

DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2024-90-1-72-81>

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ПОЛИМЕТИЛМЕТАКРИЛАТА

© Алексей Сергеевич Куркин^{1*}, Александр Сергеевич Киселев²,
Василий Сергеевич Устинов², Алексей Александрович Богданов²

¹ Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; *e-mail: ackurkin@mail.ru

² Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Россия, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1.

*Статья поступила 24 марта 2023 г. Поступила после доработки 8 мая 2023 г.
Принята к публикации 30 июня 2023 г.*

Представлены результаты исследования ползучести полиметилметакрилата (ПММА) в температурном интервале от 0 до +30 °С при скоростях деформирования от 0,02 до 2 % в минуту и напряжениях выдержки от 48 до 72 МПа продолжительностью до 100 ч. Рассмотрено вязкоупругое поведение ПММА при нормальных условиях эксплуатации, до начала процессов повреждения материала. Для этих условий получена единая степенная зависимость деформации ползучести от времени для всего периода выдержки, без разделения на стадии неустановившейся и установившейся ползучести. Предложены формулы для аппроксимации результатов изотермических испытаний образцов при постоянной скорости деформации и при выдержке под постоянной нагрузкой. Получены зависимости параметров аппроксимации от скорости деформации, уровня напряжения и температуры испытаний ПММА. Сопоставление диаграмм деформации ползучести при одинаковых напряжениях выдержки после деформирования с различными скоростями показало, что эти диаграммы располагаются со смещением по времени на единой кривой. Это указывает на возможность описания совокупности полученных экспериментальных данных единым уравнением состояния, связывающим скорость ползучести с напряжением и температурой. Дифференцирование аппроксимирующих формул позволило выявить закономерности изменения скорости ползучести в процессе испытаний, а повторное дифференцирование — получить уравнение ускорения ползучести при деформировании с постоянной скоростью и исключить из него переменную времени. Аналогично получено уравнение замедления ползучести для условий выдержки под постоянным напряжением, из которого также исключена переменная времени. В таком виде эти два уравнения можно рассматривать как частные случаи уравнения состояния вязкоупругого материала, поведение которого не зависит от предыстории нагружения. Ползучесть при непрерывном деформировании представляет собой суперпозицию двух процессов: ускорения ползучести вследствие роста напряжения и ее замедления с течением времени. На этой основе сформулировано единое уравнение состояния вязкоупругого материала для процесса с произвольным законом роста деформации и напряжения. Параметрами уравнения состояния являются температура, скорость и ускорение ползучести, напряжение и скорость его изменения. Накопленная деформация ползучести не входит в число параметров. Применимость этого уравнения при более сложных условиях немонотонного термосилового нагружения материала требует дополнительного экспериментального обоснования, а также идентификации параметров уравнения.

Ключевые слова: вязкоупругость; полиметилметакрилат; ПММА; непрерывная деформация; выдержка под нагрузкой; уравнение состояния; скорость ползучести; ускорение ползучести.

EQUATIONS OF STATE OF THE VISCOELASTICITY OF POLYMETHYL METHACRYLATE

© Alexey S. Kurkin,^{1*} Alexander S. Kiselev,² Vasily S. Ustinov,² Aleksey A. Bogdanov²

¹ Bauman Moscow State Technical University, 5, 2-ya Baumanskaya ul., Moscow, 105005, Russia; *e-mail: ackurkin@mail.ru

² National Research Centre “Kurchatov Institute”, 1, Akad. Kurchatova pl., Moscow, 123182, Russia.

Received March 24, 2023. Revised May 8, 2023. Accepted June 30, 2023.

