

**Механика материалов:
прочность, ресурс, безопасность****Materials mechanics:
strength, durability, safety**DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-9-53-63>**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЖИВУЧЕСТИ ПЛАСТИНЫ
СО СКВОЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ДВУХОСНОГО
СТЕСНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ПО ЕЕ ФРОНТУ**© Алексей Михайлович Покровский^{1*}, Юрий Григорьевич Матвиенко²,
Максим Петрович Егранов¹¹ Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1; *e-mail: pokrovsky@bmstu.ru² Институт машиноведения РАН им. А. А. Благонравова, Россия, 101000, Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4.

*Статья поступила 17 января 2023 г. Поступила после доработки 16 февраля 2023 г.
Принята к публикации 30 марта 2023 г.*

Изложена методика оценки живучести пластинчатых элементов конструкций с учетом двухосного стеснения деформаций по фронту трещины нормального отрыва. Отмечено отсутствие литературных источников, в которых рост трещины прогнозировали бы с использованием T_{xx} - и T_{zz} -напряжений, являющихся несингулярными членами в разложении Вильямса для напряжений у вершины трещины. В основу расчета скорости роста усталостной трещины положено уравнение Пэриса, в которое вместо размаха обычного коэффициента интенсивности напряжений (КИН), подставляли размах эффективного КИН. При этом в выражение для эффективного КИН, кроме обычного КИН, входят T_{xx} - и T_{zz} -напряжения. Данный подход позволяет учесть при прогнозировании живучести, например, толщину пластины, что невозможно при использовании только КИН и T_{xx} -напряжений. Формула для эффективного КИН выведена на основе предположения, что тангенциальные напряжения в зоне предразрушения равны локальной прочности материала. При этом размер зоны предразрушения и локальная прочность материала определены с учетом T_{xx} - и T_{zz} -напряжений. В основу численного моделирования положена авторская конечно-элементная программа, позволяющая вычислять T_{xx} - и T_{zz} -напряжения по фронту сквозной трещины в пластине, подверженной циклическому одноосному и двухосному растяжению. Показано, что несингулярные T_{xx} -напряжения описывают влияние двухосности нагружения на долговечность, а T_{zz} -напряжения — влияние толщины пластины на долговечность. Установлено, что с увеличением толщины пластины из-за повышения стеснения деформаций по фронту трещины значение эффективного КИН возрастает, поэтому трещина растет быстрее, а долговечность снижается. Отмечено, что с повышением коэффициента асимметрии цикла нагружения при условии постоянного размаха напряжений максимальный эффективный КИН быстрее достигает критического значения, равного вязкости разрушения, поэтому долговечность при этом уменьшается. При одноосном циклическом растяжении долговечность, прогнозируемая по предлагаемой методике, выше, чем полученная при классическом подходе, когда в уравнение Пэриса подставляется размах обычного КИН. Для двухосного циклического растяжения пластины увеличение напряжений, направленных параллельно берегам трещины, приводит к повышению стеснения деформаций по фронту трещины, а следовательно, к снижению долговечности по сравнению с определенной классическим подходом. Другими словами, классическая теория не всегда дает консервативную оценку живучести, что свидетельствует о целесообразности использования разработанной методики расчета на живучесть с учетом двухосного стеснения деформаций по фронту трещины.

Ключевые слова: механика разрушения; эффективный коэффициент интенсивности напряжений; T -напряжения; живучесть; трещина нормального отрыва.

**PREDICTION OF THE DURABILITY OF A PLATE WITH A THROUGH CRACK
TAKING INTO ACCOUNT BIAxIAL CONSTRAINTS OF DEFORMATIONS
ALONG THE FRONT OF A NORMAL RUPTURE CRACK**© Alexei M. Pokrovskii^{1*}, Yury G. Matvienko², Maksim P. Egranov¹

¹ Bauman Moscow State Technical University, 5, 2-ya Baumanskaya ul., Moscow, 105005, Russia;
*e-mail: pokrovsky@bmstu.ru

² Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, 4, Maly Kharitonievsky per., Moscow, 101000, Russia.

Received January 17, 2023. Revised February 16, 2023. Accepted March 30, 2023.

A methodology for evaluating the durability of plate elements of structures taking into account biaxial constraints of deformations along the front of a normal rupture crack (Mode I crack) is presented. The absence of the available literature data in which the prediction of the crack growth is carried out using T_{xx} - and T_{zz} -stresses which are non-singular terms in the Williams expansion for stresses at the crack tip is noted. The calculation of the fatigue crack growth rate is based on the Paris equation in which the range of the effective SIF is used instead of the range of the usual stress intensity factor (SIF). In this case, the expression for the effective SIF includes T_{xx} - and T_{zz} -stresses in addition to the usual SIF. This approach provides taking into account, for example, the thickness of the plate for predicting the durability, which is impossible when only the SIF and T_{xx} -stresses are used. The formula for the effective SIF is derived proceeding from the assumption that tangential stresses in the pre-fracture zone are equal to the local strength of the material. In this case, the size of the pre-fracture zone and the local strength of the material are determined taking into account T_{xx} - and T_{zz} -stresses. The numerical simulation is based on the proprietary finite-element program which allows calculating T_{xx} - and T_{zz} -stresses at the front of a through crack in a plate subjected to cyclic uniaxial and biaxial tension. It is shown that nonsingular T_{xx} -stresses primarily describe the effect of biaxial loading on the survivability, whereas T_{zz} -stresses describe the effect of the plate thickness on the survivability. It is shown that with increasing thickness of the plate the value of the effective SIF increases due to the increased constraint along the crack front, thus increasing the crack growth rate and decreasing the survivability. With an increase in the stress ratio R , under the condition of a constant stress range, the maximum effective SIF reaches the critical value equal to the fracture toughness much faster thus reducing the durability. It is shown that for uniaxial cyclic tension, the durability predicted by the proposed methodology is higher than that in the classical approach, when the conventional SIF is used in the Paris equation. For biaxial cyclic tension of a plate, an increase in stresses directed parallel to the crack banks leads to an increase of crack front constraints and therefore to a decrease in the durability compared to the classical approach. In other words, the classical theory does not always provide a conservative estimate of the durability, which indicates the expediency of using the developed method for calculating the durability taking into account biaxial constraints of deformations along the crack front.

Keywords: fracture mechanics; effective stress intensity factor; T-stress; durability; Mode I crack.

Введение

Значительное количество деталей и конструкций при эксплуатации подвергается нагрузкам, переменным во времени. Причем многие из них можно отнести к пластинчатым элементам, работающим в условиях циклически изменяющейся растягивающей нагрузки. С увеличением количества циклов нагружения в таких деталях происходит зарождение и рост усталостных трещин, которые могут привести к разрушению. Основной задачей расчета на живучесть является определение долговечности деталей, т.е. вычисление количества циклов нагружения, при котором трещина вырастет от исходного размера до критического, при котором происходит разрушение. При этом важно разработать численные методы, позволяющие максимально точно оценить живучесть деталей. Известно достаточно много работ, касающихся прогнозирования роста усталостных трещин. Как правило, для прогнозирования роста усталостной трещины используют уравнения Пэриса и Формана [1], например [2 – 5], в том числе и с учетом остаточных напряжений [6].

