

DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-10-63-73>

УТОЧНЕННЫЙ КРИТЕРИЙ РАССЛОЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ КОМПОЗИТНОЙ БАЛКИ

© Александр Николаевич Полилов, Данила Денисович Власов,
Николай Алексеевич Татусь*

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Россия, 101000, Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4;

*e-mail: nikalet@mail.ru

*Статья поступила 11 января 2023 г. Поступила после доработки 17 февраля 2023 г.
Принята к публикации 30 марта 2023 г.*

В полимерных волокнистых композитах межслойная прочность определяется главным образом прочностью матрицы, которая значительно ниже прочности волокон. По этой причине анализ разрушения расслоением чрезвычайно важен для оценки работоспособности композитных элементов конструкций. При проектировании ответственных конструкций необходимо знать значение предела прочности на межслойный сдвиг, поэтому стандартизован метод изгиба короткой балки. В теории изгиба традиционно предполагается независимость касательных напряжений и межслойной сдвиговой прочности от длины и ширины балки. Однако в большинстве экспериментальных работ подтверждается обратное — геометрия образца влияет на значение критических напряжений. Авторами предложен линейный критерий разрушения, позволяющий объяснить и количественно описать зависимость межслойной сдвиговой прочности от геометрии образца. Исследовано влияние неоднородности межслойных касательных напряжений по ширине балки на критические напряжения. На основании строгого решения задачи изгиба показано, что учет уточненного распределения касательных напряжений дает незначительную поправку к определяемому значению межслойной прочности, что позволяет использовать при расчетах простейшее параболическое распределение по высоте. Результаты анализа подтверждаются испытаниями на трехточечный изгиб коротких композитных балок различной ширины. Представлен анализ результатов усталостных испытаний коротких балок из углепластика. С помощью предложенного линейного критерия разрушения установлена связь кривых усталости полимерных волокнистых композитов при растяжении с кривыми усталости, полученными при циклическом трехточечном изгибе коротких балок. Даны оценки масштабного эффекта прочности на основе энергетического критерия расслоения с учетом и без учета уточненного распределения межслойных касательных напряжений.

Ключевые слова: полимерный слоистый композит; стеклопластик; углепластик; изгиб короткой балки; распределение касательных напряжений; межслойная сдвиговая прочность; расслоение; усталость; масштабный эффект прочности.

SPECIFIED CRITERION FOR DELAMINATION UPON BENDING OF A COMPOSITE BEAM

© Alexander N. Polilov, Danila D. Vlasov, Nikolai A. Tatus'*

Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, 4, Malyy Kharitonyevsky Per., Moscow, 101000, Russia; *e-mail: nikalet@mail.ru

Received January 11, 2023. Revised February 17, 2023. Accepted March 30, 2023.

The interlayer strength in polymer fiber composites is characterized mostly by the strength of the matrix, which is much lower than fiber strength. For this reason, the analysis of fracture occurred through delamination is extremely important for assessing the operability of composite structural elements. When designing critical structures, it is necessary to know the interlayer shear strength, for which the method of bending a short beam has been standardized. The shear stresses and the interlayer shear strength in bending theory are traditionally assumed to be independent of the length and width of the beam. However, a large number of experimental studies prove the opposite fact that the geometry of the specimen affects the value of critical stresses. The linear fracture criterion proposed by the authors allows explanation and quantitative description of the interlayer shear strength dependence on the geometry of the specimen. The influence of the heterogeneity of interlayer shear stresses across the beam on the critical stresses is analyzed. A strict solution of the bending problem showed that taking into account the specified shear stress distribution gives an insignificant correction to the determined value of the interlayer strength, which makes it possible to use a simplest parabolic distribution in height. The results of the

analysis are confirmed in three-point bending tests of short composite beams of different widths. The results of fatigue tests of short beams made of carbon fiber reinforced plastic are analyzed. The relationship between tensile fatigue curves of polymer fiber composites and the fatigue curves obtained in cyclic three-point bending test of short beams has been revealed using the proposed linear fracture criterion. The estimation of the strength scale effect on the basis of the energy criterion of delamination with and without taking into account the refined distribution of interlayer shear stresses is presented.

Keywords: polymer layered composite; carbon fiber reinforced plastic; glass fiber reinforced plastic; short beam bending; shear stress distribution; interlayer shear strength; delamination; fatigue; scale effect of the strength.

Введение

Расслоение — наиболее распространенный тип дефекта и вид разрушения полимерных слоистых композитов типа стекло- и углепластиков [1, 2]. Любое разрушение композитных панелей начинается с расслоения или сопровождается им. Касательные напряжения при изгибе необходимо было учитывать для деревянных балок, для металлов эти напряжения не играют никакой роли. Однако с появлением полимерных волокнистых композитов [3, 4], у которых межслойная сдвиговая прочность [5 – 8] намного ниже прочности вдоль волокон, вновь возник интерес к анализу распределения касательных напряжений [9 – 12]. Стандартизован простейший метод испытания на изгиб короткой балки [13, 14] в целях определения межслойной сдвиговой прочности через максимальное касательное напряжение, рассчитанное по формуле Журавского. Вопреки принятой теории оказалось, что межслойная прочность зависит от длины и ширины образца. Исходя из элементарной теории изгиба, используемой в стандартах, объяснить это не представляется возможным.

Цель данной работы — обоснование применимости критерия прочности, учитывающего влияние не только касательных, но и нормальных напряжений, а также позволяющего количественно описать влияние геометрии образца на критическое напряжение, определяющее межслойную сдвиговую прочность. Критерий развит на случай циклического нагружения, и на основе энергетического критерия количественно оценен масштабный эффект прочности при разрушении расслоением.

Критерий расслоения композитных балок при изгибе

Композитные образцы при изгибе могут разрушаться либо от нормальных, либо от касательных напряжений, что зависит от размеров образца. Для наибольших нормальных и касательных напряжений при трехточечном изгибе известны следующие формулы [15]:

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Pl}{wh^2},$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{4} \frac{P}{wh}, \quad (1)$$

где P — приложенная центральная сила; l — длина пролета; w , h — ширина и толщина образца в виде балки прямоугольного сечения.

Отношение $\tau_{\max}/\sigma_{\max} = h/2l \leftrightarrow \tau^*/\sigma^*$ показывает, что при изгибе коротких образцов касательные напряжения могут раньше достигнуть предела прочности τ^* , чем нормальные напряжения — σ^* , при этом происходит разрушение от межслойного сдвига.