The results of studying creep of polymethyl methacrylate (PMMA) in the temperature range from 0 to +30°C at a strain rate from 0.02 to 2% per minute and holding for up to 100 h under stress values within a

range of 48 – 72 MPa are presented. The viscoelastic behavior of PMMA is analyzed under normal operating conditions before the onset of the material damage. A unified power dependence of the creep deformation on time was obtained for the entire holding period, without any division into the stages of the unsteady and steady creep. Formulas to be used for approximating the results of isothermal tests of samples at a constant strain rate and holding under a constant load are proposed. The dependences of the approximation parameters on the strain rate, stress level, and temperature of PMMA tests are obtained. A comparison of the creep strain diagrams for the same holding stress after deformation at different rates showed that the diagrams lie on a single curve with a time shift. This indicates the possibility of describing the totality of the experimental data obtained by a single equation of state linking the creep rate, stress and temperature. Differentiation of the approximating formulas made it possible to reveal the regularities of changes in the creep rate during testing and repeated differentiation allowed us to obtain an equation for the creep acceleration upon deformation at a constant rate and to exclude the time variable from it. Similarly, the time variable was also excluded from the creep deceleration equation obtained for holding under constant stress. In this form, these two equations can be considered special cases of the equation of state of a viscoelastic material which behavior is independent on the loading prehistory. Creep under continuous deformation is a superposition of two processes: creep acceleration due to the stress growth and creep deceleration with time. On this basis, a unified equation of state for a viscoelastic material was derived for a process with an arbitrary law of the strain and stress growth. The parameters of this equation are the temperature, creep velocity and acceleration, stress and the rate of stress change. The accumulated creep strain is not a parameter of equation. The applicability of this equation under more complex conditions of a nonmonotonic thermopower loading of materials requires additional experimental justification, as well as identification of the equation parameters.

Keywords: viscoelasticity; polymethyl methacrylate (PMMA); continuous deformation; holding under load; equation of state; creep rate; creep acceleration.

Введение

Одна из проблем развития теории ползучести конструкционных материалов связана с недостатком объема и достоверности экспериментальных данных. При изучении металлических сплавов необходимо проведение испытаний при температуре в несколько сотен градусов. Для испытаний на ползучесть требуется сложное и дорогостоящее оборудование. В связи с этим для каждого исследованного материала количество испытанных образцов и вариантов условий их испытания, как правило, ограничено. В то же время результаты, получаемые на одинаковых образцах при одних и тех же условиях испытаний, имеют значительный разброс. Поэтому исследователям трудно использовать опубликованные данные при развитии теории.

В современных исследованиях большое внимание уделяется различным экономичным методам определения вязкоупругих свойств материалов [1 – 3], однако методы обработки данных требуют, в свою очередь, обоснования результатов, полученных на основе длительных механических испытаний образцов, которые остаются наиболее надежным и информативным инструментом.

Стремление охватить в модели ползучести всю совокупность наблюдаемых явлений приводит к увеличению числа параметров, требующих экспериментального определения. Это создает проблемы при идентификации модели.

В данной работе представлены результаты исследования ползучести полимерного материала — полиметилметакрилата (ПММА) торговых марок Plexiglas® GS 0Z10 и GS 0Z00. При его деформировании ползучесть наблюдается уже при

комнатной температуре, а основные изменения реологических характеристик происходят в температурном интервале от 0 до +50 °С. Это делает ПММА перспективным модельным материалом для изучения процессов ползучести. Полученные закономерности могут быть использованы при изучении других материалов, в том числе сталей и сплавов.

Достоинствами результатов экспериментальных исследований ползучести ПММА, проведенных в НИЦ «Курчатовский институт» и ФГУП «Крыловский государственный научный центр», являются большое количество испытанных образцов, длительность выдержки под нагрузкой до 100 ч, разнообразие условий испытаний по температуре, скорости и количеству циклов деформирования. Наряду с испытаниями простых образцов на растяжение, сжатие и изгиб проведены также натурные испытания достаточно сложной конструкции из этого материала.

