения $C_l^{\mu\vartheta}$ определяли путем минимизации квадрата невязки r^2 :

$$r^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J w_{i,j} \left\{ N_i I_{\mathbf{h}_i}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j) - P_{\mathbf{h}_i}^{\text{model}}(\mathbf{y}_j) \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (8)$$

где I , J — количество ПФ и число измеренных точек в образце; $I_{\mathbf{h}_i}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j)$ — значения измеренной интенсивности для i -й ПФ в j -й точке; N_i — неизвестные нормировочные множители для i -й ПФ;

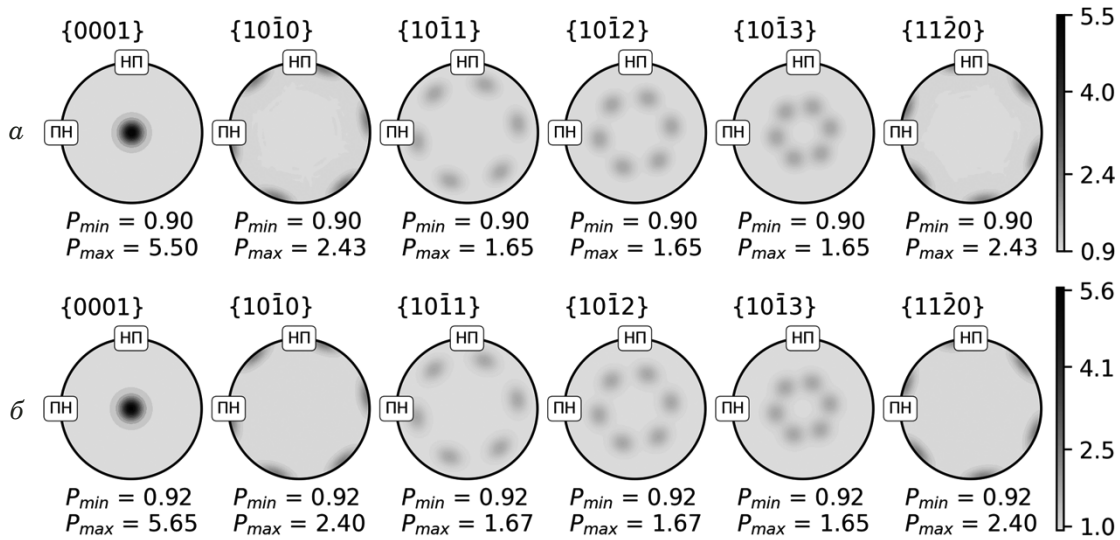


Рис. 1. Исходные (а) и расчетные (б) ППФ для модельной однокомпонентной текстуры

Fig. 1. Initial (a) and calculated (b) direct pole figures for model single-component basal texture

$P_{h_i}^{\text{model}}(y_j)$ — модельное значение полюсной плотности, определяемое по уравнению (6); w_{ij} — вес, определяющий значимость измерения.

Для решения (3) часто используют метод наименьших квадратов. Записав неизвестные значения $C_l^{\mu 9}$ в виде вектора $\mathbf{c}$, измеренные полюсные плотности $P_{h_i}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j)$ в виде вектора $\mathbf{p}$ и введя матрицу

$$A_{ij} = \frac{4\pi}{2l+1} \ddot{k}_l^{\mu}(h_i) \dot{k}_l^{\nu}(y_j),$$

получаем следующее выражение [23]:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{p}. \quad (9)$$

Ввиду плохой обусловленности матрицы $\mathbf{A}$, вызванной статистическими ошибками в исходных данных и неоптимальностью дифракционного эксперимента, решение может содержать большие ошибки, для уменьшения которых применяли регуляризацию решения [17]. После использования ридж-регрессии (ridge regression) решение принимает следующий вид [17, 24]:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{p}, \quad (10)$$

где λ — параметр регуляризации; $\mathbf{Q}$ — функционал гладкости (в данном случае выбран как $Q = l(l+1)/(2l+1)$, $l = 0, 2, \dots, L$).

Корректно подобранный параметр регуляризации λ позволяет снизить вероятность появления ложных максимумов и больших отрицательных значений ФРО без значительного занижения интенсивности. Обратная матрица в уравнениях (9) и (10) определяется с помощью сингулярного разложения.