Распределение касательных напряжений по толщине балки обычно предполагается параболическим (рис. 1):

$$\tau_{xz} = \frac{3P}{wh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

В этом заключено известное противоречие. «Гипотеза плоских сечений», допускающая только поворот первоначально плоских сечений, приводит к линейной эпюре нормальных напряжений по вертикальной координате (по толщине балки). Тогда распределение касательных напряжений из уравнения равновесия оказывается квадратичным (параболическим). Но само наличие касательных напряжений неизбежно приводит к некоторому искажению сечения, которое перестает быть плоским. Это противоречие обычно обходят допущением малости касательных напряжений — искажение сечения мало, тогда распределение похоже на параболическое.

Испытания на изгиб коротких композитных балок стандартизованы и широко используются для определения межслойной сдвиговой прочности τ^* в предположении независимости касательных напряжений от продольной координаты. В то же время, как видно из рис. 1, критическое касательное напряжение $\tau^* = \tau_{\max}$, рассчитанное по формуле Журавского (1), зависит от отношения пролета l к толщине h балки. Для объяснения этого эффекта в [16] предложен линейный критерий расслоения, согласно которому на межслойное разрушение по плоскости, нормальной оси z (см. рис. 1), влияют не только касательные τ_{xz} , но и нормальные σ_x напряжения. Это можно объяснить неоднородностью слоистого

композита, в котором при растяжении-сжатии вдоль оси x возникают поперечные σ_z напряжения (из-за разности в коэффициентах Пуассона компонентов). Точный учет поперечных напряжений, возникающих, в частности, вблизи нижних опор и верхнего нагружающего цилиндра, в элементарной постановке затруднителен, поэтому для инженерных методических приложений приходится ограничиваться балочным приближением.

Разрушение должно начаться, когда некоторая функция от нормальных σ_x и касательных τ_{xz} напряжений достигает критического значения. Можно предположить, что эта функция — линейная. Если такого предположения достаточно для описания наблюдаемых эффектов, то нет смысла усложнять вид данной функции. Тогда критерий расслоения принимается в виде достижения критического значения линейной комбинацией нормальных и касательных напряжений:

$$\sigma_x + m\tau_{xz} = c, \quad (2)$$

где m, c — экспериментально определяемые параметры материала.

Согласно критерию (2) расслоение должно начаться на расстоянии z_0 от нейтральной оси, где впервые достигает критического значения линейная комбинация касательных τ_{xz} и нормальных σ_x напряжений. Касательные напряжения в элементарной теории не зависят от продольной координаты, а нормальные линейно растут вдоль оси x — от нижней опоры к середине балки. Поэтому наиболее опасным согласно (2) оказывается сечение под центральной нагрузкой, где в балочном приближении распределения напряжений при трехточечном изгибе имеют вид [17]:

$$\sigma_x = \frac{3Plz}{wh^3}, \quad \tau_{xz} = \frac{3P}{wh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (3)$$

Если подставить (3) в критерий (2), критическая нагрузка P^* становится связанной с z квадратичной зависимостью и координата начала расслоения z_0 определяется минимумом критической нагрузки, т.е. находится из условия $\partial P^*/\partial z = 0$:

$$z_0 = \frac{l}{2m}. \quad (4)$$

Подставив отношение (4) в (3) и в (2), можно определить критическую силу P^* , выраженную из формулы (1) через предельное максимальное

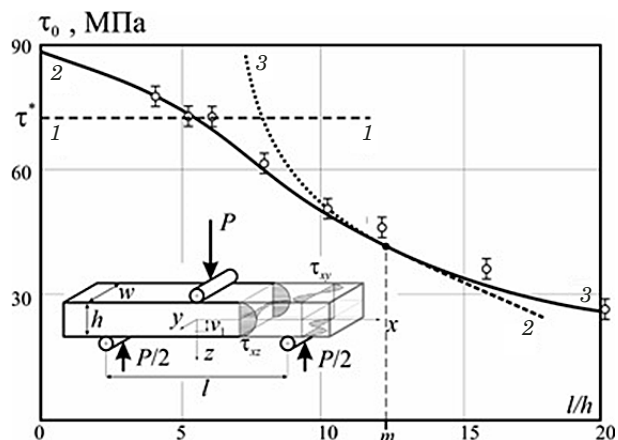


Рис. 1. Схема испытаний на изгиб и экспериментальная зависимость межслойной сдвиговой прочности τ_0 однонаправленного стеклопластика от отношения пролета балки l к ее толщине h : 1 — соответствует (1), 2 — (5), 3 — (7)

Fig. 1. Bending test diagram and experimental dependence of the interlayer shear strength τ_0 of unidirectional GFRP on the ratio of the beam span l to the beam thickness h : line 1 corresponds to (1), 2 — (5), 3 — (7)

касательное напряжение, которое будем называть межслойной сдвиговой прочностью τ_0 :

$$\tau_0 = \frac{mc}{m^2 + l^2/h^2}. \quad (5)$$

Из (5) следует зависимость сдвиговой прочности от отношения длины пролета к толщине балки. За межслойную сдвиговую прочность можно принять предел $\tau^* = c/m$, к которому стремится прочность при уменьшении пролета, когда исчезает влияние нормальных напряжений.

Формула (4) для координаты начала расслоения показывает, что z_0 увеличивается с ростом длины пролета, пока эта координата не выйдет на поверхность балки ($z = h/2$), где касательные напряжения равны нулю и критерий вида (2) при $|z_0| \geq h/2 \rightarrow l/h \geq m$ теряет смысл. Другими словами, критерий разрушения формально сохраняет вид (2) при допущении $\tau_{xz} = 0 \Rightarrow \sigma_x = c$.

Для удобства определения параметров критерия (2) из обработки результатов экспериментов можно вместо (5) использовать обратную зависимость, линейную от $(l/h)^2$:

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{m}{c} + \frac{1}{mc} \left(\frac{l}{h} \right)^2. \quad (6)$$

На рис. 2 приведены экспериментальные данные (см. рис. 1) по изгибу стеклопластиковых образцов в разных координатах. Видно, что в пределах $(l/h)^2 < m^2$ (см. рис. 2, а), в которых справедливы критерий (2) и (5), данные хорошо ложатся на прямую линию 1 согласно (6).