Цель работы — создание теоретических основ и программного обеспечения для моделирования термонапряженного состояния конструкций из вязкоупругих материалов методом конечных элементов. Модель материала должна обеспечивать адекватность его поведения при сложном объемном напряженном состоянии и произвольном изменении нагрузок и температур. Главное внимание уделено работе материала при нормальных условиях эксплуатации (при деформациях в пределах 5 % и напряжениях ниже предела вынужденной эластичности ПММА), в том числе при многократном неизотермическом нагружении. Проведен анализ результатов испытаний образцов в наиболее простых изотерми-

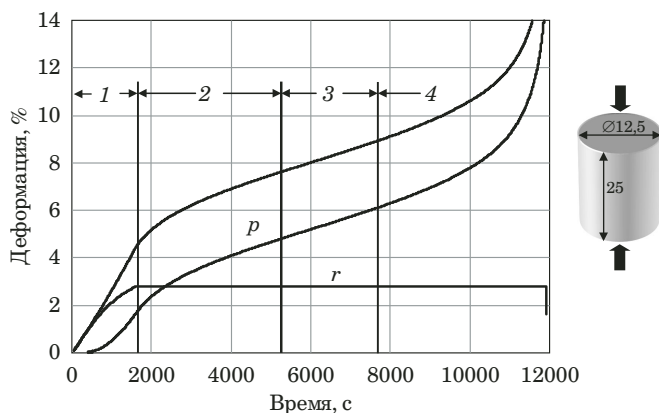


Рис. 1. Стадии ползучести материала

Fig. 1. Stages of the material creep

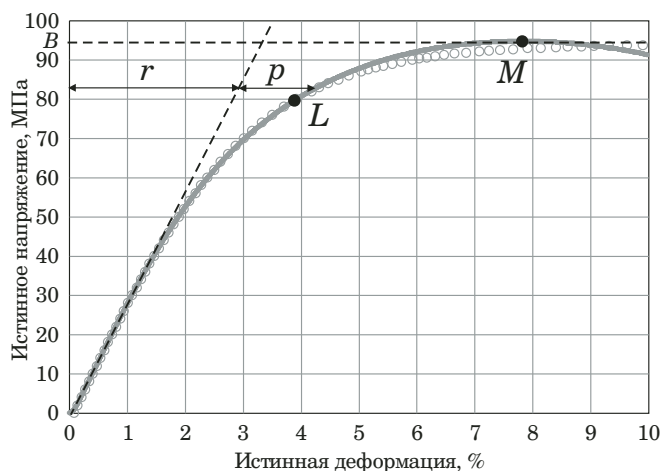


Рис. 2. Результаты одноосного сжатия образца (линия — эксперимент, точки — аппроксимация)

Fig. 2. Results of the uniaxial compression of the sample (line — experiment, dots — approximation)

ческих условиях — при монотонном деформировании с постоянной скоростью и последующей выдержке под постоянной одноосной сжимающей нагрузкой. Область более значительных деформаций, приводящих к повреждению и разрушению материала, также представляет большой интерес [4 – 6], но выходит за рамки данного исследования.

Экспериментальным исследованиям ползучести полимеров, в том числе ПММА, посвящено большое число публикаций (например, [7 – 10]). При выборе физико-математического аппарата для описания поведения материала необходимо стремиться к максимальному упрощению применяемой теории. Это не только обеспечивает надежную работу программного обеспечения, но и позволяет учитывать новые обнаруженные особенности поведения материала. Как показано в [11], моделирование некоторых явлений (напри-

мер, экстремума на диаграмме напряжения при деформировании с постоянной скоростью) требует привлечения сложных нелинейных определяющих соотношений вязкоупругости, однако в большинстве случаев возможно адекватное моделирование в рамках линейной теории.

Применение структурных моделей [12] и рядов Прони [13] облегчает описание сложного комплекса экспериментальных данных. Структурный подход рассмотрен в публикации [14]. Ниже представлена модель с меньшим количеством параметров на основе гипотезы уравнения состояния [13, 15]. Ее преимуществом является возможность прогнозирования развития ползучести по текущему напряженно-деформированному состоянию, без необходимости учета предыстории процесса.

Стадии ползучести при постоянной нагрузке

При испытании материала на ползучесть образец выдерживают под постоянной нагрузкой в течение длительного времени (рис. 1). Полная деформация образца ε состоит из упругой деформации r , пропорциональной напряжению, и деформации ползучести p . Во время нагружения перед выдержкой скорость полной деформации постоянна, а скорость ползучести растет (стадия 1). В начале выдержки наблюдается неустановившаяся ползучесть с убывающей скоростью (стадия 2), а затем — установившаяся ползучесть с постоянной скоростью (стадия 3). Перед разрушением материала скорость ползучести возрастает (стадия 4).