Погрешность определения i -го коэффициента составляет [17]

$$\Delta c_i = \sqrt{D[c_i]} = \sqrt{\sigma^2 [(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{Q})^{-1}]_{ii}}, \quad (11)$$

где $D[c_i]$ — дисперсия; $\sigma^2 = r^2/(m-n)$; r^2 — сумма квадратов невязок, полученных в результате решения; m, n — число строк и столбцов матрицы $\mathbf{A}$.

Для нахождения неизвестных нормировочных множителей N_i необходимо использовать итерационный алгоритм, поскольку на N_i накладывается дополнительное условие: $N_i > 0$. В нашем случае нормировочные множители находили с применением TRF-метода [25].

Погрешность расчета ФРО составляет [17]

$$\Delta f = \sqrt{\frac{1}{2l+1} \sum_{l, \mu, 9} (\Delta C_l^{\mu 9})^2}. \quad (12)$$

Для проверки адекватности решения использовали RP -фактор. RP -фактор для i -й ПФ и средний RP -фактор рассчитывали как [8, 26]

$$RP_{h_i}(x) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{|P_{h_i}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j) - P_{h_i}^{\text{calc}}(\mathbf{y}_j)|}{P_{h_i}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j)} \times \theta[x, P_{h_i}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j)], \quad (13)$$

$$\theta[x, P_{h_i}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j)] = \begin{cases} 1, & P_{h_i}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j) > x \\ 0, & P_{h_i}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j) \leq x, \end{cases} \quad (14)$$

$$RP(x) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I RP_{h_i}(x). \quad (15)$$

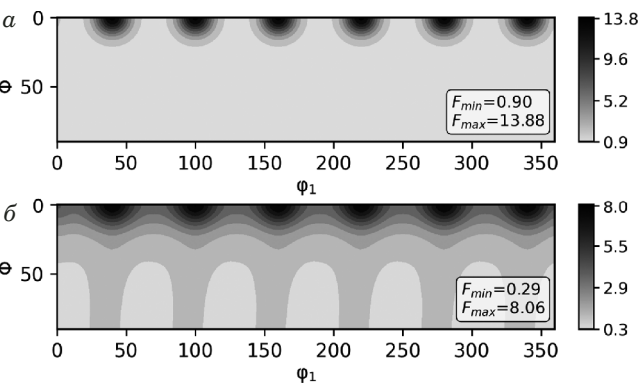


Рис. 2. Сечения исходной (а) и расчетной (б) ФРО для модельной однокомпонентной текстуры ($\varphi_2 = 0$)

Fig. 2. Sections of the initial (a) and calculated (b) ODF for model single-component basal texture ($\varphi_2 = 0$)

Заметим, что рассчитанные описанным методом коэффициенты ФРО соответствуют только четной части ФРО. Для приближенного определения нечетной части можно использовать итерационный подход положительности [18].

Обсуждение результатов

Гармонический метод восстановления ФРО применяли к модельной однокомпонентной ба-

зисной текстуре и текстуре образца сплава Mg – 4,5 % Nd, подвергнутого равноканальному угловому прессованию. Симметрия решетки в обоих случаях соответствует симметрии решетки магния и является гексагональной с точечной группой 6/mmm, симметрия образца — триклинная, максимальная степень разложения в ряд $l_{\max} = 24$ (экспериментальные ПФ [27]).

Параметр	Текстура	
	Модельная	Сплав Mg – 4,5 % Nd
$RP(0,5)$, %	0,16	15,46
$RP(1,0)$, %	0,32	11,07
Δf	0,0003	0,033

зисной текстуре и текстуре образца сплава Mg – 4,5 % Nd, подвергнутого равноканальному угловому прессованию. Симметрия решетки в обоих случаях соответствует симметрии решетки магния и является гексагональной с точечной группой 6/mmm, симметрия образца — триклинная, максимальная степень разложения в ряд $l_{\max} = 24$ (экспериментальные ПФ [27]).

Синтетическая базисная текстура задана единственным компонентом с углами Эйлера $\varphi_1 = 20^\circ$, $\Phi = \varphi_2 = 0^\circ$ и весом 0,1. В качестве входных данных использовали шесть ППФ: {001}, {100}, {101}, {102}, {103}, {110}.