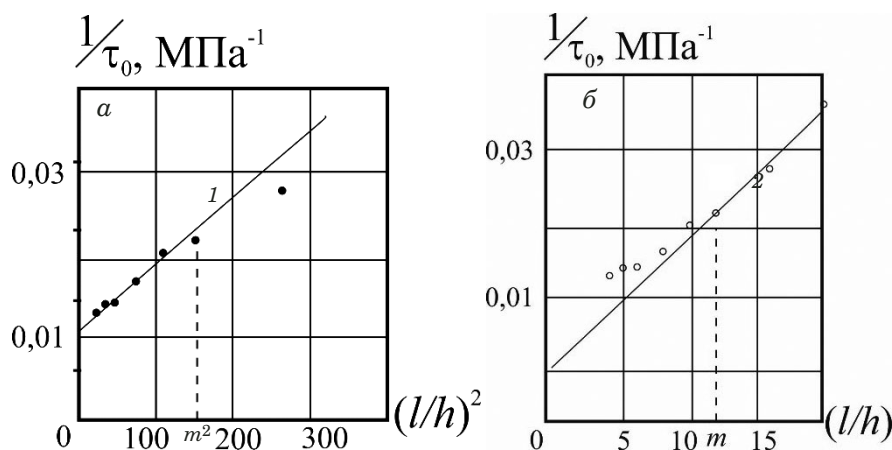


Рис. 2. Экспериментальные данные в координатах $1/\tau_0 - (l/h)^2$ (а) и в координатах $1/\tau_0 - l/h$ (б)

Fig. 2. Experimental data in coordinates $1/\tau_0 - (l/h)^2$ (a) and in coordinates $1/\tau_0 - l/h$ (b)

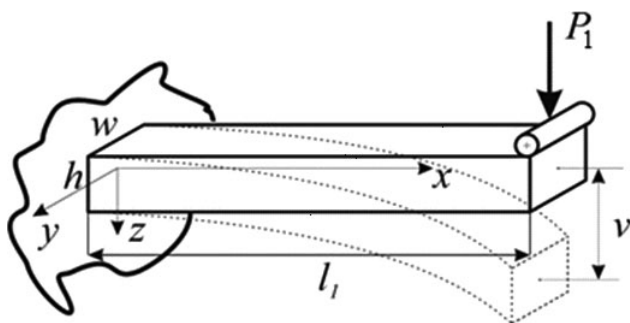


Рис. 3. Расчетная схема консольной балки, нагруженной перерезывающей силой P_1

Fig. 3. Calculation diagram of the cantilever beam loaded by the force P_1

При $(l/h) < m$ из (4) следует $z_0 < h/2$, когда происходит расслоение. При граничном значении длины $l = mh$ координата разрушения выходит на нижнюю поверхность балки. При $(l/h) > m$ условие (4) теряет смысл, так как разрушение должно было бы происходить вне образца. Поэтому при $(l/h) > m$ следует принять $z_0 = h/2$, $\tau_{xz} = 0$ и критическую нагрузку можно определить через критическое напряжение c :

$$P = \frac{2wh^2c}{3l}, \quad \tau_0 = \frac{hc}{2l}. \quad (7)$$

Константу c будем считать пределом прочности при изгибе длинных балок; отношение $l/h = m$ разделяет области разрушения от расслоения и от растяжения. Как видно из рис. 2, б, при $l/h > m$ прямая линия 2 согласно (7), полученная из обычных формул (1), (3), но выраженная через τ_0 , хорошо согласуется с экспериментом.

На рис. 1 кривые 2 (5) и 3 (7) касаются друг друга, так как при $l/h = m$ совпадают не только их значения, но и их производные. Гипербола 3 (7) остается всегда выше, чем полученная по кри-

терию (2) кривая 2 (5). Точка касания определяет значения параметров m и c . Критерий (2), учитывающий совместное влияние нормальных и касательных напряжений, дает более точное описание зависимости межслойной сдвиговой прочности от размеров балки, чем традиционный критерий $\tau_0 = \tau^*$ (штриховая горизонтальная линия 1 на рис. 1), и позволяет получить единую гладкую зависимость критической нагрузки от длины балки для разных видов разрушения.

Решение Сен-Венана – Лехницкого для изотропной и ортотропной балки

Стандартная гипотеза для решения задачи изгиба состоит в том, что возникающие касательные напряжения предполагаются зависящими только от вертикальной координаты z , что отражено в формуле Журавского (3). На самом деле касательные напряжения, возникающие под действием перерезывающей силы, зависят и от поперечной координаты y [18, 19], что было доказано для изотропной балки Сен-Венаном и впоследствии для ортотропной балки С. Г. Лехницким [20].

Изотропная балка. Для упрощения последующих выкладок рассмотрим консольную балку (рис. 3), нагруженную концевой силой $P_1 = P/2$. Будем считать, что все компоненты тензора напряжений равны нулю, кроме: $\sigma_{xx} \equiv \sigma_x$, $\sigma_{xy} \equiv \tau_{xy}$, $\sigma_{xz} \equiv \tau_{xz}$.

С помощью гипотезы «плоских сечений» нормальные напряжения выразим следующим образом:

$$\sigma_x = -P_1(l_1 - x)z/I, \quad I = wh^3/12. \quad (8)$$

С учетом принятых гипотез уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{P_1 z}{I} = 0. \quad (9)$$

Отсюда, вводя функцию напряжений F , можно получить возникающие в балке касательные напряжения:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{P_1}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \Leftrightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{P_1 z}{I}. \quad (10)$$

Для прямоугольного сечения принимаются следующие граничные условия:

$$\text{при } y = \pm \frac{1}{2}w \Rightarrow \tau_{xy} = -\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

$$\text{при } z = \pm \frac{1}{2}h \Rightarrow \tau_{xz} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{P_1}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

На основе выражений (8) – (11) с помощью уравнения Бельтрами – Митчела [21] определяется функция напряжений в рядах, соответствующая граничным условиям:

$$F(y, z) = \frac{v}{1+v} \frac{P_1 w^3}{4I\pi^3} \left[\frac{\pi^3 y}{6w} \left(\frac{4y^2}{w^2} - 1 \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \frac{\text{ch}(2\pi n z/w)}{\text{ch}(\pi n h/w)} \sin \frac{2\pi n y}{w} \right]. \quad (12)$$

Согласно выражению (10) из (12) находятся распределения касательных напряжений, которые изменяются также по ширине балки:

$$\tau_{xy} = \frac{v}{1+v} \frac{6P_1 w}{h^3 \pi^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{sh}(2\pi n z/w)}{\text{ch}(\pi n h/w)} \sin \frac{2\pi n y}{w} \right],$$

$$\tau_{xz} = \frac{P_1}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) + \frac{v}{1+v} \frac{6P_1}{w h^3} \times$$

$$\times \left[y^2 - \frac{w^2}{12} - \frac{w^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{ch}(2\pi n z/w)}{\text{ch}(\pi n h/w)} \cos \frac{2\pi n y}{w} \right]. \quad (13)$$