При нормальных условиях эксплуатации материал, как правило, не достигает стадии 4 ускоренной ползучести. На этой стадии происходят локализация процесса ползучести, повреждение и разрушение материала. Ее изучение необходимо при анализе предельных состояний материала.

Ползучесть ПММА при деформировании с постоянной скоростью

Рассмотрим результаты испытания на сжатие цилиндрического образца из ПММА (см. рис. 1) при температуре $+20\text{ }^{\circ}\text{C}$ и постоянной скорости деформирования $\dot{\varepsilon} = 0,18\text{ \%}/\text{мин}$ (рис. 2). До точки M максимума усилия сжатия (до предела вынужденной эластичности материала) процесс идет устойчиво, поле деформации в средней части образца однородно, развитие ползучести происходит по мере роста напряжения. Снижение напряжения при росте деформации после точки M означает локализацию деформации ползучести и начало повреждения материала (переход к стадии ускоренной ползучести).

Начальный участок деформационной характеристики (до точки L) может быть аппроксимирован уравнением гиперболического тангенса [14] (см. рис. 2, светлые точки)

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_b \operatorname{th}(E\varepsilon/\sigma_b). \quad (1)$$

Выражение (1) обеспечило высокую точность аппроксимации (с погрешностью менее 1%) в изучаемом диапазоне напряжения $0 < \sigma < 0,8\sigma_b$ для всех испытанных образцов. Аппроксимация гладкой функцией является важным элементом методики исследования, так как обеспечивает возможность дифференцирования экспериментальных диаграмм для изучения скоростей изменения деформации и напряжения.

Модуль упругости E равен тангенсу угла наклона касательной к диаграмме в начале координат, при постоянной температуре он слабо зависит от скорости деформации $\dot{\varepsilon}$. Существенно зависит от $\dot{\varepsilon}$ только один параметр уравнения (1) — напряжение σ_b , значение которого близко к пределу вынужденной эластичности материала. Таким образом, наблюдается подобие деформационных характеристик при различных скоростях деформирования (рис. 3).

Из уравнения (1) можно найти зависимость деформации от напряжения —

$$\varepsilon = \frac{\sigma_b}{E} \operatorname{arth} \frac{\sigma}{\sigma_b} \quad (2)$$

и время достижения уровня напряжения σ при постоянной скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ —

$$t = \frac{\varepsilon}{\dot{\varepsilon}} = \frac{\sigma_b}{E\dot{\varepsilon}} \operatorname{arth} \frac{\sigma}{\sigma_b}. \quad (3)$$

Испытания проводили с постоянной заданной скоростью перемещения захватов испытательной машины. По мере сжатия и уменьшения длины образца скорость истинной деформации в нем нарастала. На рис. 3 возле каждой кривой указана скорость истинной деформации (%/мин.) при уровне деформации 3%.

Аппроксимация экспериментальных данных аналитической функцией упрощает их дальнейшую математическую обработку. Дифференцируя выражение (1), получаем формулы для скорости упругой деформации

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{\sigma}}{E} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} \operatorname{ch}^{-2} \frac{E\varepsilon}{\sigma_b} \quad (4)$$

и для скорости ползучести

$$\dot{\rho} = \dot{\varepsilon} - \dot{\sigma} = \dot{\varepsilon} \operatorname{th}^2 \frac{E\varepsilon}{\sigma_b} = \dot{\varepsilon} \left(\frac{\sigma}{\sigma_b} \right)^2. \quad (5)$$