На рис. 1 представлены исходные и расчетные ППФ, на рис. 2 — сечения при $\varphi_2 = 0$ истин-

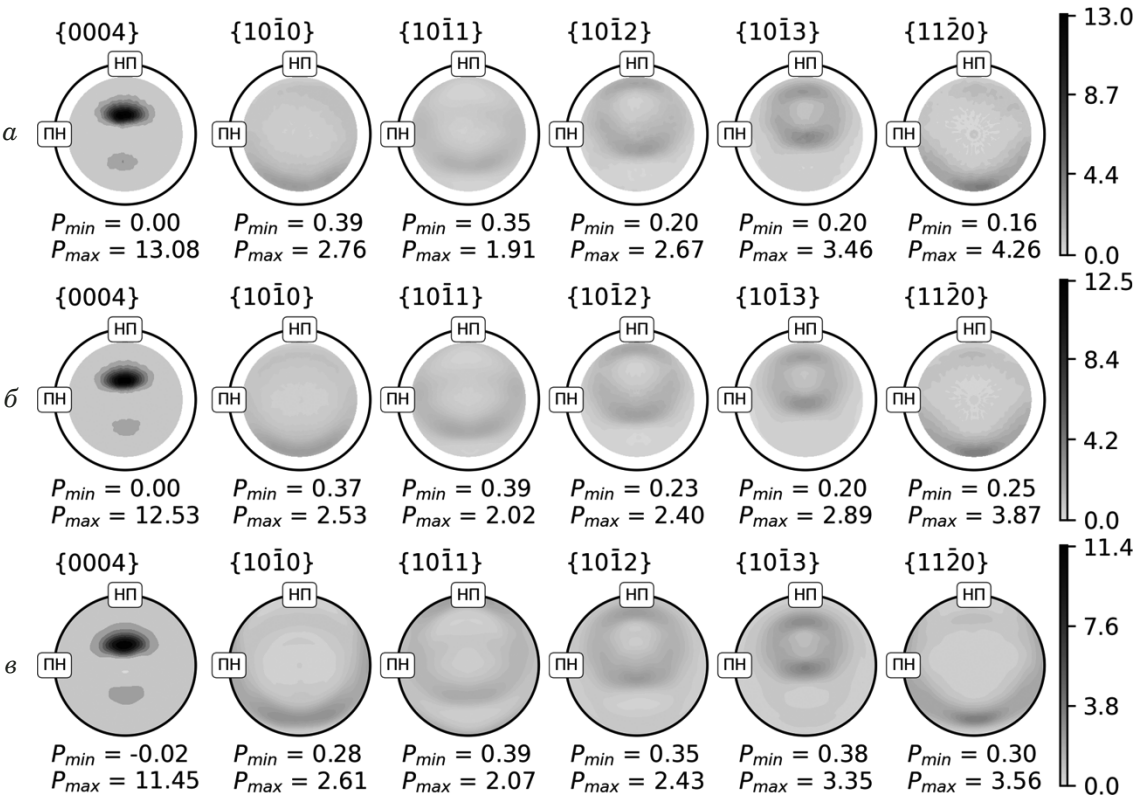


Рис. 3. Исходные неполные (а), симметризованные неполные (б) и расчетные полные (в) ППФ для образца сплава Mg – 4,5 % Nd

Fig. 3. Initial incomplete (a), symmetrized incomplete (b) and calculated complete (c) direct pole figures for Mg – 4.5% Nd alloy sample

ной (модельной) и расчетной ФРО. RP -факторы и расчетные ошибки ФРО для модельной и реальной текстур приведены в таблице.

RP -факторы и Δf показывают хорошее совпадение расчетных и исходных данных, однако в расчетной ФРО присутствуют ложные максимумы, а ее максимальная плотность ниже, чем у исходной. Степень неопределенности ФРО лежит в интервале $0 \leq f(g) \leq 2$ [1], следовательно, ложные максимумы на данной восстановленной ФРО можно отнести к бестекстурному состоянию. Таким образом, главным различием расчетной и модельной ФРО остается разница в максимальной плотности.

Для восстановления ФРО образца сплава использовали такой же набор ППФ, что и для модельной текстуры. На рис. 3 представлены исходные и расчетные ППФ, на рис. 4 — сечение восстановленной ФРО при $\varphi_2 = 0$.