Ортотропная балка. Аналогичные преобразования позволяют получить точное решение в рядах гиперболических функций и для анизотропных случаев. Рассмотрим ортотропную консольную балку. С учетом различных модулей сдвига в плоскостях ортотропии уравнение для функции напряжений F приобретает следующий вид:

$$\frac{1}{G_{xz}} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{G_{xy}} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{2P_1 v_{xy}}{E_{xx} I} y. \quad (14)$$

Далее необходимо найти функцию F из условия, что $F = 0$ при $z = \pm h/2$, $y = \pm w/2$. Для этого разложим правую часть выражения (14) в ряд Фурье. В силу нечетности по y после замены переменной $y = y_1 w/(2\pi)$, $y \in (-w/2, w/2)$, и разложения функции $f(y) = y$ уравнение (14) приобретет вид:

$$\frac{1}{G_{xz}} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{G_{xy}} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} =$$

$$= -\frac{2P_1 w v_{xy}}{E_{xx} I \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{2\pi n y}{w}. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) будем искать в виде ряда, решая систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Из граничных условий на сторонах $z = \pm h/2$, где функция напряжений F должна обращаться в ноль, окончательно получаем

$$F = \frac{P_1 w^3 G_{xz} v_{xy}}{2E_{xx} I \pi^3} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left(1 - \frac{\text{ch}(2\pi n z \sqrt{g/w})}{\text{ch}(\pi n h \sqrt{g/w})} \right) \sin \frac{2\pi n y}{w}. \quad (16)$$

С помощью соотношения (10) из (16) несложно выразить распределения касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = -P_1 w^2 G_{xz} \frac{v_{xy}}{E_{xx} I \pi^2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\text{sh}(2\pi n z \sqrt{g/w})}{\text{ch}(\pi n h \sqrt{g/w})} \sin \frac{2\pi n y}{w},$$

$$\tau_{xz} = \frac{P_1}{2I} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) - \frac{P_1 w^2 G_{xz} v_{xy}}{E_{xx} I \pi^2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(1 - \frac{\text{ch}(2\pi n z \sqrt{g/w})}{\text{ch}(\pi n h \sqrt{g/w})} \right) \cos \frac{2\pi n y}{w}. \quad (17)$$

Справедливость выражений для касательных напряжений проверяется удовлетворением граничным условиям на сторонах прямоугольного сечения:

$$1) \ z = 0, y = 0 \Rightarrow \sigma_{xy} = 0,$$

$$\tau_{xz}^{\min} = -\frac{3P_1}{2wh} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{4G_{xz} v_{xy} w^2}{\pi^2 E_{xx} h^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{\text{ch}(\pi n/k)} - 1 \right] \right);$$

2) $z = 0, y = \pm w/2 \Rightarrow \tau_{xy} = 0$,

$$\tau_{xz}^{\max} = -\frac{3P_1}{2wh} \left(1 + \frac{4G_{xz}v_{xy}w^2}{\pi^2 E_{xx}h^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(n\pi/k)} \right) \cos(n\pi) \right] \right), \quad (18)$$

где $k = \frac{w}{h\sqrt{g}}$.

Анализ влияния неоднородности касательных напряжений на межслойную сдвиговую прочность

Полученное на основе решения Сен-Венана – Лехницкого уточненное распределение межслойных касательных напряжений (17) в ортотропной балке показывает, что напряжения неоднородны по ширине. Максимального значения межслойные напряжения достигают на краях балки — $y = \pm w/2$. Неоднородность напряжений (разница между максимальным и минимальным значениями) возрастает при увеличении ширины балки.

Можно предположить, что рост касательных межслойных напряжений на краях балки приведет к снижению межслойной прочности $\tau^* = \tau_{xz}^{\max} = \frac{3P^*}{4wh}$. Увеличение $\tau_{xz}^{\max}$ на 10–30 % должно бы приводить к заметному снижению прочности, но на практике этого не происходит. Ситуация возникает такая же, как во всех градиентных полях, например, в пластинах с отверстиями или трещинами. Коэффициент концентрации напряжений, равный отношению наибольшего напряжения к среднему, всегда выше

(иногда значительно), чем коэффициент снижения прочности. Но в рассмотренной задаче на рост этого эффекта оказывают влияние также нормальные напряжения, которые практически не меняются по ширине балки.

С помощью линейного критерия расслоения (2) и распределения (17) несложно оценить влияние неоднородности межслойных напряжений при росте ширины на сдвиговую прочность. Ввиду громоздкости соотношения (17) для дальнейшего расчета использовали квадратичную аппроксимацию, применимость которой обоснована авторами в [19]:

$$\tau_{xz} = a(1 + by^2)(1 - 4z^2/h^2), \quad (19)$$

$$\text{где } a = \tau_{xz}^{\min}; b = \frac{4}{w^2} \left(\frac{\tau_{xz}^{\max}}{\tau_{xz}^{\min}} - 1 \right).$$

Поскольку цель расчета — определение степени влияния роста напряжений на прочность, будем рассматривать $\tau_{xz}^{\max}$ и положим $y = w/2$.

Тогда выражение (19) можно представить в виде

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{\max} (1 - 4z^2/h^2). \quad (20)$$

Повторяя описанную ранее последовательность действий для выражений (3) – (5), получим координату расслоения

$$z_0^{\text{точн}} = \frac{l}{4m} \left(1 + \frac{4G_{xz}v_{xy}w^2}{\pi^2 E_{xx}h^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n^2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(n\pi/k)} \right) \cos(n\pi) \right] \right)^{-1}. \quad (21)$$

Из (21), (19), (2) определяем критическую силу P^* и межслойную сдвиговую прочность $\tau_0^{\text{точн}} = \frac{3P^*}{4wh}$.

Для примера выбрано стандартное для подобных испытаний отношение $l/h = 5$. Принятые для иллюстрации значения механических характеристик, геометрических размеров и параметров m, c представлены в табл. 1.

Результаты сравнения межслойной прочности, рассчитанной по выражениям (3) и (20), представлены в табл. 2. Даже при $w/h = 10$, когда балка по определению приближается к пластине, снижение межслойной прочности пренебрежимо мало.