Наиболее часто при оценке живучести деталей и конструкций применяют уравнение Пэриса, описывающее линейный участок кинетической диаграммы усталостного разрушения. Для трещины типа I это уравнение имеет вид [1]

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K_I)^m, \quad (1)$$

где $\Delta K_I = K_I^{\max} - K_I^{\min}$ — размах КИН для положительных циклов нагружения, определяемый по значениям максимального ($\sigma_{\max}$) и минимального ($\sigma_{\min}$) напряжений цикла; l — длина трещины; N — число циклов нагружения; C, m — эмпирические коэффициенты.

По уравнению (1) вычисляют увеличение длины трещины за шаг ΔN , а по значению длины на шаге — максимальный КИН по фронту трещины $K_I^{\max}$. За долговечность принимают количество циклов нагружения, при котором $K_I^{\max}$ равняется вязкости разрушения K_{Ic} , т.е. будет выполняться силовой критерий разрушения Ирвина [1]

$$K_I^{\max} = K_{Ic}. \quad (2)$$

Кроме критерия Ирвина, на шаге обычно проверяют условие, что трещина не вышла за границы тела. Указанный подход применяли, например, авторы работ [7 – 10]. Основным недостаток указанного подхода — пренебрежение стеснением деформаций по фронту трещины. Учесть стеснение деформаций при оценке живучести деталей можно посредством использования подходов двухпараметрической механики разрушения [11]. В этом случае в расчете, кроме КИН, используют несингулярные члены в разложении Вильямса для напряжений [12], так называемые T -напряжения, причем, как правило, — только T_{xx} -напряжения. Так, в статье [13] описано влияние T_{xx} -напряжений на скорость роста трещин при циклическом нагружении. В работе [14] использовали модифицированный закон Пэриса, учитывающий T_{xx} -напряжения. Авторы [15] для оценки живучести трубопровода с учетом остаточных сварочных напряжений применили уравнение Формана, в которое ввели полученную в [16] корректирующую эмпирическую функцию, зависящую от отношения T_{xx} -напряжений к пределу текучести материала. В [17] предложено в уравнение Пэриса вместо размаха КИН подставлять размах функции плотности энергии деформации S . Авторы [18] в выражении для S , кроме сингулярных членов, использовали несингулярные члены, в частности T_{xx} -напряжения. Однако выражение для S записывается для случая плоского напряженного состояния, поэтому в него входят только T_{xx} -напряжения. Известно [11], что с помощью T_{xx} -напряжений можно описать стеснение деформаций только в направлении распространения трещины. Для описания стеснения деформации вдоль фронта трещины необходимо привлекать T_{zz} -напряжения, входящие в разложение функции напряжений для трещины в объемном теле [19]. Только в этом случае можно учесть в расчете на живучесть толщину детали. Авторы [20 – 22] исследовали влияние толщины образца на стеснение деформаций посредством введения в расчет T_{zz} -напряжений.

Для трещины нормального отрыва с учетом первых несингулярных членов (T_{xx} - и T_{zz} -напряжений) в случае изотропного тела разложение для напряжений имеет вид [19]

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\Theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{3\Theta}{2} \right) + T_{xx},$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\Theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\Theta}{2} \sin \frac{3\Theta}{2} \right),$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \cos \frac{3\Theta}{2},$$

$$\sigma_z = \frac{2\mu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\Theta}{2} + T_{zz}, \quad T_{zz} = E\varepsilon_z + \Delta T_{xx}, \quad (3)$$

где σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} — компоненты напряженного состояния; T_{xx} и T_{zz} — T -напряжения, лежащие в плоскости трещины и направленные перпендикулярно и параллельно фронту трещины соответственно; E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона; r , Θ — радиус и угол в полярной системе координат, связанной с вершиной трещины.

При использовании в расчете на живучесть, кроме T_{xx} -напряжений, еще и T_{zz} -напряжений можно учесть двухосное стеснение деформаций по фронту трещины. В частности, для пластинчатых элементов конструкций принимается во внимание влияние толщины на долговечность, что исключено при использовании в расчете только T_{xx} -напряжений. На сегодняшний день авторам неизвестны опубликованные исследования, в которых живучесть объемных деталей с трещинами оценивалась бы с учетом двухосного стеснения деформаций по фронту трещины.

Цель данной работы — разработка методики оценки живучести с учетом двухосного стеснения деформаций по фронту трещины нормального отрыва, способной описать влияние толщины пластинчатых деталей на долговечность.

Расчетная схема

Исследовали пластину длиной 400 и шириной 200 мм из малоуглеродистой стали с внутренней сквозной соосной поперечной трещиной. Пластины подвергали циклически изменяющемуся растяжению как в одном, так и двух направлениях. При одноосном растяжении прикладывали только напряжения σ_y , а при двухосном — еще и σ_x (рис. 1).

В силу симметричности задачи относительно трех плоскостей в качестве расчетной схемы использовали только восьмую часть пластины (см. рис. 1). Грани пластины, совпадающие с координатными плоскостями xu и yz , закрепляли в направлении z и x соответственно. Грань, совпадающую с плоскостью xz , закрепляли по направлению y , только вне зоны трещины. Для решения использовали авторскую конечно-элементную программу [23]. Механические характеристики принимали согласно работе [7] для малоуглеродистой стали: предел текучести $\sigma_T = 500$ МПа; вязкость разрушения $K_{Ic} = 65$ МПа · м^{1/2}; параметры уравнения Пэриса — $m = 3,32$; $C = 7,45 \cdot 10^{-9}$ мм (МПа · м^{1/2})^{-3,32}.

Алгоритм расчета на живучесть

Живучесть растянутой в одном и двух направлениях пластины оценивали с использованием формулы Пэриса, но вместо размаха КИН

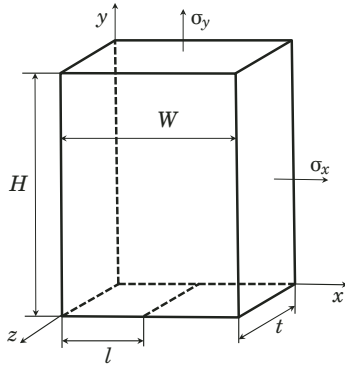


Рис. 1. Расчетная схема

Fig. 1. Calculation scheme

подставляли размах эффективного КИН [23] за цикл нагружения:

$$\Delta K_I^{\text{эф}} = K_I^{\text{эф}(\max)} - K_I^{\text{эф}(\min)}, \quad (4)$$

где $K_I^{\text{эф}(\max)}$, $K_I^{\text{эф}(\min)}$ — максимальный и минимальный эффективные КИН, вычисляемые по максимальному ($\sigma_{\max}$) и минимальному ($\sigma_{\min}$) напряжениям цикла соответственно.

