

УДК 620.162.2:534.1:534.121.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ КОМПОЗИЦИОННОЙ МЕМБРАНЫ

© А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, И. А. Тарасюк¹*Статья поступила 15 января 2015 г.*

Показано, что в классическом уравнении колебания круглой мембраны [1] допущена ошибка — на мембраны действуют не растягивающие силы, а растягивающие напряжения. Ее исправление позволяет выводить уравнения малых поперечных колебаний круглой мембраны с учетом ее механических и реологических характеристик. Получены уравнения колебаний однородной круглой мембраны, а также определены ее собственные частоты с учетом механических и реологических характеристик материала. В случае линейно-упругого композиционного материала получены уравнение колебания круглой мембраны, а также ее собственные частоты в зависимости от концентрации компонент. Даны рекомендации по учету ползучести композиционного материала мембраны по технической теории старения.

Ключевые слова: композиционный материал; приближение эффективных свойств материала Кравчука – Тарасюка; малые поперечные колебания; концентрации компонент; линейно-упругий материал; квазиупругий однородно-стареющий материал.

Классический пример получения уравнений колебания — вывод уравнения колебания круглой мембраны [1, 2]. В основном это уравнение получают простой заменой оператора Лапласа в декартовой системе координат на оператор Лапласа в полярной системе координат [2].

В данной статье рассмотрен вывод уравнения колебания круглой мембраны при действии постоянной растягивающей нагрузки непосредственно в полярной системе координат, что позволяет рассмотреть все особенности нагружения мембраны и учесть ее механические характеристики. Кроме того, установлено, что при выводе классического уравнения колебания мембраны допущена ошибка в известной монографии [1] — на мембраны действуют не растягивающие постоянные по величине силы, а растягивающие напряжения. Исправление этой ошибки позволяет получать уравнения малых поперечных колебаний мембраны переменной толщины в радиальном направлении, а также учитывать уравнения состояния материала мембраны в случае ее постоянной толщины.

В качестве вспомогательного результата нами установлена ошибочность замены $x = \xi^2$ в уравнении колебания подвешенной за один конец весомой нити для получения уравнения Бесселя [3]. Эта замена приводит к неверной размерности собственных частот. Поскольку с точностью до замены переменных уравнение подвешенной нити полностью совпадает с уравнением свободных колебаний круглой мембраны, то при его решении используем план, изложенный в работе [2].

Вывод откорректированного уравнения колебания круглой однородной мембраны при действии постоянных растягивающих усилий. Будем придерживаться наиболее простой системы вывода уравнения, близкой к изложенной в [1], исправляя допущенные там ошибки. Пусть в положении равновесия натянута круглая мембрана радиусом R расположена перпендикулярно оси Oz цилиндрической системы координат, являющейся осью симметрии данной мембраны. Допустим, что в состоянии покоя точка $(0, 0, 0)$ является центром мембраны, при этом от угла φ цилиндрической системы координат в силу симметрии мембраны и симметрии растягивающих усилий решение задачи не зависит. Пусть колебания мембраны происходят в направлении Oz . Каждая точка мембраны смещается лишь параллельно оси Oz и это перемещение в момент времени t обозначим $u(r, t)$.

Следуя работе [1], при выводе уравнения рассмотрим внутренний элемент мембраны, соответствующий интервалу (r_1, r_2) на оси Or и углам (φ_1, φ_2) (рис. 1, 2). Зафиксируем произвольное время t . Будем считать, что мембрана имеет постоянную толщину h , тогда площадь поперечного направления Or сечения $S(r)$ выделенного элемента мембраны составит $S(r) = hr(\varphi_2 - \varphi_1)$. Вычислим длину элемента мембраны вдоль направления Or , соответствующего интервалу (r_1, r_2) [4]:

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2} dr. \quad (1)$$

Из выражения (1) очевидно, что элемент мембраны, соответствующий интервалу (r_1, r_2) , имеет посто-

¹ Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь; e-mail: ask_Belarus@inbox.ru

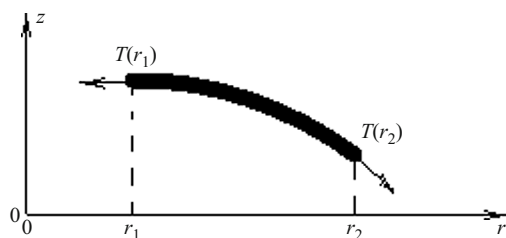


Рис. 1. Схема движения элемента мембраны, соответствующего интервалу (r_1, r_2) , с действующими на концах силами, заменяющими отброшенные части мембраны

янную длину $r_2 - r_1$ только тогда, когда выполняется неравенство $(\partial u / \partial r)^2 \ll 1$, свидетельствующее, что рассматриваются малые колебания мембраны.