В действительности аппроксимация (20) несколько отличается от точного решения при $w \gg h$ (17). Предположим, например, что напряжения на краях балки увеличиваются на 10–30 %. Оценить снижение сдвиговой прочности в

Таблица 1. Данные для расчета

Table 1. Data for calculation

$P, \text{ Н}$	m	$c, \text{ МПа}$	$l, \text{ мм}$	$h, \text{ мм}$	$w, \text{ мм}$
100	10	1000	25	5	5–50

Таблица 2. Сравнение межслойной сдвиговой прочности, полученной по уточненному решению и по формуле Журавского ($\tau_0 = 80 \text{ МПа}$)

Table 2. Comparison of the interlayer shear strength obtained using the specified solution and the Zhuravsky equation ($\tau_0 = 80 \text{ МПа}$)

$h \times w, \text{ мм}^2$	$\tau_0^{\text{точн}}, \text{ МПа}$
5×5	$79,92 = 0,999\tau_0$
5×10	$79,72 = 0,996\tau_0$
5×25	$78,88 = 0,986\tau_0$
5×50	$77,44 = 0,968\tau_0$

данном случае можно с помощью выражения (5), изменяя параметр m , т.е. увеличивая роль $\tau_{xz}^{\max}$.

Тогда при $l/h = 5$ и $m = 10$ первоначально получаем

$$\tau_1 = \frac{mc}{m^2 + l^2/h^2} = c \frac{10}{100 + 25} = 0,08c. \quad (22)$$

Если, например, $m = 10 \times 1,1$ и $m = 10 \times 1,3$, то выражение (22) изменяется:

$$\tau_2 = c \frac{11}{121 + 25} = 0,0753c = 0,0942\tau_1 = \tau_1(1 - 5,8 \%);$$

$$\begin{aligned} \tau_3 &= c \frac{13}{169 + 25} = 0,067c = \\ &= 0,838\tau_1 = \tau_1(1 - 16 \%). \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогичные вычисления можно провести и для любого другого отношения длины к высоте балки, например $l/h = 7$:

$$\tau_4 = c \frac{10}{100 + 49} = 0,067c;$$

$$\tau_5 = c \frac{11}{121 + 49} = 0,0647c = 0,966\tau_4 = \tau_4(1 - 3,4 \%);$$

$$\begin{aligned} \tau_6 &= c \frac{13}{169 + 49} = 0,0596c = \\ &= 0,89\tau_4 = \tau_4(1 - 11 \%). \end{aligned} \quad (24)$$

Для стандартного отношения $l/h = 5$ рост касательных межслойных напряжений на 10 – 30 % дает вдвое меньшее снижение сдвиговой прочности — на 6 – 16 %. При отношении $l/h = 7$ увеличивается влияние неизменных нормальных напряжений, рост $\tau_{xz}^{\max}$ на 10 – 30 % дает втрое меньшее снижение межслойной прочности τ_0 — на 3,4 – 11 %.

Таким образом, снижение межслойной сдвиговой прочности значительно меньше увеличения максимальных касательных напряжений — $\tau_0/\tau_0^{\text{точн}} \ll \tau_{xz}/\tau_{xz}^{\max}$, что позволяет не учитывать неоднородность касательных напряжений по ширине.

Межслойная сдвиговая прочность при циклическом изгибе

Для описания усталостной межслойной прочности при циклическом изгибе можно заменить параметры m и c критерия (2) на функционалы от истории нагружения, в частности, на простые функции от числа циклов — $m(N)$, $c(N)$. Результаты испытаний на циклический изгиб коротких балок из углепластика [21] представлены на рис. 4. Видно, что предельные прямые для каждого числа циклов практически параллель-

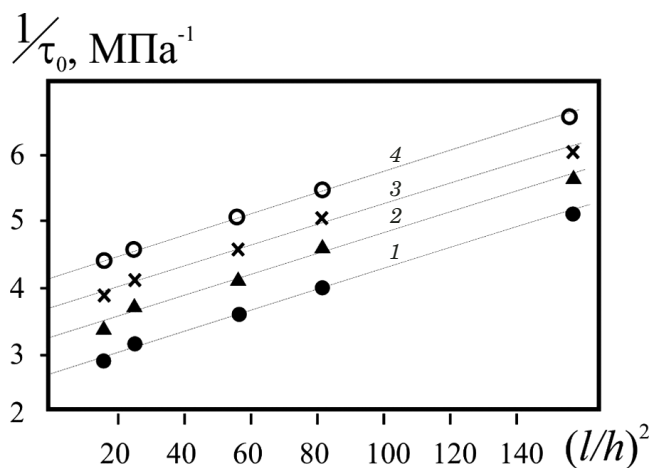


Рис. 4. Зависимости обратной межслойной сдвиговой прочности $1/\tau_0$ от $(l/h)^2$ при различных числах циклов N , равных 10^0 (1), 10^4 (2), 10^5 (3), 10^6 (4)

Fig. 4. Dependences of the inverse interlayer shear strength $1/\tau_0$ on $(l/h)^2$ at different number of cycles N : 10^0 (1), 10^4 (2), 10^5 (3), 10^6 (4)

ны. Это означает независимость произведения $m(N)c(N) = m(1)c(1)$ от числа циклов.

Кривую Велера для изгибной прочности по нормальным напряжениям $c(N)$ можно представить независимо полученным при циклическом растяжении углепластиков уравнением кривой усталости

$$c(N) = c(1)(1 - 0,035 \lg N). \quad (25)$$

Таким образом, зависимости (5) межслойной прочности τ_0 от числа циклов N и от отношения пролета к высоте балки (l/h) описываются на основании результатов лишь статических испытаний и независимых экспериментов на циклическое растяжение в виде (25):

$$\tau_0\left(N, \frac{l}{h}\right) = \frac{c(1)m(1)}{m^2(1)(1 - 0,035 \lg N)^{-2} + (l/h)^2}. \quad (26)$$

Расхождение кривых, полученных по формуле (26), с данными эксперимента не превышало 7 % (рис. 5).

Связь межслойной сдвиговой прочности с прочностью на растяжение согласно критерию (2) делает возможной и обратную процедуру — оценку кривой усталости для растяжения по данным циклических испытаний на изгиб коротких балок. Это обеспечивает экономию материала и снижение необходимой мощности испытательного оборудования, а также упрощает крепление образцов, так как испытания на изгиб менее затратны и проще в реализации, чем испытания на растяжение.