Формула эффективного КИН для трещины нормального отрыва, описывающего стеснение деформаций по фронту трещины в поперечном направлении за счет T_{xx} -напряжений и в продольном направлении — за счет T_{zz} -напряжений, выведена ранее [23].

В данной работе выражение для эффективного КИН получено исходя из критериального соотношения, согласно которому тангенциальные напряжения в зоне предразрушения равны локальной прочности материала [11]. При этом локальная прочность записывается для объемного тела, т.е. с учетом не только T_{xx} , но и T_{zz} -напряжений [23]:

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_c}} = \sigma_0 = \frac{T_{xx} - 2T_{zz}}{2(1 - 2\mu)} + \sqrt{\left[\frac{T_{xx} - 2T_{zz}}{2(1 - 2\mu)} \right]^2 + \frac{\sigma_T^2 - T_{xx}^2 - T_{zz}^2 + T_{xx}T_{zz}}{(1 - 2\mu)^2}}, \quad (5)$$

где σ_0 — локальная прочность материала; r_c — размер зоны предразрушения.

Размер зоны предразрушения установлен на основании гипотезы пластичности Треска – Сен-Венана [24] аналогично тому, как это делается при вычислении поправки Ирвина на пластическую зону [25], также с учетом T -напряжений [23]:

$$r_c = \frac{(1 - 2\mu)^2}{2\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_T + T_{zz}} \right)^2. \quad (6)$$

Подставив формулу (6) в уравнение (5) и введя для упрощения параметры χ_x и χ_z , получим выражение [21]

$$K_I^{\text{эф}} = \frac{2(1 + \chi_z)K_I}{\sqrt{(\chi_x - 2\chi_z)^2 + 4(1 - \chi_x^2 - \chi_z^2 + \chi_x\chi_z) - \chi_x + 2\chi_z}}, \quad (7)$$

где $\chi_x = T_{xx}/\sigma_T$, $\chi_z = T_{zz}/\sigma_T$ — отношения T_{xx} и T_{zz} к пределу текучести. Значение K_I , входящее в формулу для эффективного КИН, вычисляли по формуле Федерсена [26], справедливой для пластины с отношением высоты к ширине, равным два и более:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l \sec \frac{l}{2W}}, \quad (8)$$

где $\alpha = l/W$ — отношение полудлины трещины к полуширине пластины. T_{xx} -напряжения в плоскости трещины определяли согласно выражению (3) при $\Theta = 0$ по формуле

$$T_{xx} = \sigma_x - \sigma_y. \quad (9)$$

При использовании формулы (9) T_{xx} -напряжения вычисляли в пяти точках на линии продолжения трещины для данной точки фронта. При этом значения для последних трех точек укладывались на прямую линию. Экстраполяция этой прямой до вершины трещины давала T_{xx} -напряжение в данной точке фронта трещины. Расчет T_{zz} -напряжений в заданной точке фронта трещины проводили согласно (3) по найденным значениям T_{xx} -напряжений в этой точке и деформациям ϵ_z .

На рис. 2 представлены распределения T_{xx} - и T_{zz} -напряжений по толщине пластины от свободной поверхности до середины толщины. Показаны значения T -напряжений в начале роста усталостной трещины и в момент разрушения. Рассмотрена пластина с начальной полудлиной трещины, равной 20 мм, при одноосном циклическом растяжении. Напряжения σ_y (см. рис. 1) изменялись от 100 до 160 МПа. На рис. 2 ось абсцисс — относительная координата η , равная отношению расстояния от поверхности пластины к половине толщины. Значками указаны T -напряжения, которые вычисляли в процессе расчета, линии — аппроксимация.

Из рис. 2, а видно, что T_{xx} -напряжения практически не зависят от толщины пластины. Отличия значений для пластин толщиной 50 и 20 мм не превышают 3 % в начале роста трещины и 5 % в момент разрушения. Указанный вывод согласуется с данными работы [11], в которой отмечено, что T_{xx} -напряжения не зависят от толщины

пластины. Изменение T_{xx} -напряжений по толщине пластины также незначительное. Максимальное изменение не превышает 10 %. Из рис. 2, б следует, что при увеличении толщины пластины T_{zz} -напряжения возрастают и их изменение по толщине становится заметнее к моменту разрушения. Тем не менее это изменение даже для пластины толщиной 50 мм не превышает 12 %. Необходимо отметить, что при изменении T_{xx} -напряжений на 10 % и T_{zz} -напряжения на 12 % эффективный КИН, рассчитанный по формуле (7), меняется всего на 3 %. В связи с этим T -напряжения и эффективный КИН по толщине пластины можно приближенно считать постоянными. Отметим, что все расчеты в данной работе, кроме исследования влияния толщины пластины на долговечность, проведены для пластины толщиной 20 мм, для которой изменение T -напряжений по толщине не превышает 5 %. При условии постоянства эффективного КИН по толщине пластины увеличение длины в любой точке фронта на шаг будет одинаковое, поэтому фронт трещины останется прямолинейным при ее росте.

Алгоритм численного анализа на живучесть заключался в следующем. Задавали шаг изменения циклов нагружения ΔN . На каждом шаге вычисляли КИН, T -напряжения и эффективный КИН для максимального напряжения цикла — $K_I^{\text{эф}(\max)}$. В силу линейности задачи КИН и T -напряжения для $\sigma_{\min}$ рассчитывали путем умножения значений, полученных для $\sigma_{\max}$, на $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$. Далее по полученным данным вычисляли $K_I^{\text{эф}(\min)}$. Следует отметить, что $K_I^{\text{эф}(\min)}$ нельзя пересчитать по $K_I^{\text{эф}(\max)}$, так как согласно (7) эффективный КИН нелинейно зависит от T -напряжений. Далее по формуле (4) вычисляли размах эффективного КИН. Увеличение полудлины Δl на шаге определяли согласно уравнению Пэриса (1) по формуле

$$\Delta l = C(\Delta K_I^{\text{эф}})^m \Delta N.$$

При этом шаг циклов нагружения находили посредством численного эксперимента исходя из условия неизменности результатов расчета на живучесть при уменьшении шага. На каждом шаге проверяли два условия разрушения. Согласно первому из них разрушение происходит, когда $K_I^{\text{эф}(\max)}$ достигает значения, равного вязкости разрушения K_{Ic} . Согласно второму условию разрушение происходит тогда, когда полудлина трещины становится равной полуширине пластины, т.е. трещина проходит через всю пластину. Вывод о разрушении делали исходя из того, какое событие произойдет раньше. Следует отметить, что на каждом шаге генерировалась новая конечно-элементная сетка с учетом увеличившейся длины трещины.