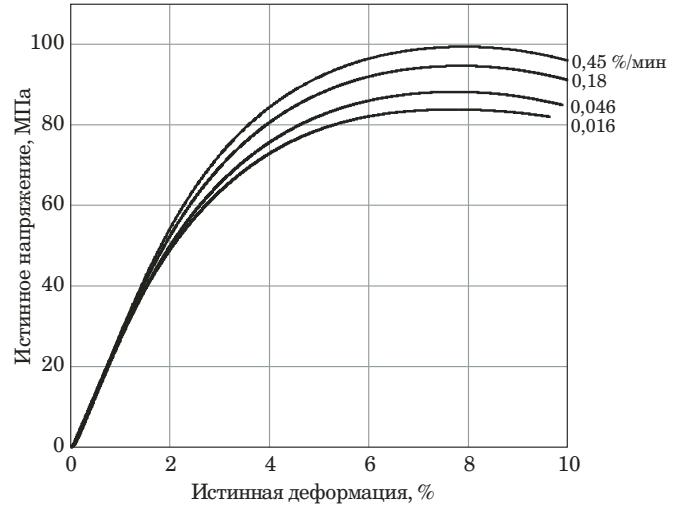


Рис. 3. Деформационные характеристики ПММА при различных скоростях деформирования

Fig. 3. The deformation characteristics of PMMA at different strain rates

Поскольку параметр σ_b однозначно связан с $\dot{\varepsilon}$, можно сделать вывод, что скорость ползучести при данном испытании является функцией скорости деформации и уровня напряжения. Согласно (1) и (3), $\sigma \rightarrow \sigma_b$, а $\dot{\rho} \rightarrow \dot{\varepsilon} = \text{const}$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$.

Дифференцирование формулы (5) позволяет найти выражение для ускорения ползучести, вызванного изменением напряжения σ при постоянной скорости деформации $\dot{\varepsilon}$:

$$\ddot{\rho} = 2\dot{\varepsilon} \frac{\sigma}{\sigma_b} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma_b} = 2\dot{\rho} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}. \quad (6)$$

Ускорение пропорционально текущей скорости ползучести $\dot{\rho}$ и относительной скорости роста напряжения $\dot{\sigma}/\sigma$. Важно, что в выражении (6) отсутствует $\dot{\varepsilon}$, что открывает перспективы его использования при переменной скорости деформации. Недостатком является некорректная работа формулы (6) в начале ползучести (при $\dot{\rho} = 0$), а также при постоянном напряжении (при $\dot{\sigma} = 0$).

Проведя серию испытаний с различными скоростями деформации (см. рис. 3), можно получить зависимость σ_b от скорости деформации. Испытания проведены при температурах 0, +10, +20 и +30 °С. Представление результатов в логарифмических координатах (рис. 4) позволило выявить характер и определить параметры этой зависимости (на каждом графике указана температура испытания по Цельсию). Прямые линии на рис. 4 соответствуют степенной зависимости

$$\sigma_b = B(\dot{\varepsilon}/v)^n. \quad (7)$$

Выбрав нормирующий множитель $v = 1 \text{ %/мин}$, для каждой температуры получили значения па-

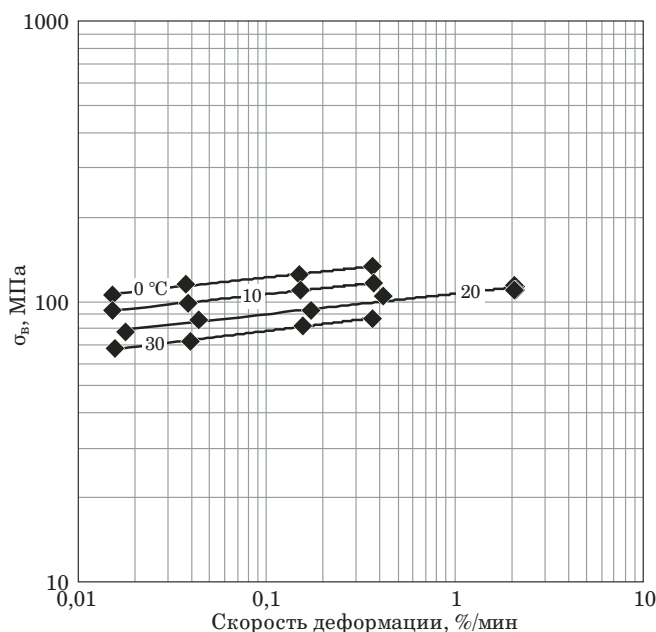


Рис. 4. Зависимости параметра σ_s от скорости деформации

Fig. 4. Dependence of σ_s parameter on the strain rate

параметров B и n . Их зависимости от температуры испытаний представлены на рис. 5.