Отметим, что если α — угол между касательной к образующей поверхности вращения $u(r, t)$ и осью $0r$, то $\operatorname{tg}(\alpha) = \partial u / \partial r$, $\cos(\alpha) = 1 / \sqrt{1 + (\partial u / \partial r)^2}$, $\sin(\alpha) = \frac{\partial u / \partial r}{\sqrt{1 + (\partial u / \partial r)^2}}$. При принятых предположениях $\cos(\alpha) \approx 1$, а $\sin(\alpha) \approx \partial u / \partial r$.

Пусть σ_r — постоянное напряжение натяжения мембраны на границах выделенного элемента, соответствующего отрезкам (r_1, r_2) и углам (φ_1, φ_2) (см. рис. 2). Тогда величина интегральной силы, действующей в плоскости rOz и приложенной к любой из сторон рассматриваемого элемента, определится выражением $T(r) = (\varphi_2 - \varphi_1) r h \sigma_r$. Вертикальная сила, действующая на элемент мембраны, в силу осесимметричности задачи составит [2]:

$$T(r_2) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_2} - T(r_1) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_1}. \quad (2)$$

Подставляя в (2) значения $T(r)$, вычисленные на концах интервала (r_1, r_2) , получим

$$\begin{aligned} & T(r_2) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_2} - T(r_1) \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_1} = \\ & = (\varphi_2 - \varphi_1) h \sigma_r \left[r_2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_2} - r_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_1} \right] = \\ & = (\varphi_2 - \varphi_1) h \sigma_r \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr. \end{aligned} \quad (3)$$

Выражение (3) существенно отличается от полученного в известной монографии [1]. Это первая исправленная ошибка в выводе уравнения колебания круглой мембраны при действии постоянной растягивающей нагрузки. Отрицательный знак появляется в сумме сил (3) из-за того, что сила в точке r_1 направлена противоположно направлению касательной $\partial u / \partial r$ (см. рис. 1).

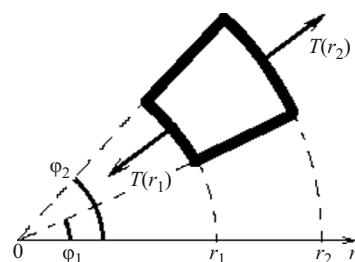


Рис. 2. Вид сверху элемента мембраны под действием растягивающих сил

Перейдем к обсуждению второй ошибки при выводе уравнения малых поперечных колебаний круглой мембраны. Пусть ρ — плотность материала мембраны. Тогда вертикальная инерционная составляющая рассматриваемого элемента мембраны (см. рис. 1, 2) определится формулой

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) S(r) dr = (\varphi_2 - \varphi_1) \int_{r_1}^{r_2} \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) h r dr. \quad (4)$$

Исходя из баланса действующих на элемент мембраны сил, из выражений (2) – (4) получим

$$(\varphi_2 - \varphi_1) \int_{r_1}^{r_2} \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) h r dr = h \sigma_r (\varphi_2 - \varphi_1) \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr. \quad (5)$$

Уравнение (5) можно переписать в виде

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[\left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) r - \sigma_r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] dr = 0. \quad (6)$$

Если считать, что элемент мембраны (r_1, r_2) настолько мал по сравнению с длиной волны, что выполняется формула Лагранжа [4]

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{r_2} \left[\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} r - \sigma_r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] dr \approx \\ & \approx \left[\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} r - \sigma_r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]_{r=r_0} (r_2 - r_1), \end{aligned} \quad (7)$$

где $r_0 \in (r_1, r_2)$ — некоторая точка, то из (7) следует общеизвестное локальное уравнение колебания круглой мембраны под действием постоянного растягивающего напряжения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (8)$$

где $a^2 = \sigma_r / \rho$ (здесь при вычислении коэффициента a используется напряжение растяжения круглой мембраны, а не сила, как в работе [1, 2]).

Решение уравнения свободного колебания круглой мембраны с одним закрепленным краем. Для случая весомой нити следовать методическому подходу, изложенному в монографии [3], невозможно, поскольку при использовании замены $r = \xi^2$ получается выражение, в котором собственные частоты будут иметь размерность $\sqrt{m}/c$, а не c^{-1} . Поэтому будем придерживаться плана, изложенного в работе [2].

Применим метод Фурье. Он заключается в предположении, что решение (8) с принятыми начальными и краевыми условиями имеет вид

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(r, t), \quad (9)$$

где $u_i(r, t) = X_i(r)\Theta_i(t)$ — функции для каждого $i = \overline{1, \infty}$, удовлетворяющие уравнению (8). Подставляя $u_i(r, t)$ в (8), получим

$$\frac{1}{a^2} \frac{1}{\Theta_i(t)} \frac{d^2 \Theta_i(t)}{dt^2} = \frac{1}{r} \frac{1}{X_i(r)} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dX_i(r)}{dr} \right]. \quad (10)$$

Место коэффициента a^2 в левой части выражения (10) гарантирует влияние предварительного натяжения и плотности материала только на частотный спектр мембраны.