RP -факторы и Δf в случае текстуры сплава выше, чем для модельной текстуры, однако они также показывают хорошее совпадение расчетных и исходных данных. Вместе с тем на ФРО присутствуют отрицательные значения, появление которых связано с ограничениями гармонического метода. Отрицательные значения ФРО по абсолютной величине значительно меньше максимальной интенсивности. На ФРО присутствуют две текстурные компоненты $g_1 = \{95, 25, 0\}$ и $g_2 = \{270, 30, 0\}$ с максимальными интенсивностями 13,81 и 2,23 соответственно. Индексы Миллера-Браве для данных компонент — $(\bar{1}2\bar{1}6)[1\bar{2}11]$ и $(\bar{1}2\bar{1}6)[\bar{1}2\bar{1}1]$.

Заключение

Модельная однокомпонентная текстура и текстура образца сплава Mg – 4,5 % Nd, подвергнутого равноканальному угловому прессованию, характеризуются гексагональной симметрией решетки и триклинной симметрией образца. Проведенные исследования с использованием гармонического метода показали, что в обоих случаях RP -факторы и погрешность расчета ФРО имеют хорошее совпадение расчетных и исходных данных. Кроме того, на ФРО образца сплава магния присутствуют две текстурные компоненты $(\bar{1}2\bar{1}6)[1\bar{2}11]$ и $(\bar{1}2\bar{1}6)[\bar{1}2\bar{1}1]$ с максимальными интенсивностями 13,81 и 2,23.

Таким образом, примененный гармонический метод восстановления ФРО — эффективный инструмент для текстурных исследований различных материалов. С его помощью можно восстанавливать ФРО и полные ПФ. Метод позволяет расширить круг материалов для текстурных исследований и включить в него керамики, горные породы и другие неметаллические материалы, характеризующиеся низкой симметрией.

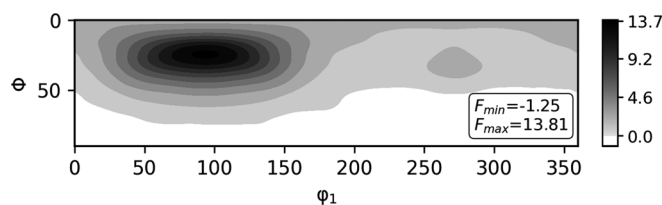


Рис. 4. Сечение восстановленной ФРО образца сплава Mg – 4,5 % Nd ($\varphi_2 = 0$)

Fig. 4. Section of the restored ODF for Mg – 4.5% Nd alloy ($\varphi_2 = 0$)

Финансирование

Работа выполнена по государственному заданию № 075-01176-23-00.

ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. **Bunge H.-J.** Texture Analysis in Materials Science: Mathematical Methods. — Elsevier, 2013. — 614 p.
2. **Engler O., Randle V.** Introduction to texture analysis: macrotexture, microtexture, and orientation mapping. — CRC Press, 2009. — 488 p.
3. **Raabe D.** Examination of the iterative series expansion method for quantitative texture analysis / Textures and Microstructures. 1995. Vol. 23. P. 115 – 129. DOI: 10.1155/TSM.23.115
4. **Serebryany V. N., Kolyanova A. S.** Restoration of the orientation distribution functions from direct polar figures using superposition of normal distributions and arbitrarily defined cells (comparative analysis) / Industr. Lab. Diagn. Mater. 2020. Vol. 86. N 9. P. 37 – 44 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-9-37-44
5. **Caleyo F., Baudin T., Mathon M., et al.** Comparison of several methods for the reproduction of the orientation distribution function from pole figures in medium to strong textured materials / The European Physical Journal Applied Physics. 2001. Vol. 15. N 2. P. 85 – 96. DOI: 10.1051/epjap:2001170
6. **Wenk H., Pawlik K., Pospiech J., et al.** Deconvolution of Superposed Pole Figures by Discrete ODF Methods: Comparison of ADC and WIMV for Quartz and Calcite with Trigonal Crystal and Triclinic Specimen Symmetry / Textures and Microstructures. 1994. Vol. 22. N 233. P. 233 – 260. DOI: 10.1155/TSM.22.233
7. **Schaeben H.** Mathematical Modeling of the Orientation Distribution Function by the Vector Method of Quantitative Texture Analysis / Physica Status Solidi (b). 1984. Vol. 123. N 2. P. 425 – 434. DOI: 10.1002/pssb.2221230204
8. **Ivanova T. M., Savelova T. I.** Robust Method of Approximating the Orientation Distribution Function by Canonical Normal Distributions / The Physics of Metals and Metallography. 2006. Vol. 101. N 2. P. 114 – 118. DOI: 10.1134/S0031918X06020037
9. **Helming K.** Texture approximations by model components / Materials Structure. 1998. Vol. 5. N 1. P. 3 – 10.
10. **Helming K.** An Automated Component Method / Materials Science Forum. 1998. Vol. 273 – 275. P. 119 – 124. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.273-275.119
11. **Savyolova T. I., Kurtasov S. F.** ODF restoration by orientations grid / Proceeding of the 14th International Conference on Texture of Materials. — Louven, Belgium, 2005. P. 1693 – 1697.
12. **Hielscher R., Schaeben H.** A novel pole figure inversion method: specification of the MTEX algorithm / Journal of Applied Crystallography. 2008. Vol. 41. N 6. P. 1024 – 1037. DOI: 10.1107/S0021889808030112
13. **Roe R.-J.** Description of Crystallite Orientation in Polycrystalline Materials. III. General Solution to Pole Figure Inversion /