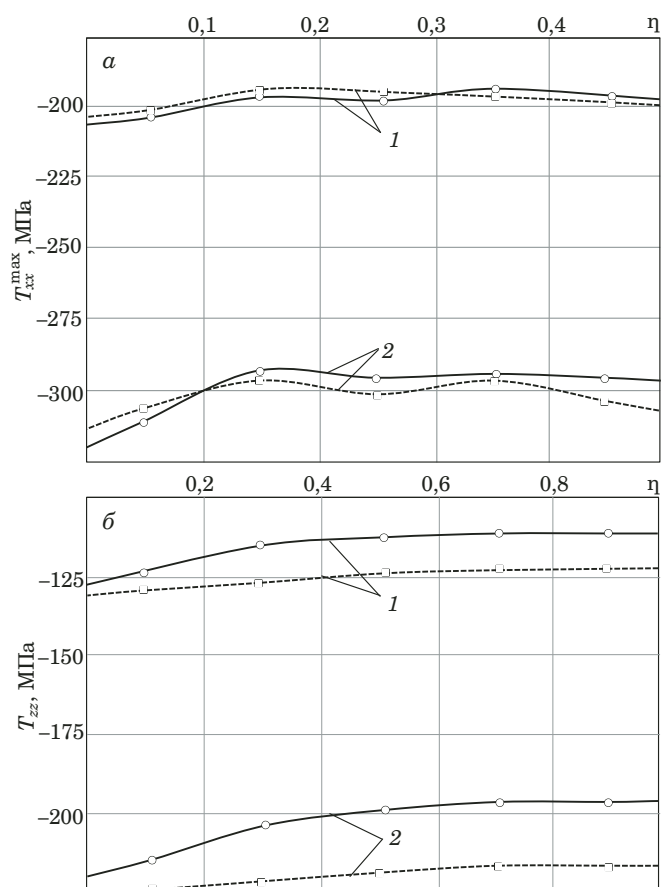


Рис. 2. Распределения $T_{xx}^{\max}$ (а) и $T_{zz}^{\max}$ -напряжений (б) по толщине пластины толщиной 50 мм (сплошные линии) и 20 мм (штриховые линии): 1 — начало процесса; 2 — момент разрушения

Fig. 2. Distribution of $T_{xx}^{\max}$ (a) and $T_{zz}^{\max}$ -stresses (b) across the thickness of a 50-mm plate (solid lines) and 20-mm plate (dashed lines): 1 — start of the process; 2 — fracture point

Обсуждение результатов расчетов

В табл. 1 представлены результаты расчета на живучесть пластины с начальной трещиной полудлиной 20 мм при одноосном циклическом растяжении. Напряжения σ_y (см. рис. 1) изменялись от 100 до 160 МПа. Полутолщина пластины t принималась равной 5, 10, 15, 20 и 25 мм. Отметим, что во всех последующих расчетах рассматривалась пластина полутолщиной 10 мм. Кроме долговечности N_0 , в табл. 1 представлены значения максимальных и минимальных T -напряжений, минимального эффективного КИН за цикл нагружения в момент разрушения, а также критической длины трещины. Расчеты показали, что для всех пластин разрушения произошли за счет достижения максимального эффективного КИН вязкости разрушения.

Из табл. 1 видно, что с увеличением толщины пластины долговечность снижается. Это объясняется повышением стеснения деформаций вдоль фронта трещины, которое приводит к возраста-

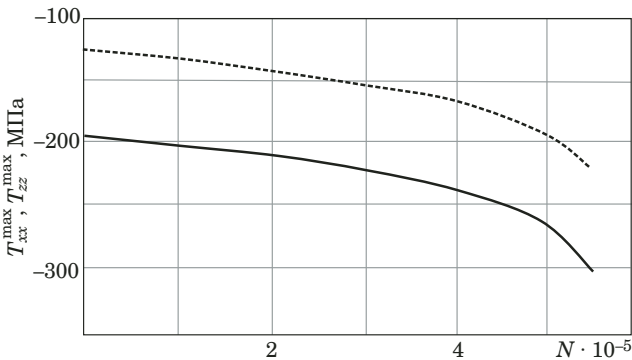


Рис. 3. Зависимости $T_{xx}^{\max}$ -напряжений (сплошная линия) и $T_{zz}^{\max}$ -напряжений (штриховая линия) от количества циклов нагружения при одноосном циклическом растяжении

Fig. 3. Dependences of maximum $T_{xx}^{\max}$ -stresses (solid line) and $T_{zz}^{\max}$ -stresses (dashed line) on the number of loading cycles during uniaxial cyclic tension

нию T_{zz} -напряжений, а следовательно, к увеличению размаха эффективного КИН. В результате трещина растёт быстрее. Критическая полудлина трещины мало зависит от толщины пластины — максимальное отличие ее значений составляет менее 6 %. Размах эффективного КИН в момент разрушения также практически не зависит от толщины пластины — $K_I^{\text{эф}(\min)}$ отличаются менее чем на 1,5 %; $K_I^{\text{эф}(\max)}$ для всех пластин равен K_{Ic} .

На рис. 3 представлены зависимости максимальных T -напряжений за цикл от числа циклов нагружения. Видно, что как $T_{xx}^{\max}$ -напряжения, так и $T_{zz}^{\max}$ -напряжения по мере увеличения числа циклов нагружения и роста трещины снижаются, что связано с уменьшением стеснения деформаций по мере увеличения длины трещины. Причем наиболее интенсивное снижение наблюдается в последние 150 тыс. циклов перед разрушением, которое происходит при 550 тыс. циклах.

Для оценки влияния коэффициента асимметрии цикла нагружения на скорость роста усталостной трещины и долговечность проведены расчеты пластины с начальной трещиной полудлиной 10 мм, нагруженной циклически изменяющимися растягивающими напряжениями σ_y (см. рис. 1), имеющими одинаковый размах, равный 60 МПа, но разные коэффициенты асиммет-

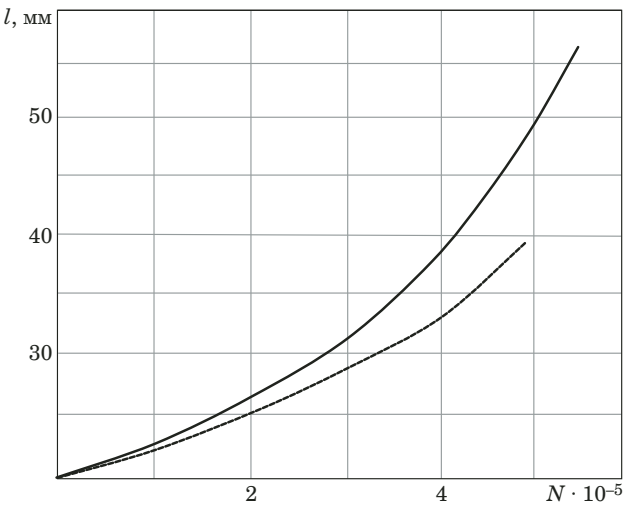


Рис. 4. Зависимости полудлины усталостной трещины от количества циклов нагружения для R , равного 0,625 (сплошная линия) и 0,727 (штриховая линия)

Fig. 4. Dependences of the fatigue crack half-length on the number of loading cycles for R : 0.625 (solid line); 0.727 (dashed line)

рии R , равные 0,625; 0,727 и 0,786. На рис. 4 представлены зависимости роста усталостной трещины от начальной до критической полудлины для циклов с $R = 0,625$ и $R = 0,727$. Видно, что при увеличении коэффициента асимметрии цикла R скорость роста трещины несколько замедляется. Данный факт обусловлен тем, что при большем R максимальные и минимальные напряжения цикла выше, поэтому они приводят к большему по модулю, но отрицательным $T_{xx}^{\max(\min)}$ - и $T_{zz}^{\max(\min)}$ -напряжениям. Отрицательные T -напряжения согласно (7) снижают $K_{\text{эф}}^{\max}$ и $K_{\text{эф}}^{\min}$, поэтому сокращается и размах эффективного КИН, что приводит к уменьшению скорости роста трещины. Однако долговечность при увеличении R снижается, так как начальное $K_{\text{эф}}^{\max}$ для цикла нагружения с большим R выше и при росте трещины эта величина быстрее достигает значения, равного вязкости разрушения K_{Ic} , при котором происходит разрушение.