Очевидно, что (10) возможно только тогда, когда $\forall i$ обе части уравнения равны некоторой константе — λ_i^2 [2]. Таким образом, из (10) получим два независимых уравнения для определения $X_i(r)$ и $\Theta_i(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_i(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX_i(r)}{dr} + \lambda_i^2 X_i(r) &= 0, \\ \frac{d^2 \Theta_i(t)}{dt^2} + \lambda_i^2 a^2 \Theta_i(t) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решениями уравнений (11) являются функции [2, 4]

$$X_i(r) = C_{1,i}^r J_0(\lambda_i r) + C_{2,i}^r Y_0(\lambda_i r), \quad (12)$$

$$\Theta_i(t) = C_{1,i}^t \cos(\lambda_i a t) + C_{2,i}^t \sin(\lambda_i a t), \quad (13)$$

где $J_0(\lambda_i r)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $Y_0(\lambda_i r)$ — функция Бесселя второго рода нулевого порядка; $C_{m,i}^r$ ($m = \overline{1, 2}$) и $C_{m,i}^t$ ($m = \overline{1, 2}$) — произвольные константы. Поскольку $\lim_{r \rightarrow 0} Y_0(\lambda_i r) = -\infty$, эта функция определяет физически невозможное поведение центра мембраны (бесконечные перемещения в центре) и, в частности, противоречит гипотезе о том, что (1) равно $r_2 - r_1$, следовательно $C_{2,i}^r = 0$.

Исходя из краевого условия неподвижности края круглой мембраны, получаем $u|_{r=R} = 0$. Из общего вида решения (9) и конкретного выражения для $X_i(r)$ (12) следует, что для удовлетворения приведенного

выше краевого условия достаточно, чтобы выполнялось уравнение

$$J_0(\lambda_i R) = 0. \quad (14)$$

Известно, что (14) имеет бесконечное число вещественных корней μ_i [2], поэтому для удовлетворения условия неподвижности края круглой мембраны достаточно, чтобы $\lambda_i = \mu_i/R$.

Отметим, что (11) — это дифференциальные уравнения второго порядка, т.е. для построения их единственного решения необходимо удовлетворить два краевых и два начальных условия. Однако исключение из рассмотрения функции $Y_0(\lambda_i r)$ исходя из очевидных соображений физического соответствия реальному процессу колебания круглой мембраны, сокращает количество краевых условий до одного — необходимого использования предположения, что $C_{1,i}^r = 1$. Тогда решение (8) в виде (9) будет иметь следующий вид [2]:

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_i}{R} r\right) \left[C_{1,i}^t \cos\left(\frac{\mu_i}{R} a t\right) + C_{2,i}^t \sin\left(\frac{\mu_i}{R} a t\right) \right]. \quad (15)$$

При начальных условиях для свободных колебаний с нулевой начальной скоростью получаем, что $u|_{t=0} = f(r/R)$ и $\partial u / \partial t|_{t=0} = 0$. Следовательно, $C_{2,i}^t = 0$ ($i = \overline{1, \infty}$) и уравнение (15) преобразуется к виду [2]

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\mu_i \frac{r}{R}\right) C_{1,i}^t \cos\left(\frac{\mu_i}{R} a t\right), \quad (16)$$

где $C_{1,i}^t = \frac{2}{J_1(\lambda_i)^2} \int_0^1 x f(x) J_0(\mu_i x) dx$, $x = r/R$.

Таким образом, собственные частоты свободных колебаний круглой мембраны определяются выражением

$$\omega_i = \frac{\mu_i}{R} \sqrt{\frac{\sigma_r}{\rho}}. \quad (17)$$

Определение напряжения σ_r растяжения по радиальной деформации ε_r круглой мембраны при отсутствии реологических эффектов в ее материале. Пусть радиальное увеличение круглой мембраны при ее натяжении составляет Δ метров, тогда на краю мембраны аксиальные деформации $\varepsilon_{\phi}|_{r=R} = \Delta/R$ [5]. Предполагая, что ε_{ϕ} — константа внутри радиально растянутой мембраны, несложно показать на основании уравнения совместности деформаций круглой мембраны для осесимметричного случая, что $\varepsilon_r = \varepsilon_{\phi}$ [5]. Отметим, что деформации сдвига отсутствуют в осесимметричном случае радиального натяжения круглой мембраны. Исходя из условия задачи, $\sigma_z = 0$. Это условие в зависимости от уравнений состояния будет приводить к равномерному (одинаковому во всех точках

(r, φ) мембраны) изменению ее толщины, что никак не скажется на результатах вывода уравнения (8).