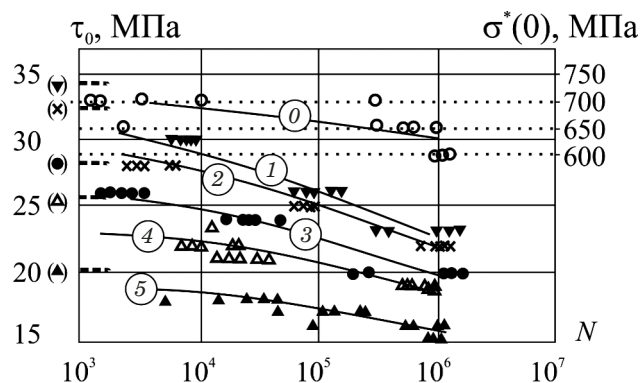


Рис. 5. Кривые усталости для однонаправленного углепластика при трехточечном изгибе: 1 – 5 — $l/h = 4, 5, 7, 5, 9, 5, 12, 5$; 0 — кривая усталости для однонаправленного углепластика при растяжении

Fig. 5. Fatigue curves for unidirectional carbon fiber reinforced plastic under three-point bending: 1 — $l/h = 4$; 2 — 5; 3 — 7.5; 4 — 9.5; 5 — 12.5; 0 — tensile fatigue curve for unidirectional carbon fiber reinforced plastic

Масштабный эффект при разрушении расслоением

Критическое напряжение при изгибе зависит от геометрии образца, что объясняет критерий (2), однако условие прочности, заявленное в напряжениях, не позволяет оценить масштабный эффект — снижение прочности с ростом абсолютных размеров. Между тем для разрушения расслоением этот эффект вполне объясним: упругая энергия накапливается в объеме, пропорциональном кубу характерного размера элемента (образца), а расходуется на образование свободной поверхности, площадь которой пропорциональна квадрату характерного размера.

Общий термодинамический критерий разрушения может быть сформулирован в виде равенства притока энергии dA от механической работы, совершаемой над телом, сумме изменений упругой энергии dU , работы разрушения dR и диссипации dT :

$$dA \geq dU + dR + dT. \quad (27)$$

Дифференцирование проводится по некоторому параметру разрушения, например, по площади трещины S . Обычно считается, что $dR = \gamma dS$ или в конечном виде: работа разрушения $R = \gamma S$, где γ — удельная работа разрушения.

Энергетический критерий расслоения может быть построен в упрощенном виде — не в дифференциальной, а в разностной форме — путем сравнения начального U_0 и конечного U_1 значений упругой энергии, накопленной в образце. При пренебрежении диссипацией T — тепловыми эффектами, энергией волн, кинетической энергией осколков и пр. — критерий (27) сводится к утверждению, что необходимым условием

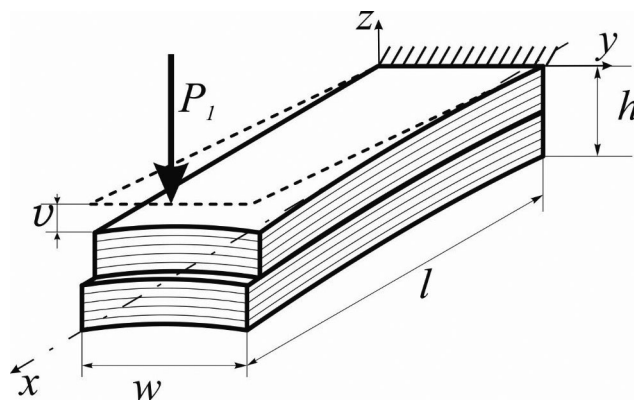


Рис. 6. Схема расслоения консольной балки по нейтральной линии при изгибе

Fig. 6. Delamination of a cantilever beam along the neutral line under bending

разрушения служит превышение начального уровня энергии над конечным на величину работы разрушения R , пропорциональную площади поверхности разрушения S . За время разрушения, принимаемое достаточно малым, захваты жесткой системы нагружения не смещаются, поэтому обычно дополнительная механическая работа A считается равной нулю. В этих предположениях критические напряжения находятся из условия

$$U_0 = U_1 + R. \quad (28)$$

При консольном изгибе балки (рис. 6) силой P_1 возникает прогиб v , при этом накопленная упругая энергия равна работе силы:

$$U_0 = \frac{1}{2} P_1 v = \frac{2 P_1^2 l^3}{E w h^3} = \frac{v^2 E w h^3}{8 l^3}, \quad (29)$$

где E — продольный модуль Юнга; h, w, l — толщина, ширина и длина балки.

При некоторой нагрузке произойдет расслоение и выделенная при неизменном прогибе упругая энергия будет затрачена на работу расслоения. Можно показать, что «энергетически выгодно» расслоение на две части посередине, с образованием одной трещины расслоения площадью $S = lw$. После расслоения при фиксированном прогибе оставшаяся упругая энергия по (29) составит

$$U_1 = \frac{v^2 E w}{8 l^3} 2 \left(\frac{h}{2} \right)^3 = \frac{1}{4} U_0. \quad (30)$$

При этом энергетический критерий (28) принимает вид

$$\frac{3}{4} U_0 = \gamma l w, \quad (31)$$

а критическая нагрузка из (29) —

$$P_1 = \frac{hw}{l} \sqrt{\frac{2}{3} E\gamma h}. \quad (32)$$

Если от силы перейти к наибольшим касательным напряжениям по формуле (1), критическое значение которых обычно принимают за межслойную сдвиговую прочность τ^* , то получим

$$\tau^* = \frac{3P_1}{2hw} = \frac{h}{l} \sqrt{\frac{3E\gamma}{2h}}. \quad (33)$$

Межслойная прочность, оказывается, зависит не только от отношения длины l к толщине h балки, но и от ее абсолютных размеров. С ростом h при сохранении подобия размеров l/h критическое напряжение (33) существенно снижается, что может привести к опасным последствиям, если при расчете изгибаемых композитных элементов (например, стеклопластиковых листовых рессор толщиной 20 мм) использовать значение межслойной сдвиговой прочности, определенное по стандартной методике при изгибе коротких балок с сечением 6 × 6 мм.

Энергетический критерий (28) можно применить при оценке упругой энергии (29) с учетом поправки к прогибу за счет межслойных сдвигов [19]:

$$v = v_1 + v_2 = \frac{Pl^3}{4E_x wh^3} + \frac{\alpha Pl}{4G_{xz} wh} = v_1 \left(1 + \frac{\alpha E_x}{G_{xz}} \frac{h^2}{l^2} \right),$$

где $\alpha = 6/5$.

Энергия после расслоения будет несколько больше, чем полученная по элементарной формуле (30):

$$U_1 = \frac{1}{4} \frac{U_0 \left(1 + \frac{\alpha E}{2G} \frac{h^2}{l^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{\alpha E}{G} \frac{h^2}{l^2} \right)^2}. \quad (34)$$

Например, для короткой балки при $E/G_{xz} = 5$, $l/h = 5$ различие энергий, определенных по формулам (34) и (30), составит 19 %; $U_1 \approx U_0/5$.