В табл. 2 приведены значения долговечности N_0 , критической полудлины трещины l_c , а также $\Delta K_I^{\text{эф}}$ в момент разрушения. Видно, что коэффи-

Таблица 1. Результаты расчета на живучесть при одноосном циклическом растяжении

Table 1. Calculated results for the durability under uniaxial cyclic tension

t , мм	$T_{xx}^{\min}$, МПа	$T_{xx}^{\max}$, МПа	$T_{zz}^{\min}$, МПа	$T_{zz}^{\max}$, МПа	$K_I^{\text{эф}(\min)}$, МПа · м ^{1/2}	l_c , мм	$N_0 \cdot 10^{-5}$
5	-194	-310	-146	-233	43,9	56,0	5,57
10	-189	-302	-139	-222	43,8	57,2	5,50
15	-182	-291	-129	-206	43,6	54,9	5,19
20	-177	-283	-119	-191	43,4	56,2	5,10
25	-174	-278	-111	-178	43,3	53,9	4,87

циент асимметрии цикла оказывает сильное влияние на долговечность. Поскольку долговечность снижается по мере увеличения R , то и критическая длина трещины уменьшается, так как время процесса роста трещины сокращается.

Для исследования влияния двухосности циклического растяжения на долговечность проведены расчеты на живучесть пластины с начальной трещиной полудлиной 10 мм при нагружении по двум осям (см. рис. 1). По оси y напряжения циклически изменялись от 100 до 160 МПа, а по оси x максимальное и минимальное напряжения цикла задавались произведением множителей 1, 1,5 и 2 на напряжения по оси y . Отметим, что растягивающие циклические напряжения σ_x не влияют на значение КИН. В связи с этим КИН при двухосном циклическом растяжении, как и при одноосном циклическом растяжении, вычисляли по формуле (8). В качестве иллюстрации на рис. 5 представлены зависимости T -напряжений от числа циклов нагружения для случая $\sigma_x/\sigma_y = 1,5$. Из него видно, что, как при одноосном циклическом растяжении, T -напряжения по мере возрастания числа циклов снижаются. Это объясняется увеличением податливости пластины по мере роста трещины и, как следствие, снижением стеснения деформаций.

В табл. 3 приведены значения долговечности N_0 , максимальных и минимальных T -напряжений, $K_I^{\text{эф}(\min)}$ в момент разрушения, а также критической полудлины трещины l_c . Видно, что при повышении циклически изменяющихся напряжений σ_x (см. рис. 1) T_{xx} - и T_{zz} -напряжения возрастают и, как следствие, увеличивается размах эффективного КИН. Поэтому скорость роста трещины повышается, а долговечность снижается. Двухосное растяжение в первую очередь влияет на T_{xx} -напряжения, которые меняют знак с отрицательного на положительный при превышении в полтора раза циклических напряжений σ_x по

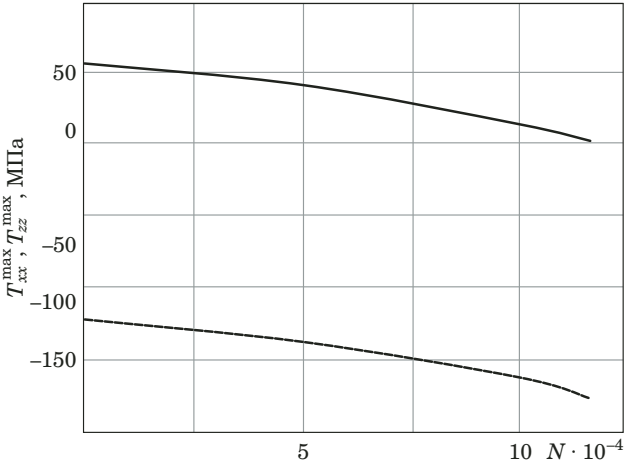


Рис. 5. Зависимости $T_{xx}^{\max}$ -напряжений (сплошная линия) и $T_{zz}^{\max}$ -напряжений (штриховая линия) от количества циклов нагружения при двухосном циклическом растяжении

Fig. 5. Dependences of maximum $T_{xx}^{\max}$ -stresses (solid line) and $T_{zz}^{\max}$ -stresses (dashed line) on the number of loading cycles during biaxial cyclic tension

сравнению с σ_y . Изменение T_{zz} при этом происходит не столь существенно. Так, при одноосном циклическом растяжении $T_{zz}^{\max} = -222$ МПа (см. табл. 1), а при двухосном циклическом растяжении при $\sigma_x = 2\sigma_y$ значение $T_{zz}^{\max} = -145$ МПа (см. табл. 3), т.е. изменяется менее чем на 35 %. Таким образом, T_{xx} -напряжения в первую очередь описывают влияние двухосности нагружения на долговечность, а T_{zz} -напряжение — влияние толщины пластины на долговечность.

Для исследования влияния стеснения деформаций по фронту трещины на рост усталостной трещины проведено сравнение результатов, полученных по разработанной методике, с данными, прогнозируемыми по классической теории. Для этого в первом варианте расчета, не учитывающем стеснение деформаций по фронту

Таблица 2. Влияние коэффициента асимметрии цикла на долговечность

Table 2. The stress ratio effect on the durability

R	$\sigma_{\max}$, МПа	$\sigma_{\min}$, МПа	$\Delta K_I^{\text{эф}}$, МПа · м ^{1/2}	l_c , мм	$N_0 \cdot 10^{-5}$
0,625	160	100	15,6	57,2	5,51
0,727	220	160	15,6	38,6	4,89
0,786	280	220	13,2	25,7	1,92

Таблица 3. Результаты расчета на живучесть при двухосном циклическом растяжении

Table 3. Calculated results for the durability under biaxial cyclic tension

σ_x/σ_y	$T_{xx}^{\min}$, МПа	$T_{xx}^{\max}$, МПа	$T_{zz}^{\min}$, МПа	$T_{zz}^{\max}$, МПа	$K_I^{\text{эф}(\min)}$, МПа · м ^{1/2}	l_c , мм	$N \cdot 10^{-5}$
1	-66,0	-106	-125	-200	43,4	51,8	2,89
1,5	3,51	5,62	-109	-174	40,6	41,5	1,32
2	73,3	117	-90,6	-145	43,6	36,2	0,401