Таким образом, в случае упругой изотропной однородной мембраны получаем систему уравнений для определения напряжений натяжения мембраны по результатам ее радиального растяжения Δ [5]:

$$\begin{aligned}\sigma_r - \nu\sigma_\varphi &= E\Delta/R, \\ \sigma_\varphi - \nu\sigma_r &= E\Delta/R,\end{aligned}\quad (18)$$

где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона. Решением (18) является выражение

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu} \frac{\Delta}{R}. \quad (19)$$

Тогда из (17) следует, что собственные частоты колебания круглой закрепленной по краю мембраны составят

$$\omega_i = \frac{\mu_i}{R} \sqrt{\frac{E}{1-\nu} \frac{\Delta}{R}}.$$

Рассмотрим общий случай нелинейных уравнений напряженно-деформированного состояния материала мембраны при выполнении гипотезы отсутствия в теле деформаций сдвига [6]:

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_{cp} &= 2G\mathfrak{Z}(\varepsilon_r - \varepsilon_{cp}), \\ \sigma_\varphi - \sigma_{cp} &= 2G\mathfrak{Z}(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_{cp}), \\ \sigma_z - \sigma_{cp} &= 2G\mathfrak{Z}(\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}),\end{aligned}\quad (20)$$

где $\sigma_{cp} = (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)/3$; $\varepsilon_{cp} = (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)/3$; G — модуль сдвига; $\mathfrak{Z}()$ — нелинейная монотонно возрастающая функция. Очевидно, что, используя подстановки $\sigma_z = 1$ и $\mathfrak{Z} = I$ (I — тождественная функция), невозможно получить уравнения (18) для линейного случая, даже если дополнительно предположить, что $\varepsilon_{cp} = 0$ в упругопластическом случае [6–9]. Подчеркнем, что в случае использования гипотезы $\varepsilon_{cp} = 0$ для плоского напряженного состояния [6–9] из (20) получается противоречивая система уравнений для определения ε_z , так как, с одной стороны, $\varepsilon_z = -(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi)$, а с другой — $\varepsilon_z = \mathfrak{Z}^{-1}\left(\frac{\sigma_z - \sigma_{cp}}{2G}\right)$, что, очевидно, далеко не одно и то же при произвольном выборе $\mathfrak{Z}()$.

Таким образом, в связи с отсутствием в литературе адекватных общих нелинейных уравнений для осесимметричного плоского напряженного состояния радиально растянутой круглой мембраны проведем эвристический анализ ее напряженного упругопластического состояния. Исходя из того факта, что в осесимметричном случае уравнение неразрывности деформаций будет давать один и тот же результат $\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \Delta/R$ [5] независимо от характера деформаций, напряженное состояние упругопластической дефор-

мации мембраны можно описать с использованием билинейной диаграммы Прандтля:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu} \frac{\Delta}{R}, & \Delta \leq R \frac{1-\nu}{E} \sigma_T, \\ E_T \frac{\Delta}{R} + \sigma_T \left(1 - E_T \frac{1-\nu}{E}\right), & \Delta > R \frac{1-\nu}{E} \sigma_T, \end{cases} \quad (21)$$

где σ_T — предел текучести материала; E_T — касательный модуль пластичности.

Из (21) очевидно, что если $\Delta > R \frac{1-\nu}{E} \sigma_T$, то собственные частоты колебания мембраны из идеально упругопластического материала ($E_T = 0$) составят

$$\omega_i = \frac{\mu_i}{R} \sqrt{\frac{\sigma_T}{\rho}}.$$

Аналогично билинейную диаграмму (21) можно использовать для моделирования нелинейной упругой деформации мембраны. В случае гиперэластичных материалов достаточно просто перейти к использованию многолинейной диаграммы.

Вычисление собственных частот с учетом реологии однородного материала мембраны. Предполагая, что все реологические процессы в мембране являются квазистатическими, т.е. на них не оказывают влияния ее массоинерционные характеристики, решение задачи ползучести сводим фактически к формальной замене $T(r)$ на $T(r, t)$ в (2)–(7). Соответственно, вместо (8) можно получить уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (22)$$

где $a(t)^2 = \sigma_r(t)/\rho$. Аналогично из (8)–(17) получим уравнение для собственных частот мембраны с учетом релаксации напряжений натяжения мембраны:

$$\omega_i = \frac{\mu_i}{R} \sqrt{\frac{\sigma_r(t)}{\rho}}. \quad (23)$$

Релаксация напряжений натяжения однородного материала мембраны по наследственной теории. Перейдем к анализу вязкого поведения мембраны. Отметим, что уравнение (22) лежит в основе описания не только нелинейных деформаций твердого тела, но также общих уравнений вязкоупругости и вязкоупругопластичности [10, 11]. Соответственно, поскольку выше установлен факт, что уравнения (20) невозможно применить при плоском напряженном состоянии линейно- и нелинейно-упруго или упругопластически деформированной круглой пластины, то и в этих случаях для нее невозможно решить задачи при линейно-нелинейно-вязкоупругом или вязкоупругопластическом состояниях.