Тогда уточненную критическую нагрузку и критическое значение касательных напряжений выразим, соответственно, как

$$P_1 = \frac{hw}{2l} \sqrt{\frac{5}{2} E\gamma h}, \quad \tau^* = \frac{3h}{4l} \sqrt{\frac{5}{2} \frac{E\gamma}{h}}. \quad (35)$$

Эксперимент

Для экспериментального подтверждения незначительного влияния неоднородности касательных межслойных напряжений на сдвиговую

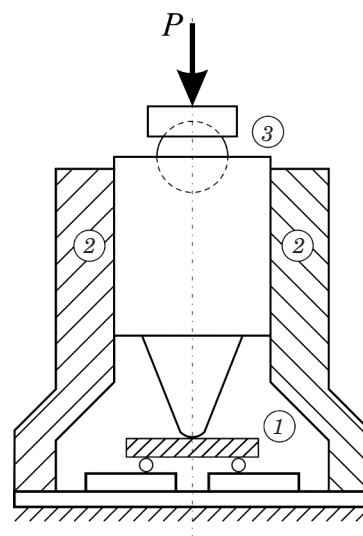


Рис. 7. Схема приспособления для испытаний коротких балок

Fig. 7. Scheme of the device for testing short beams

прочность проведена серия испытаний на трехточечный изгиб коротких балок. Для этого из ортогонально армированного стеклопластика изготавливали образцы толщиной $h = 5$ мм и шириной w , равной 5 и 25 мм. Испытания проводили с помощью электромеханической универсальной установки INSTRON. Все образцы нагружали до потери несущей способности.

Для испытания коротких композитных балок применяли экспериментальную оснастку (рис. 7), разработанную в ИМАШ РАН. Она представляет собой приспособление с цилиндрическими скользящими направляющими 2 и специальной схемой центровки. Для точной установки образца — короткой балки 1 в верхнее центральное отверстие перед испытаниями помещали цилиндр с диском заданного диаметра, равного длине пролета, к которому прижимаются нижние опоры. Это позволяет гарантированно центрировать опоры с точностью до 0,1 мм. Для компенсации неперпендикулярности приложения нагрузки использовали шаровую центрирующую опору.

Экспериментальные значения межслойной прочности стеклопластиковых образцов, рассчитанные с помощью соотношения (1), представлены в табл. 3. Они подтверждают отсутствие снижения межслойной сдвиговой прочности при уве-

Таблица 3. Межслойная сдвиговая прочность стеклопластиковых образцов

$h \times w$, мм ²	P , Н	$\tau_0^{\text{ср}} \cdot 10^3$, МПа
5 × 5	837	25,11
5 × 25	4333	25,99

личении ширины балки. Проведенный эксперимент показал практическую независимость межслойной прочности от ширины образца и незначительность поправки (17) – (21) к элементарному решению (3).

Выводы

1. Выполнение силового (2) и энергетического (20) критериев — необходимое условие расслоения; в расчетах следует использовать наименьшее из критических напряжений, определяемых этими критериями.

2. Силовой критерий (2) описывает зависимость критических напряжений от геометрических соотношений, а энергетический критерий объясняет также масштабный эффект прочности — снижение критического напряжения при возникновении расслоения в балке с увеличенными размерами.

3. Применение решения Сен-Венана – Лехницкого позволяет уточнить оценку межслойной сдвиговой прочности при изгибе короткой композитной балки. Однако согласно предложенному критерию (2) поправка к элементарному решению при оценке прочности значительно (в несколько раз) меньше, чем полученный из точного решения рост наибольших касательных напряжений с увеличением ширины образца, что подтверждается в экспериментах.

4. Неоднородность напряжений по ширине образца можно не учитывать. Расчетный коэффициент концентрации напряжений всегда значительно выше, чем экспериментальный коэффициент снижения прочности из-за концентрации напряжений.

В рассмотренной задаче об изгибе короткой балки разница между коэффициентами снижения прочности и концентрации касательных напряжений обусловлена влиянием вклада постоянных по ширине нормальных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bazli M., Heitzmann M., Villacorta Hernandez B.** Durability of fibre-reinforced polymer-wood composite members: An overview / *Composite Structures*. 2022. 295. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.115827
2. **Skoczylas J., Samborski S., Klonica M.** A multilateral study on the FRP composite's matrix strength and damage growth resistance / *Composite Structures*. 2021. 263. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.113752
3. **Hodgkinson J. M.** Mechanical Testing of Advanced Fibre Composites. — Woodhead Publishing, 2010. — 378 p.
4. **Kelly A., Zweben C. H.** Comprehensive composite materials. — New York: Elsevier Science, 2000. — 810 p.
5. **Полилов А. Н.** Экспериментальная механика композитов. Учебное пособие для технических университетов. — Изд. 2-е. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. — 375 с.

6. **Sieberer S., Savandaiah C., LeBlhumer J., Schagerl M.** Shear property measurement of additively manufactured continuous fibre reinforced plastics by in-plane torsion testing / *Additive Manufacturing*. 2022. 55. DOI: 10.1016/j.addma.2022.102805
7. **Peng Z., Wang X., Ding L., Wu Z.** Integrative tensile prediction and parametric analysis of unidirectional carbon/basalt hybrid fiber reinforced polymer composites by bundle-based modeling / *Materials and Design*. 2022. 218. DOI: 10.1016/j.matdes.2022.110697
8. **Gao D., Zhang Y., Wen F., et al.** Transverse shear properties of fiber reinforced polymer bars with different reinforced phases / *Journal of Composite Materials*. 2022. 55(27). P. 4063 – 4078. DOI: 10.1177/00219983211031630
9. **Фирсанов В. В.** Изгиб композитной балки с учетом сдвиговой деформации / *Известия тульского государственного университета. Технические науки*. 2018. № 4. С. 168 – 174.
10. **Дударьков Ю. И., Лимонин М. В.** Определение напряжений поперечного сдвига в слоистом композите / *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2020. Т. 86. № 2. С. 44 – 53. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-2-44-53
11. **Huang S., Yan L., Bachtar E. V., et al.** Bond behaviour between flax-glass hybrid fibre reinforced epoxy composite and laminated veneer lumber joints / *Journal of Building Engineering*. 2022. 50. DOI: 10.1016/j.jobbe.2022.104207
12. **Ascione F., Napoli A., Realfonzo R.** Interface bond between FRP systems and substrate: Analytical modeling / *Composite Structures*. 2021. 257. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112942
13. **Cagnacci E., Orlando M., Salvatori L., Spinelli P.** Four-point bending tests on laminated glass beams reinforced with FRP bars adhesively bonded to the glass / *Glass Structures and Engineering*. 2022. 6(2). P. 211 – 232. DOI: 10.1007/s40940-021-00147-9
14. **Лобанов Д. С., Паньков А. М.** Влияние повышенных температур на усталостную долговечность конструкционного стеклопластика при испытаниях на межслойной сдвиг / *Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации*. 2020. Т. 2. С. 62 – 65.
15. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. — Изд. 2-е. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
16. **Полилов А. Н., Хохлов В. К.** Расчетный критерий прочности композитных балок при изгибе / *Машиноведение*. 1979. № 2. С. 53 – 57.
17. **Самсонов В. А., Шляховой В. С.** Расчет на прочность коротких балок при их поперечном изгибе / *Перспективы научно-технологического развития агропромышленного комплекса России*. 2019. С. 410 – 413.
18. **Жигун В. И., Плуме Э. З., Муйжниец К. И., Краснов Л. Л.** Универсальные методы определения модулей сдвига композиционных материалов / *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2020. Т. 26. № 3. С. 313 – 326. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2020.26.03.313_326.02
19. **Полилов А. Н., Власов Д. Д., Татусь Н. А.** Уточненный метод оценки модуля межслойного сдвига по поправке к прогибу образцов из полимерных композитов / *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2023. Т. 89. № 3. С. 57 – 69. DOI: 10.26896/1028-6861-2023-89-3-57-69
20. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
21. **Работнов Ю. Н., Когаев В. П., Полилов А. Н., Стрекалов В. Б.** Критерий межслойной прочности углепластиков при циклических нагрузках / *Механика композитных материалов*. 1982. № 6. С. 983 – 986.