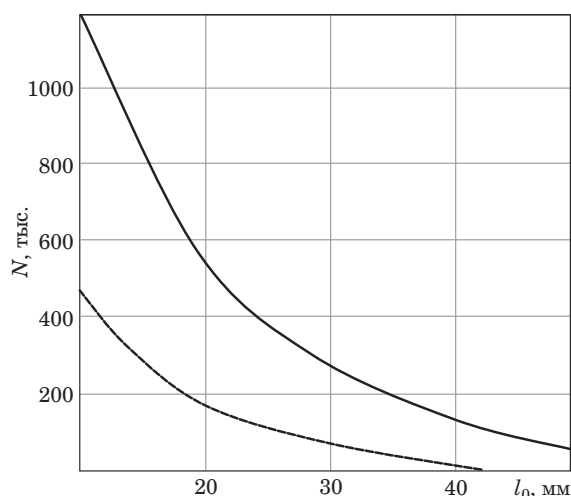


Рис. 6. Зависимости долговечности от начальной полудлины трещины: сплошная и штриховая линии — расчеты по размаху эффективного КИН и по размаху КИН

Fig. 6. Dependences of the durability on the initial half-length of the crack calculated by the range of effective SIF (solid line) and classical SIF (dashed line)

трещины, в формулу Пэриса подставляли размах обычного КИН, а момент разрушения определяли по критерию разрушения Ирвина (2). Во втором варианте расчета, учитывающем двухосное стеснение деформаций по фронту трещины, в формулу Пэриса подставляли размах эффективного КИН. За долговечность принимали цикл нагружения, на котором максимальный эффективный КИН становился равным вязкости разрушения.

На рис. 6 представлены зависимости долговечности N_0 от начальной полудлины пластины l_0 при разных вариантах расчета КИН. Видно, что в случае подстановки в формулу Пэриса размаха КИН долговечность значительно меньше, чем прогнозируемая при подстановке в нее размаха эффективного КИН. Это связано с тем, что T_{xx} - и T_{zz} -напряжения при одноосном циклическом растяжении пластины отрицательные (см. табл. 1). Поэтому согласно формуле (7) значения эффективного КИН получаются меньше, чем обычного КИН. В связи с этим размах эффективного КИН также меньше размаха обычного КИН и трещина при использовании в расчете классического подхода растет быстрее. Таким образом, классический подход дает существенно заниженные значения долговечности, т.е. является консервативной оценкой при одноосном циклическом растяжении пластины.

На рис. 7 представлены зависимости долговечности от начальной полудлины трещины при двухосном циклическом растяжении. Рассмотрен случай, когда максимальные и минимальные напряжения цикла по оси y равнялись 100 и 160 МПа, а по оси x — 150 и 240 МПа, т.е. боль-

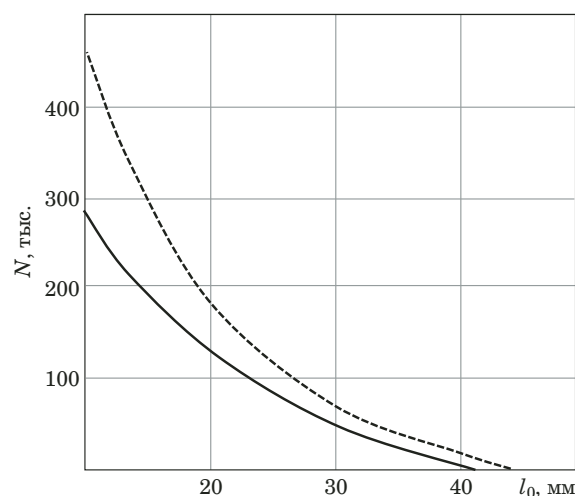


Рис. 7. Зависимости долговечности от начальной полудлины трещины при двухосном циклическом растяжении: сплошная и штриховая линии — расчеты по размаху эффективного КИН и по размаху КИН

Fig. 7. Dependences of the durability on the initial crack half-length under biaxial cyclic tension calculated by the range of effective SIF (solid line) and classical SIF (dashed line)

ше в полтора раза. Эти зависимости получены также при подстановке в уравнение Пэриса размаха как обычного, так и эффективного КИН. Из рис. 7 следует, что при наличии циклических растягивающих напряжений σ_x (см. рис. 1) долговечность ниже при подстановке в формулу Пэриса эффективного КИН, чем при подстановке в нее размаха обычного КИН. Данный факт объясняется тем, что при двухосном циклическом растяжении T -напряжения положительные, поэтому согласно (7) эффективный КИН меньше обычного, как и размах эффективного КИН. В связи с этим скорость роста трещины при прогнозировании по предлагаемой методике ниже, чем при использовании в расчете классического подхода.

На рис. 8 приведены зависимости размаха обычного и эффективного КИН от количества циклов нагружения для одноосного и двухосного циклического растяжения. Отметим, что при использовании классического подхода циклические растягивающие напряжения σ_x не учитываются в расчете, так как КИН не зависит от этих напряжений. Поэтому зависимость размаха обычного КИН от числа циклов нагружения одинаковая для одноосного и двухосного циклического растяжения. Из рис. 8 следует, что начальное значение размаха обычного КИН равно $15,4 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. Начальные значения эффективного КИН для одноосного и двухосного циклического растяжения составляют 11,8 и 17,7 $\text{МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. Значения размахов в момент разрушения — 24,7, 21,2, 24,1 $\text{МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ соответственно. Видно, что при одноосном нагружении отличие в зависимостях

размаха обычного и эффективного КИН и, соответственно, долговечности существеннее, чем при двухосном нагружении. Данный факт объясняется тем, что при одноосном растяжении T_{xx} -напряжения отрицательные и значительно больше по модулю. Так, для рассматриваемой пластины полутолщиной 10 мм в момент разрушения $T_{xx}^{\max} = -302 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ (см. табл. 1). Для двухосного нагружения с рассматриваемым отношением напряжений $\sigma_x/\sigma_y = 1,5$ — значение $T_{xx}^{\max} = 5,62 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ (см. табл. 3), т.е. почти равны нулю. Также больше по модулю T_{zz} -напряжения для одноосного нагружения — $T_{zz}^{\max} = -222 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ (см. табл. 1); для двухосного — $T_{zz}^{\max} = -174 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ (см. табл. 3). В связи с этим эффективный КИН более отличается от обычного КИН при одноосном нагружении, чем при двухосном, так же, как и размах эффективного КИН.

Таким образом, использование в уравнении Пэриса размаха КИН не всегда дает консервативную оценку живучести конструкций. Циклические растягивающие напряжения σ_x , направленные параллельно берегам трещины, приводят к стеснению деформаций по фронту трещины и заметному снижению долговечности, что говорит о целесообразности использования в расчете на живучесть предлагаемой методики.