Отметим, что одними из доступных при расчете вязкоупругого поведения круглой мембраны являются наследственные уравнения квазиупругого поведения изотропного материала мембраны с использованием

гипотезы Н. Х. Арутюняна о постоянстве коэффициента Пуассона ν . При этом уравнения ползучести А. Р. Ржаницына в случае плоского напряженного состояния однородно-старееющей мембраны примут следующий вид [10, 12]:

$$\begin{aligned} E(t)\varepsilon_r(t) &= L[\sigma_r(t) - \nu\sigma_\varphi(t)], \\ E(t)\varepsilon_\varphi(t) &= L[\sigma_\varphi(t) - \nu\sigma_r(t)], \end{aligned} \quad (24)$$

где $L[\sigma(t)] = \sigma(t) + \int_0^t \sigma(\tau)\Gamma(t, \tau)d\tau$ — наследственный

оператор ползучести; $E(t)$ — мгновенный модуль упругости однородно-старееющего материала. Пусть обратным оператором к $L[]$ из (24) является оператор

релаксации $\Xi[f(t)] = f(t) - \int_0^t f(\tau)R(t, \tau)d\tau$, тогда из

(24) с учетом того, что $\varepsilon_r(t) = \varepsilon_\varphi(t) = \Delta/R$, получаем

$$\sigma_r(t) = \sigma_\varphi(t) = \frac{1}{1-\nu} \frac{\Delta}{R} \left[E(t) - \int_0^t E(\tau)R(t, \tau)d\tau \right]. \quad (25)$$

Применение технической теории старения к описанию релаксации напряжений натяжения мембраны в случае пластической деформации. К сожалению, теоретически обосновать применение уравнений квазиупругопластичности по аналогии с (24) невозможно, поэтому процесс релаксации напряжений в мембране при нелинейном, в частности, упругопластичном случае (21) можно описать с помощью технической теории старения [13]:

$$\sigma_r(t) = \sigma_\varphi(t) = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu} \frac{\Delta}{R} \Psi(t), \Delta \leq R \frac{1-\nu}{E} \sigma_\tau, \\ \left[E_\tau \frac{\Delta}{R} + \sigma_\tau \left(1 - E_\tau \frac{1-\nu}{E} \right) \right] \Psi(t), \\ \Delta > R \frac{1-\nu}{E} \sigma_\tau. \end{cases} \quad (26)$$

Уравнение (26) отличается от (21) только наличием функции релаксации $\Psi(t)$ [13]. Однако между (25) и (26) существует преемственность, так как (25) в упругой области совпадает с (26) с точностью до замены $\Psi(t) = E(t) - \int_0^t E(\tau)R(t, \tau)d\tau$.

Колебания композиционной мембраны без учета реологии. Рассмотрим композиционный материал, состоящий из n компонент, деформация которых описывается различными модулями упругости E_k и коэффициентами Пуассона ν_k ($k = 1, n$). Компоненты композиционного материала имеют объемные доли γ_k ($k = 1, n$).

Далее рассмотрим некоторый кольцевой элемент круглой мембраны между точками r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) (см. рис. 1). Ширина кольца $r_2 - r_1$ фрагмента композиционной круглой мембраны такова, что объемные доли

γ'_k ($k = \overline{1, n}$) компонент композиционного материала для выделенного кольца совпадают с концентрациями для всей мембраны целиком — γ_k ($k = 1, n$). Кольцо с минимальной шириной l' , удовлетворяющей изложенным выше гипотезам по объемным долям, называется макроточкой композиционного материала. Очевидно, что точки r_1 и r_2 выбирают из условия $l' \leq r_2 - r_1$.

Среднюю плотность материала рассматриваемого кольца мембраны находят по выражению

$$\langle \rho \rangle = \sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k, \quad (27)$$

где ρ_k — плотность k -й компоненты композиционного материала.

В соответствии с общей методикой, примененной для решения задачи определения эффективных параметров линейно-упругого твердого тела, исследуем элемент композиционного материала (макроточку), на границе которого задаются воздействия, имитирующие те, что возникают в мембране, т.е. в данном случае рассматриваем колебания мембраны в кольце между точками r_1 и r_2 [14].

Принцип реализации метода гомогенизации для круглой мембраны заключается в следующем: если армированный материал состоит из N компонент (фаз) и в среднем изотропен (например, имеет место хаотическое армирование, и т.п.), то можно использовать гипотезу Фойгта для трехмерного элемента твердого тела о том, что деформации по всему объему композиционного материала элемента твердого тела однородны. Второй предельный случай (гипотеза Рейсса) заключается в том, что напряжения по всему объему композиционного материала мембраны в среднем однородны.