Результаты испытаний указывают на возможность распространения уравнения (7) на весь интервал климатических температур, а также на более широкий интервал скоростей деформации. Подставив (7) в формулу (5), получим зависимость скорости деформации ползучести от скорости полной деформации и уровня напряжения:

$$\dot{p} = \dot{\epsilon} \left(\frac{\sigma}{\sigma_B} \right)^2 = \dot{\epsilon} \left[\frac{\sigma}{B} \left(\frac{\dot{\epsilon}}{v} \right)^{-n} \right]^2 = \dot{\epsilon} \left(\frac{v}{\dot{\epsilon}} \right)^{2n} \left(\frac{\sigma}{B} \right)^2. \quad (8)$$

Модуль Юнга E зависит от температуры и скорости деформации (рис. 6 и 7). При небольшой скорости деформации (до 0,5 %/мин) ее влиянием на модуль Юнга можно пренебречь.

Ползучесть ПММА при выдержке под постоянной нагрузкой

При деформировании образца с заданной скоростью происходит суперпозиция двух процессов — ускорения ползучести вследствие роста напряжения и ее замедления с течением времени. Более простая картина наблюдается при выдержке образца под постоянной нагрузкой. В ходе такого испытания образец вначале сжимали со скоростью продольной деформации 2,2 %/мин до заданного уровня нагрузки, а затем выдерживали при этом уровне в течение 100 ч. На каждом уровне нагрузки было испытано по два образца (см. рис. 1), вырезанных из разных частей одной

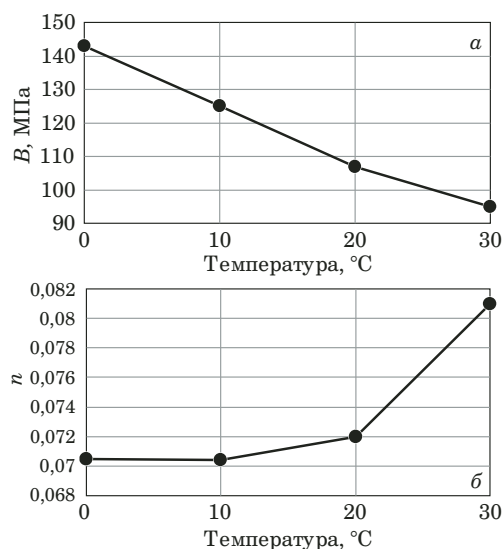


Рис. 5. Влияние температуры испытаний на параметры B (а) и n (б)

Fig. 5. Effect of test temperature on parameters B (a) and n (b)

пластины. В процессе выдержки образца под приложенным постоянным усилием напряжение в нем по мере деформации несколько изменялось (снижалось при действии сжимающей нагрузки в связи с ростом площади сечения). На рис. 8 на кривых отмечены уровни напряжения (МПа) в конце выдержки.

Упругая деформация, как и напряжение, в процессе выдержки изменяется незначительно, поэтому приращение деформации от начала выдержки происходит за счет деформации ползучести p .

Скорость ползучести в момент начала выдержки можно найти по формуле (7), она зависит от напряжения выдержки σ и скорости деформации образца перед выдержкой $\dot{\epsilon}$. В процессе выдержки скорость ползучести монотонно снижается. Характер этого снижения не зависит от истории деформации образца перед выдержкой. На рис. 9 показан начальный участок экспериментальной диаграммы ползучести при выдержке под сжимающим напряжением 57 МПа после деформирования со скоростью 2,2 %/мин (см. рис. 8). Аналогичные диаграммы получены при том же напряжении выдержки после деформирования с меньшими скоростями (0,45; 0,17; 0,039 и 0,018 %/мин). Из рис. 9 видно, что перенос начала координат позволяет полностью совместить все эти диаграммы. Они ложатся на единую кривую и отличаются только положением начальной точки на этой кривой.