Заключение

Проведена оценка живучести пластины с осевой поперечной сквозной трещиной при одноосном и двухосном циклическом растяжении с использованием разработанной численной методики, учитывающей двухосное стеснение деформаций по фронту трещины. В результате проведенного исследования можно сформулировать следующие выводы.

1. При увеличении количества циклов нагружения максимальные и минимальные T_{xx} - и T_{zz} -напряжения за цикл нагружения снижаются, причем как при одноосном, так и при двухосном циклическом растяжении.

2. С увеличением толщины пластины за счет повышения стеснения деформаций по фронту трещины значение эффективного КИН возрастает, поэтому трещина растет быстрее и долговечность снижается.

3. С повышением коэффициента асимметрии цикла нагружения при условии постоянного размаха напряжений максимальный эффективный КИН быстрее достигает критического значения, равного вязкости разрушения, поэтому долговечность уменьшается.

4. При двухосном циклическом растяжении пластины увеличение напряжений, направленных параллельно берегам трещины, при-

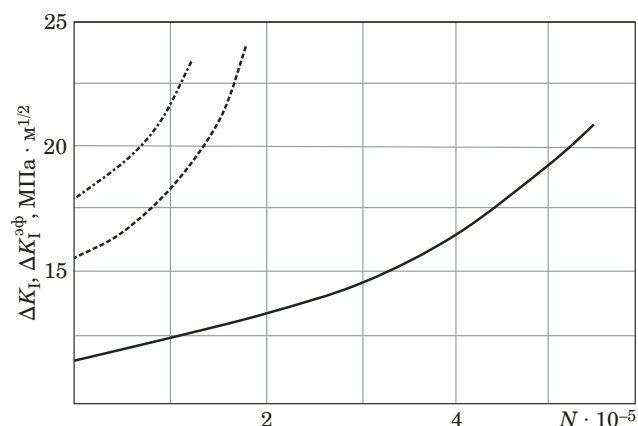


Рис. 8. Зависимости от количества циклов нагружения размаха КИН (штриховая линия) и эффективного КИН для одноосного (сплошная линия) и двухосного (штрихпунктирная линия) циклического растяжения

Fig. 8. Dependences on the number of loading cycles of the classical SIF (dashed line) and effective SIF for uniaxial (solid line) and biaxial (dashed-dotted line) cyclic tension

водит к повышению стеснения деформаций по фронту трещины, а поэтому — к снижению долговечности.

5. Несингулярные T_{xx} -напряжения в первую очередь описывают влияние двухосности нагружения на долговечность, а T_{zz} -напряжение — влияние толщины пластины на долговечность.

6. При одноосном циклическом растяжении долговечность, прогнозируемая по предлагаемой методике, получается выше, чем в случае классического подхода, когда в уравнение Пэриса подставляется размах обычного КИН. При двухосном циклическом растяжении получается наоборот. Другими словами, классическая теория не всегда дает консервативную оценку живучести, что свидетельствует о целесообразности использования разработанной методики расчета на живучесть с учетом двухосного стеснения деформаций по фронту трещины.

ЛИТЕРАТУРА

- Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. Основы механики разрушения. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 352 с.
- Савкин А. Н., Бадиков К. А., Седов А. А. Моделирование и расчет продолжительности роста усталостных трещин в конструкционных сталях / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2021. Т. 87. № 4. С. 43 – 51. DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-5-43-51
- Nejad R. M., Tohidi M., Darbandi A. J., et al. Experimental and numerical investigation of fatigue crack growth behavior and optimizing fatigue life of riveted joints in Al-alloy 2024 plates / Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2020. Vol. 108. 102669. DOI: 10.1016/j.tafmec.2020.102669
- Sajith S., Shukla S. S., Murthy K. S. R. K., Robi P. S. Mixed mode fatigue crack growth studies in AISI 316 stainless steel / European Journal of Mechanics — A Solids. 2020. Vol. 80. 103898. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.103898

5. **Туманов Н. В.** Устойчивый рост усталостных трещин: микромеханизм и математическое моделирование / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2018. Т. 84. № 11. С. 52 – 69. DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-11-52-69
6. **Федоров А. А., Разумовский И. А., Матвиенко Ю. Г.** Локальное индентирование как способ уменьшения скорости роста усталостной трещины / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2022. Т. 88. № 11. С. 46 – 54. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-11-46-54
7. **Покровский А. М., Чермошентцева А. С.** Оценка живучести растянутой пластины с поперечной полуэллиптической трещиной / Известия вузов. Машиностроение. 2014. № 3. С. 42 – 46.
8. **Рейзмунт Е. М.** Разработка инструментальных средств анализа живучести и безопасности оболочечных конструкций технических объектов / Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2017. № 2(6). С. 113 – 122.
9. **Zhao C. Y., Huang P. Y., Zhou H., Zheng X. H.** Numerical Analysis of K_I of Semi-elliptical Surface Crack in Steel Structure Strengthened with FRP under tensile load / Applied Mechanics and Materials. 2012. Vol. 137. P. 42 – 49. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.137.42
10. **Hamam R., Pommier S., Bumbieler F.** Mode I fatigue crack growth under biaxial loading / International Journal of Fatigue. 2005. Vol. 27. P. 1342 – 1346. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2005.06.020
11. **Матвиенко Ю. Г.** Двухпараметрическая механика разрушения. — М.: Физматлит, 2020. — 208 с.
12. **Williams M. L.** On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack / Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24(1). P. 109 – 114. DOI: 10.1115/1.4011454
13. **Roychowdhury S., Dodds Jr R. H.** Effect of T -stress on fatigue crack closure in 3-D small-scale yielding / International Journal of Solids and Structures. 2004. Vol. 41(9). P. 2581 – 2606. DOI: 10.1016/j.jisolsr.2003.11.004
14. **Hamam R., Pommier S., Bumbieler F.** Mode I fatigue crack growth under biaxial loading / International Journal of Fatigue. 2005. Vol. 27. P. 1342 – 1346. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2005.06.020
15. **Chernyatin A. S., Matvienko Y. G., Razumovsky I. A.** Fatigue surface crack propagation and intersecting cracks in connection with welding residual stresses / Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2018. Vol. 41. N 10. P. 2140 – 2152. DOI: 10.1111/ffe.12808
16. **Seitl S., Knesl Z.** Two parameter fracture mechanics: Fatigue crack behavior under mixed mode conditional / Eng. Fract. Mech. 2008. Vol. 75. P. 857 – 865. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2007.04.011
17. **Sih G. C., Barthelemy B. M.** Mixed mode fatigue crack growth predictions / Engineering Fracture Mechanics. 1980. Vol. 13. P. 439 – 451. DOI: 10.1016/0013-7944(80)90076-4
18. **Степанова Л. В.** Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряжённо-деформированного состояния у вершины трещины. Часть I. / Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27. № 4. С. 30 – 67. DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79
19. **Nakamura T., Parks D. M.** Determination of elastic T -stress along three-dimensional crack front an interaction integral / Int. J. Solid Struct. 1992. Vol. 29 P. 1597 – 1611. DOI: 10.1016/0020-7683(92)90011-h
20. **Liu H., Yang X., Li S., et al.** Modeling fatigue crack growth for a through thickness crack: An out-of-plane constraint-based approach considering thickness effect / International Journal of Mechanical Sciences. 2020. Vol. 178. 105625. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105625
21. **Guo W., Zhu J., Guo W.** Equivalent thickness-based three-dimensional stress fields and fatigue growth of part-through cracks emanating from a circular hole / Engineering Fracture Mechanics. 2020. Vol. 228. 106927. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.106927
22. **Zhu J., Guo W., Guo W.** Surface fatigue crack growth under variable amplitude loading / Engineering Fracture Mechanics. 2020., Vol. 239. 107317. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.107317
23. **Покровский А. М., Матвиенко Ю. Г.** Критерий разрушения, учитывающий двухосное стеснение деформаций по фронту трещины нормального отрыва / Проблемы машиностроения и надежности машин. 2023. № 4. С. 34 – 44.
24. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. — 544 с.
25. **Черепанов Г. В.** Механика разрушения. — М.: Изд-во: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2012. — 872 с.
26. **Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах. Т. 1 / Пер. с англ.; под ред. Ю. Мураками. — М.: Мир, 1990. — 448 с.**