- Journal of Applied Physics. 1965. Vol. 36. N 6. P. 2024 – 2031. DOI: 10.1063/1.1714396
14. **Matthies S., Vinel G., Helming K.** Standard Distributions in Texture Analysis: Maps for the Case of Cubic-orthorhombic Symmetry. — Akademie-Verlag Berlin, 1987. — 442 p.
 15. **Van Houtte P.** A Method for the Generation of Various Ghost Correction Algorithms / Texture Stress and Microstructure 1991. Vol. 13. N 4. P. 199 – 212. DOI: 10.1155/TSM.13.199
 16. **Matthies S.** On the Principle of Conditional Ghost Correction and its Realization in Existing Correction Concepts / Textures and Microstructures. 1991. Vol. 14. P. 1 – 12. DOI: 10.1155/tsm.14-18.1
 17. **Serebryany V. N., Kurtasov S. F., Litvinovich M. A.** The ODF error study in pole figures conversion using the statistical method of ridge estimates / Industr. Lab. Diagn. Mater. 2007. Vol. 73. N 4. P. 29 – 34 [in Russian].
 18. **Dahms M., Bunge H.-J.** A Positivity Method for the Determination of Complete Orientation Distribution Functions / Textures and Microstructures. 1998. Vol. 10. N 1. P. 21 – 35. DOI: 10.1155/TSM.10.21
 19. **Liu Y., Depre L., De Buyser L., et al.** Intensity Correction in Texture Measurement of Polycrystalline Thin Films By X-Ray Diffraction / Textures and Microstructures. 2003. Vol. 35. N 3/4. P. 283 – 290. DOI: 10.1080/07303300310001597035
 20. **Saleh A. A., Vu V. Q., Gazder A. A.** Correcting intensity loss errors in the absence of texture-free reference samples during pole figure measurement / Materials Characterization. 2016. Vol. 118. P. 425 – 430. DOI: 10.1016/j.matchar.2016.06.018
 21. **Kocks U. F., Tome C. N., Wenk H.-R.** Texture and anisotropy: preferred orientations in polycrystals and their effect on materials properties. — Cambridge: Cambridge University Press, 1998. — 676 p.
 22. **Raymond O., Fuentes L., Gomez J.** Computer-oriented real spherical harmonics for texture and properties analyses / Textures and Microstructures. 1996. Vol. 28. P. 93 – 104. DOI: 10.1155/TSM.28.93
 23. **Draper N., Smith H.** Applied Regression Analysis. Vol. 1. — Moscow: Finansy i statistika, 1986. — 366 p. [Russian translation].
 24. **Draper N., Smith H.** Applied Regression Analysis. Vol. 2. — Moscow: Finansy i statistika, 1986. — 351 p. [Russian translation].
 25. **Branch M., Coleman T., Li Y.** A Subspace, Interior and Conjugate Gradient Method for Large-Scale Bound-Constrained Minimization Problems / SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. Vol. 21. N 1. P. 1 – 23. DOI: 10.1137/S1064827595289108
 26. **Chateigner D.** Reliability criteria in quantitative texture analysis with experimental and simulated orientation distributions / Journal of Applied Crystallography. 2005. Vol. 38. P. 603 – 611. DOI: 10.1107/S0021889805013695
 27. **Ivanova T. M., Serebryany V. N.** Simulation of complex magnesium alloy texture using the axial component fit method with central normal distributions / Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 937. P. 012017. DOI: 10.1088/1742-6596/937/1/012017