Полученные на основании этих гипотез формулы имеют практическую ценность, так как являются соответственно верхней и нижней оценками истинных модулей композиционного материала [14].

С методической точки зрения необходимо усреднить деформационные характеристики трехмерного твердого тела, а после этого использовать гипотезу о плоском напряженном состоянии мембраны. Поскольку сам процесс усреднения в пространственном случае носит довольно громоздкий характер даже для линейно-упругого материала, то ограничимся простым цитированием результатов, полученных в работе [15].

Отметим, что с точки зрения механики мембраны можно утверждать, что использование гипотезы Фойгта для материала мембраны эквивалентно рассмотрению горизонтально-слоистой структуры композиционной мембраны, каждый слой которой имеет постоянную деформацию Δ/R . Тогда по аналогии с (19) получаем ($\langle \sigma_z \rangle_F = 0$) [15]

$$\langle \sigma_r \rangle_F = \langle \sigma_\varphi \rangle_F = \frac{\langle E \rangle_F}{1 - \langle \nu \rangle_F} \frac{\Delta}{R}, \quad (28)$$

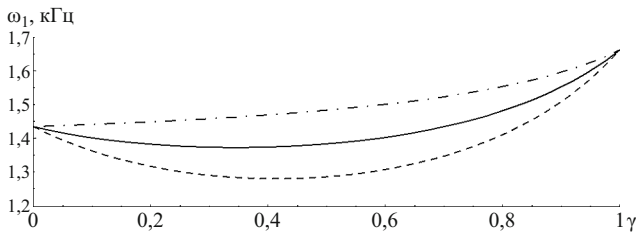


Рис. 3. Зависимости низших собственных частот ω_1^F (штрих-пунктирная линия), ω_1^R (пунктирная линия), ω_1^{K-T} (сплошная линия) поперечных колебаний круглой композиционной мембраны радиусом $R = 1$ м при ее радиальном натяжении $\Delta = 0,01$ м от концентрации γ первого материала в двухкомпонентной смеси ($E_1 = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_1 = 0,27$, $\nu_2 = 0,3$, $\rho_1 = 2000$ кг/м³, $\rho_2 = 8000$ кг/м³ при $\mu_1 = 2,40$ [2])

где

$$\langle E \rangle_F = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{1 + \nu_i} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{1 - 2\nu_i} \right) / \left[\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \right],$$

$$\langle \nu \rangle_F = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i \nu_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \right] / \left[\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i E_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \right]. \quad (29)$$

Использование гипотезы Рейсса для материала мембраны эквивалентно рассмотрению вертикально концентрически-слоистой либо вертикально-волоконистой структуры композиционной мембраны (под вертикалью понимается ось Oz), которая имеет средние по глубине постоянные деформации $\langle \varepsilon_r \rangle_R = \langle \varepsilon_\varphi \rangle_R = \Delta/R$. Тогда аналогично (19) получаем (при $\sigma_z = 0$) [15]

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{\langle E \rangle_R}{1 - \langle \nu \rangle_R} \frac{\Delta}{R}, \quad (30)$$

где

$$\langle E \rangle_R = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{E_i} \right)^{-1}, \quad \langle \nu \rangle_R = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i \nu_i}{E_i} \right) / \left(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{E_i} \right). \quad (31)$$

Совершенно аналогично для структурно-неоднородного материала получим уравнение (19) в приближении Кравчука – Тарасюка [15] эффективных свойств мембраны (при $\langle \sigma_z \rangle = 0$) с использованием (29) и (31):

$$\langle \sigma_r \rangle = \langle \sigma_\varphi \rangle = \frac{\langle E \rangle^\sigma + \langle E \rangle^\varepsilon}{2 - (\langle \nu \rangle^\sigma + \langle \nu \rangle^\varepsilon)} \frac{\Delta}{R}, \quad (32)$$

где [15]

$$\langle E \rangle^\sigma = \frac{\langle E \rangle_F \langle E \rangle_R \ln(\langle E \rangle_F / \langle E \rangle_R)}{\langle E \rangle_F - \langle E \rangle_R},$$

$$\langle \nu \rangle^\sigma = \frac{\langle E \rangle_F \langle \nu \rangle_R - \langle E \rangle_R \langle \nu \rangle_F}{\langle E \rangle_F - \langle E \rangle_R} + \frac{\langle E \rangle_F \langle E \rangle_R (\langle \nu \rangle_F - \langle \nu \rangle_R) \ln(\langle E \rangle_F / \langle E \rangle_R)}{(\langle E \rangle_F - \langle E \rangle_R)^2},$$