Такое поведение материала позволяет при описании процесса вязкоупругости ПММА в условиях изотермической выдержки под постоянным напряжением использовать гипотезу

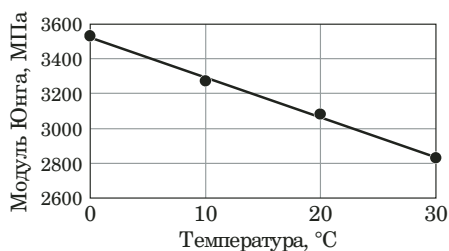


Рис. 6. Зависимость модуля Юнга от температуры при скорости деформации 0,15%/мин

Fig. 6. Temperature dependence of Young's modulus at a strain rate of 0.15%/min

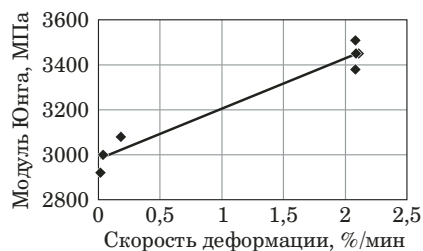


Рис. 7. Зависимость модуля Юнга от скорости деформации при температуре +20 °С

Fig. 7. Dependence of Young's modulus on the strain rate at a temperature of +20°C

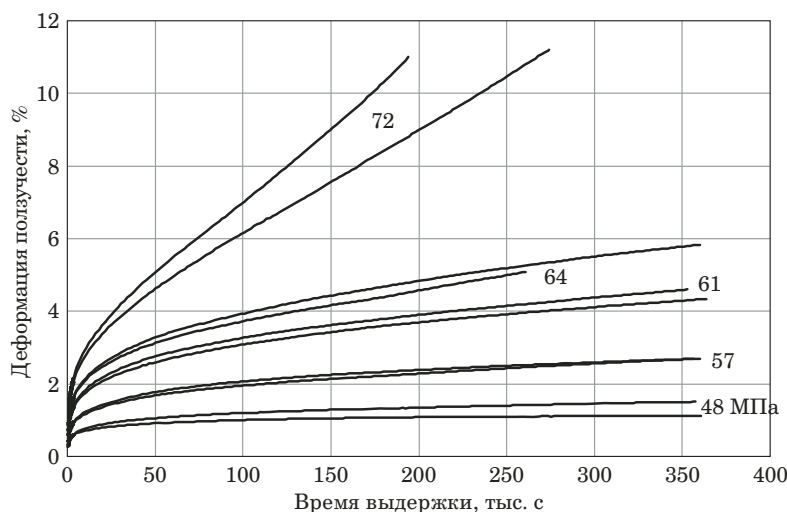


Рис. 8. Развитие ползучести при различных напряжениях выдержки

Fig. 8. The creep development at different holding stresses

уравнения состояния [13, 15]. Согласно этой гипотезе, скорость ползучести является однозначной функцией параметров текущего состояния (уровня напряжения, деформации ползучести, температуры) и не зависит от предыстории нагружения:

$$\Phi(\dot{p}, \sigma, p, T) = 0. \tag{9}$$

Диаграммы на рис. 8, представленные в логарифмических координатах (рис. 10), указывают на сложный характер зависимости $p = f_1(t)$. Однако подбор смещений по координатным осям t_0, p_0 позволяет привести диаграмму $p + p_0 = f_2(t + t_0)$ к линейному виду, что свидетельствует о существовании единой степенной зависимости деформации ползучести от времени в течение всего периода выдержки:

$$p = \frac{C}{m} \left[\left(\frac{t + t_0}{\tau} \right)^m - \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^m \right]. \tag{10}$$

Сопоставление смещенной диаграммы f_2 с экспериментальной диаграммой (см. рис. 9) представлено на рис. 11. В формуле (10) $\tau = 1$ с — норми-