REFERENCES

1. **Parton V. Z., Morozov E. M.** Elastic-plastic fracture mechanics. Fundamentals of fracture mechanics. — Moscow: LKI, 2008. — 352 p. [in Russian].
2. **Savkin A. N., Badikov K. A., Sedov A. A.** Modeling and Calculation of Fatigue Crack Growth Time in Structural Steels / Industr. Lab. Diagn. Mater. 2021. Vol. 87. N 4. P. 43 – 51 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-5-43-51
3. **Nejad R. M., Tohidi M., Darbandi A. J., et al.** Experimental and numerical investigation of fatigue crack growth behavior and optimizing fatigue life of riveted joints in Al-alloy 2024 plates / Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2020. Vol. 108. 102669. DOI: 10.1016/j.tafmec.2020.102669
4. **Sajith S., Shukla S. S., Murthy K. S. R. K., Robi P. S.** Mixed mode fatigue crack growth studies in AISI 316 stainless steel / European Journal of Mechanics — A Solids. 2020. Vol. 80. 103898. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.103898
5. **Tumanov N. V.** Sustained Fatigue Crack Growth: Micromechanism and Mathematical Modeling / Industr. Lab. Diagn. Mater. 2018. Vol. 84. N 11. P. 52 – 69 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-11-52-69
6. **Fedorov A. A., Razumovsky I. A., Matvienko Yu. G.** Local indentation as a way to reduce fatigue crack growth rate / Industr. Lab. Diagn. Mater. 2022. Vol. 88. N 11. P. 46 – 54 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-11-46-54
7. **Pokrovsky A. M., Chermoshentceva A. S.** Fatigue life assessment of a tensile plate with a transverse semi-elliptic crack / Izv. Vuzov. Mashinost. 2014. N 3. P. 42 – 46 [in Russian].
8. **Reyzmunt E. M.** Development of instrumental tools for analysis of survivability and safety of shell structures of technical objects / Inf. Matem. Tekhnol. Nauke Upravl. 2017. N 2(6). P. 113 – 122 [in Russian].
9. **Zhao C. Y., Huang P. Y., Zhou H., Zheng X. H.** Numerical Analysis of K_I of Semi-elliptical Surface Crack in Steel Structure Strengthened with FRP under tensile load / Applied Mechanics and Materials. 2012. Vol. 137. P. 42 – 49. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.137.42
10. **Hamam R., Pommier S., Bumbieler F.** Mode I fatigue crack growth under biaxial loading / International Journal of Fatigue. 2005. Vol. 27. P. 1342 – 1346. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2005.06.020
11. **Matvienko Yu. G.** Two-parametric fracture mechanics. — Moscow: Fizmatlit, 2020. — 208 p. [in Russian].
12. **Williams M. L.** On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack / Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24(1). P. 109 – 114. DOI: 10.1115/1.4011454
13. **Roychowdhury S., Dodds Jr R. H.** Effect of T -stress on fatigue crack closure in 3-D small-scale yielding / International Journal of Solids and Structures. 2004. Vol. 41(9). P. 2581 – 2606. DOI: 10.1016/j.jisolsr.2003.11.004
14. **Hamam R., Pommier S., Bumbieler F.** Mode I fatigue crack growth under biaxial loading / International Journal of Fatigue. 2005. Vol. 27. P. 1342 – 1346. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2005.06.020

15. **Chernyatin A. S., Matvienko Y. G., Razumovsky I. A.** Fatigue surface crack propagation and intersecting cracks in connection with welding residual stresses / *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2018. Vol. 41. N 10. P 2140 – 2152. DOI: 10.1111/ffe.12808
16. **Seitl S., Knesl Z.** Two parameter fracture mechanics: Fatigue crack behavior under mixed mode conditional / *Eng. Fract. Mech.* 2008. Vol. 75. P 857 – 865. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2007.04.011
17. **Sih G. C., Barthelemy B. M.** Mixed mode fatigue crack growth predictions / *Engineering Fracture Mechanics*. 1980. Vol. 13. P 439 – 451. DOI: 10.1016/0013-7944(80)90076-4
18. **Stepanova L. V.** Influence of higher approximations in the asymptotic M. Williams stress field decomposition on the description of the stress-strain state at the crack tip. Part I / *Vestn. Samar. Univ. Estestvennonauch. Ser.* 2021. Vol. 27. N 4. P 30 – 67 [in Russian]. DOI: 10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79
19. **Nakamura T., Parks D. M.** Determination of elastic T -stress along three-dimensional crack front an interaction integral / *Int. J. Solid Struct.* 1992. Vol. 29 P 1597 – 1611. DOI: 10.1016/0020-7683(92)90011-h
20. **Liu H., Yang X., Li S., et al.** Modeling fatigue crack growth for a through thickness crack: An out-of-plane constraint-based approach considering thickness effect / *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. Vol. 178. 105625. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.105625
21. **Guo W., Zhu J., Guo W.** Equivalent thickness-based three-dimensional stress fields and fatigue growth of part-through cracks emanating from a circular hole / *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. Vol. 228. 106927. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.106927
22. **Zhu J., Guo W., Guo W.** Surface fatigue crack growth under variable amplitude loading / *Engineering Fracture Mechanics*. 2020., Vol. 239. 107317. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.107317
23. **Pokrovskii A. M., Matvienko Yu. G.** Fracture criterion, taking into account the crack front constraints for Mode I crack / *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin.* 2023. N 4. P 34 – 44 [in Russian].
24. **Feodosev V. I.** Strength of materials. — Moscow: BMSTU, 2018. — 544 p. [in Russian].
25. **Cherepanov G. V.** Fracture Mechanics. — Moscow: IKI, 2012. — 872 p. [in Russian].
26. **Murakami Y., ed.** Handbook of stress intensity factors. In 2 Volumes. Vol. 1. — Moscow: Mir, 1990. — 448 p. [Russian translation].