REFERENCES

1. **Bazli M., Heitzmann M., Villacorta Hernandez B.** Durability of fibre-reinforced polymer-wood composite members: An overview / *Composite Structures*. 2022. 295. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.115827
2. **Skoczylas J., Samborski S., Klonica M.** A multilateral study on the FRP composite's matrix strength and damage

- growth resistance / *Composite Structures*. 2021. 263. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.113752
3. **Hodgkinson J. M.** *Mechanical Testing of Advanced Fibre Composites*. — Woodhead Publishing, 2010. — 378 p.
 4. **Kelly A., Zweben C. H.** *Comprehensive composite materials*. — New York: Elsevier Science, 2000. — 810 p.
 5. **Polilov A. N.** *Experimental Mechanics of Composites. Textbook for Technical Universities*. 2nd edition. — Moscow: MGTU im. N. É. Bauman, 2018. — 375 p. [in Russian].
 6. **Sieberer S., Savandaiah C., Leßlumer J., Schagerl M.** Shear property measurement of additively manufactured continuous fibre reinforced plastics by in-plane torsion testing / *Additive Manufacturing*. 2022. 55. DOI: 10.1016/j.addma.2022.102805
 7. **Peng Z., Wang X., Ding L., Wu Z.** Integrative tensile prediction and parametric analysis of unidirectional carbon/basalt hybrid fiber reinforced polymer composites by bundle-based modeling / *Materials and Design*. 2022. 218. DOI: 10.1016/j.matdes.2022.110697
 8. **Gao D., Zhang Y., Wen F., et al.** Transverse shear properties of fiber reinforced polymer bars with different reinforced phases / *Journal of Composite Materials*. 2022. 55(27). P. 4063 – 4078. DOI: 10.1177/00219983211031630
 9. **Firsanov V. V.** Bending of composite beams considering shear deformation / *Izv. Tul. Gos. Univ. Tekhn. Nauki*. 2018. N 4. P. 168 – 174 [in Russian].
 10. **Dudarkov Yu. I., Limonin M. V.** Determination of the transverse shear stress in layered composites / *Industr. Lab. Mater. Diagn.* 2020. Vol. 86. N 2. P. 44 – 53 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-2-44-53
 11. **Huang S., Yan L., Bachtar E. V., et al.** Bond behaviour between flax-glass hybrid fibre reinforced epoxy composite and laminated veneer lumber joints / *Journal of Building Engineering*. 2022. 50. DOI: 10.1016/j.jobbe.2022.104207
 12. **Ascione F., Napoli A., Realfonzo R.** Interface bond between FRP systems and substrate: Analytical modeling / *Composite Structures*. 2021. 257. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112942
 13. **Cagnacci E., Orlando M., Salvatori L., Spinelli P.** Four-point bending tests on laminated glass beams reinforced with FRP bars adhesively bonded to the glass / *Glass Structures and Engineering*. 2022. 6(2). P. 211 – 232. DOI: 10.1007/s40940-021-00147-9
 14. **Lobanov D. S., Pan'kov A. M.** Effect of Elevated Temperatures on the Fatigue Life of Structural Fiberglass in Interlaminar Shear Testing / *Aérokosm. Tekhn. Vysok. Tekhnol. Innov.* 2020. N 2. P. 62 – 65 [in Russian].
 15. **Rabotnov Yu. N.** *Mechanics of a Deformable Solid Body*. 2nd edition. — Moscow: Nauka, 1988. — 712 p. [in Russian].
 16. **Polilov A. N., Khokhlov V. K.** Calculation Criterion for the Strength of Composite Beams in Bending / *Mashinovedenie*. 1979. N 2. P. 53 – 57 [in Russian].
 17. **Samsonov V. A., Shlyakhovoi V. S.** Strength calculation of short beams during their transverse bending / *Persp. Nauch.-Tekhnol. Razv. Agroprom. Kompl. Rossii*. 2019. P. 410 – 413 [in Russian].
 18. **Zhigun V. I., Plume E. Z., Mujzhnieks K. I., Krasnov L. L.** Universal Methods for Determining the Shear Modules of Composite Materials / *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.* 2020. Vol. 26. N 3. P. 313 – 326 [in Russian]. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2020.26.03.313_326.02
 19. **Polilov A. N., Vlasov D. D., Tatus' N. A.** Specified method for estimating the interlayer shear modulus by correcting the deflection of polymer composite specimens / *Industr. Lab. Mater. Diagn.* 2023. Vol. 89. N 3. P. 57 – 69. DOI: 10.26896/1028-6861-2023-89-3-57-69
 20. **Lekhnitsky S. G.** *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow: Nauka, 1977. — 416 p. [in Russian].
 21. **Rabotnov Yu. N., Kogaev V. P., Polilov A. N., Strekalov V. B.** Criterion of interlayer strength of carbon fiber reinforced plastics under cyclic loads / *Mekh. Kompoz. Mater.* 1982. N 6. P. 983 – 986 [in Russian].