$$\langle E \rangle^\varepsilon = \frac{1}{2} (\langle E \rangle_F + \langle E \rangle_R) +$$

$$+ \frac{H_F H_R (\langle \nu \rangle_F - \langle \nu \rangle_R)^2 \left[H_F^2 - H_R^2 - 2 H_F H_R \ln \frac{H_F}{H_R} \right]}{(H_F - H_R)^3},$$

$$\langle \nu \rangle^\varepsilon = \frac{H_F \langle \nu \rangle_F - H_R \langle \nu \rangle_R}{H_F - H_R} -$$

$$- \frac{H_F H_R (\langle \nu \rangle_F - \langle \nu \rangle_R) \ln(H_F / H_R)}{(H_F - H_R)^2},$$

$$H_F = \frac{\langle E \rangle_F}{(1 + \langle \nu \rangle_F)(1 - 2\langle \nu \rangle_F)}, \quad H_R = \frac{\langle E \rangle_R}{(1 + \langle \nu \rangle_R)(1 - 2\langle \nu \rangle_R)}.$$

Исходя из выражений (17), (27), (28), (30) и (32), получаем собственные частоты колебания круглой горизонтально-слоистой (ω_i^F), вертикально-слоистой или волокнистой (ω_i^R), а также структурно-неоднородной (ω_i^{K-T}) композиционной мембраны (рис. 3):

$$\omega_i^F = \frac{\mu_i}{R} \sqrt{\frac{\langle E \rangle_F}{1 - \langle \nu \rangle_F} \frac{\Delta}{\langle \rho \rangle_R}},$$

$$\omega_i^R = \frac{\mu_i}{R} \sqrt{\frac{\langle E \rangle_R}{1 - \langle \nu \rangle_R} \frac{\Delta}{\langle \rho \rangle_R}},$$

$$\omega_i^{K-T} = \frac{\mu_i}{R} \sqrt{\frac{\langle E \rangle^\sigma + \langle E \rangle^\varepsilon}{2 - (\langle \nu \rangle^\sigma + \langle \nu \rangle^\varepsilon)} \frac{\Delta}{\langle \rho \rangle_R}} \quad (i = \overline{1, N}). \quad (33)$$

В выражениях (33) количество N достоверно вычисленных собственных частот определяется шириной макроточки l' (т.е. кольца) композиционного материала мембраны и длиной волны, соответствующей указанной частоте, т.е. должно соблюдаться условие

$$R/N \gg l'.$$

Замечание об усреднении реологических свойств композиционной мембраны. Учитывая относительную простоту уравнений (24), можно ожидать, что при использовании трехмерной модели квазиупругого тела [10] получим относительно простые выражения для композиционного материала мембраны. Однако проще всего провести анализ релаксации с помощью технической теории старения [13] на основе уже полученных уравнений (28), (30) и (32). По аналогии с (33) исходя из предположения, что функции релаксации $\Psi_k(t)$ для каждого материала с номером k ($k = \overline{1, n}$) известны, можно получить

$$\omega_i^F(t) = \frac{\mu_i}{R} \sqrt{\frac{\langle E \rangle_F}{1 - \langle \nu \rangle_F} \frac{\Delta}{\langle \rho \rangle_R} \langle \Psi(t) \rangle_F},$$

$$\omega_i^R(t) = \frac{\mu_i}{R} \sqrt{\frac{\langle E \rangle_R}{1 - \langle v \rangle_R} \frac{\Delta}{\langle \rho \rangle_R} \langle \Psi(t) \rangle_R},$$

$$\omega_i^{K-T}(t) = \frac{\mu_i}{R} \sqrt{\frac{\langle E \rangle^\sigma + \langle E \rangle^\varepsilon}{2 - (\langle v \rangle^\sigma + \langle v \rangle^\varepsilon)} \frac{\Delta}{\langle \rho \rangle_R} \langle \Psi(t) \rangle_{K-T}} \quad (i = \overline{1, N}),$$

где усредненные функции релаксации $\langle \Psi(t) \rangle_F$, $\langle \Psi(t) \rangle_R$ и $\langle \Psi(t) \rangle_{K-T}$ являются линейными комбинациями $\Psi_k(t)$ и упругих свойств n компонент композиционного материала.

Таким образом, при выводе классического уравнения колебания круглой мембраны допущена ошибка в известной монографии [1] — на мембраны действуют не растягивающие силы, а растягивающие напряжения. Ее исправление позволяет выводить уравнения малых поперечных колебаний круглой мембраны с учетом ее механических и реологических характеристик.

Получены уравнения колебаний однородной круглой мембраны, а также определены ее собственные частоты с учетом механических и реологических характеристик материала.

Для случая линейно-упругого композиционного материала получены уравнение колебания круглой мембраны, а также ее собственные частоты в зависимости от концентрации компонент.

Даны рекомендации по учету ползучести композиционного материала мембраны по технической теории старения.

Установлено, что вычисление эффективных характеристик материала мембраны согласно гипотезе Фойгта соответствует решению задачи усреднения для горизонтально-слоистой мембраны, применение гипотезы Рейсса — колебаниям коаксиально-вертикально-слоистой или вертикально-волокнистой мембраны, а использование методики Кравчука – Тарасюка для сужения «вилки» Рейсса – Фойгта — наилучшему приближению эффективных свойств структурно неоднородного композиционного материала мембраны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Морз Ф. Колебания и звук. — М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. — 496 с.
2. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1969. — 288 с.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1986. — 544 с.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.
5. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. — М.: Госстройиздат, 1957. — 256 с.
6. Журавков М. А., Старовойтов Э. И. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности. — Минск: БГУ, 2011. — 543 с.
7. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
8. Аркулис Г. Э., Дорогобид В. Г. Теория пластичности. — М.: Металлургия, 1987. — 352 с.

9. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. — М.-Л.: Государственное издательство технической и теоретической литературы, 1949. — 376 с.
10. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. — М.: Стройиздат, 1968. — 418 с.
11. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. — М.: Физматлит, 2005. — 576 с.
12. Кравчук А. С., Чигарев А. В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. — Минск: Технопринт, 2000. — 196 с.
13. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.
14. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов. — М.: Из-во Московского университета, 1984. — 336 с.
15. Тарасюк И. А., Кравчук А. С. Сужение «вилки» Фойгта – Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов / APRIORI. Сер.: Естественные и технические науки [Электронный ресурс]. 2014. № 3. Режим доступа: <http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasjuk-Kravchuk.pdf>

REFERENCES

1. Morz F. Kolebaniya i zvuk. [Oscillations and Sound]. Moscow – Leningrad: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1949. — 496 p. [in Russian].
2. Aramanovich I. G., Levin V. I. Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. — Moscow: Nauka, 1969. — 288 p. [in Russian].
3. Bronshtein I. N., Semendyaev K. A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov [Handbook of mathematics for engineers and students of technical universities]. — Moscow: Nauka, 1986. — 544 p. [in Russian].
4. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki [Partial differential equations of mathematical physics]. — Moscow: Vysshaya shkola, 1970. — 712 p. [in Russian].
5. Zhemochkin B. N. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. — Moscow: Gosstroizdat, 1957. — 256 p. [in Russian].
6. Zhuravkov M. A., Starovoitov E. I. Mekhanika sploshnykh sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti [Continuum Mechanics. Theory of Elasticity and Plasticity]. — Minsk: BGU, 2011. — 543 p. [in Russian].
7. Rabotnov Yu. N. Polzuchest' elementov konstruktssii [Creep of structural elements]. — Moscow: Nauka, 1966. — 752 p. [in Russian].
8. Arkulis G. E., Dorogobid V. G. Teoriya plastichnosti [Theory of plasticity]. — Moscow: Metallurgiya, 1987. — 352 p. [in Russian].
9. Il'yushin A. A. Plastichnost' [Plasticity]. Part 1. Uprugoplasticheskie deformatsii [Elastic-plastic deformation]. — Moscow – Leningrad: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhnicheskoi i teoreticheskoi literatury, 1949. — 376 p. [in Russian].
10. Rzhantsyn A. R. Teoriya polzuchesti [Theory of creep]. — Moscow: Stroizdat, 1968. — 418 p. [in Russian].
11. Gorshkov A. G., Starovoitov E. I., Yarovaya A. V. Mekhanika sloistyykh vyazkouprugoplasticheskikh elementov konstruktssii [Mechanics of layer viscoelastoplastic constructions elements]. — Moscow: Fizmatlit, 2005. — 576 p.
12. Kravchuk A. S., Chigarev A. V. Mekhanika kontaktnogo vzaimodeistviya tel s krugovymi granitsami [Contact mechanics of bodies with circular boundaries]. — Minsk: Tekhnoprint, 2000. — 196 p. [in Russian].
13. Malinin N. N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]. — Moscow: Mashinostroyeniye, 1975. — 400 p. [in Russian].
14. Pobedrya B. E. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. — Moscow: Nauka, 1984. — 336 p. [in Russian].
15. Tarasyuk I. A., Kravchuk A. S. Suzhenie «vilki» Foigta – Reissa v teorii uprugikh strukturno neodnorodnykh v srednem izotropnykh kompozitsionnykh tel bez primeneniya variatsionnykh printsipov [Calculation of Voigt – Reuss “range” in the theory of elasticity of structural heterogeneous, average isotropic, composite bodies without application of variational principles] / APRIORI. Series: Natural and Technical Sciences [on-line]. 2014. N 3. <http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasjuk-Kravchuk.pdf> [in Russian].