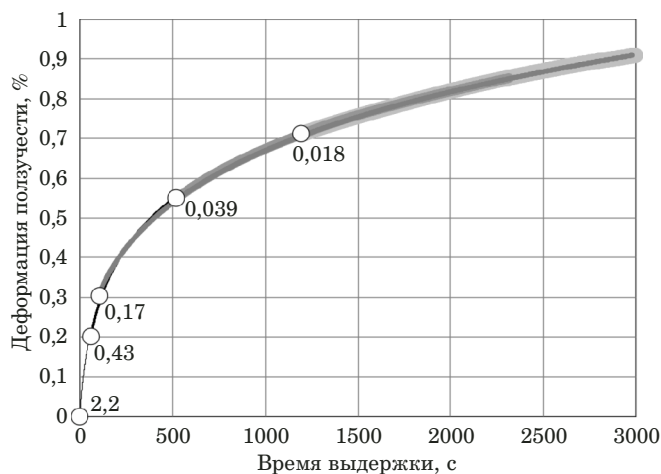


Рис. 9. Развитие ползучести при 57 МПа после различных скоростей деформирования

Fig. 9. The creep development at 57 МПа after various strain rates

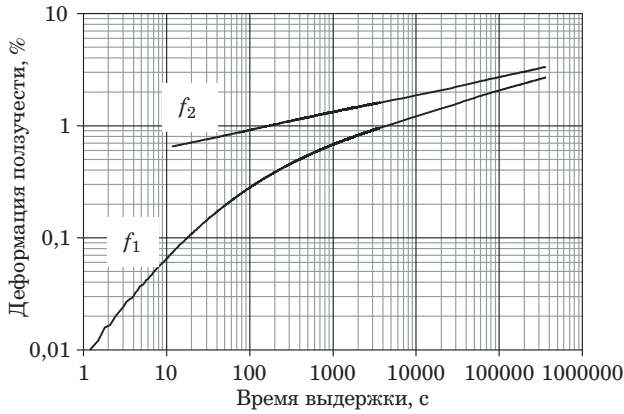


Рис. 10. Диаграммы ползучести при выдержке под напряжением 57 МПа: f_1 — исходная, f_2 — после смещения начала координат

Fig. 10. The creep diagrams at holding under stress of 57 MPa: f_1 — initial, f_2 — after the shift of the origin of coordinates

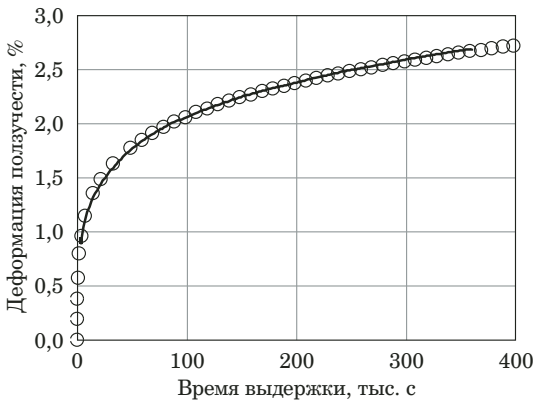


Рис. 11. Аппроксимация диаграммы ползучести при выдержке

Fig. 11. Approximation of the creep diagram upon holding

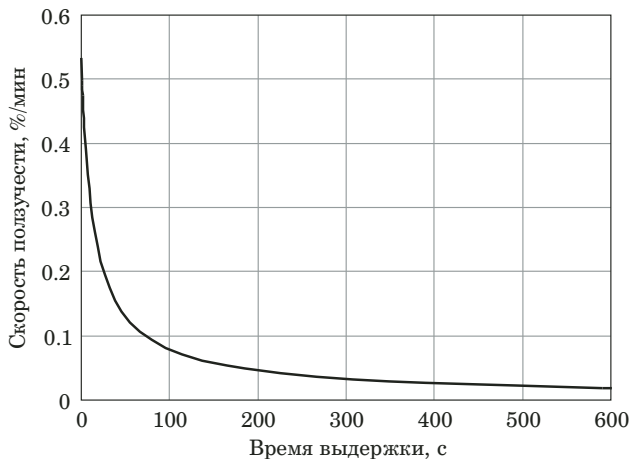


Рис. 12. Скорость ползучести в начале выдержки при 57 МПа

Fig. 12. Creep rate at the beginning of holding at 57 MPa

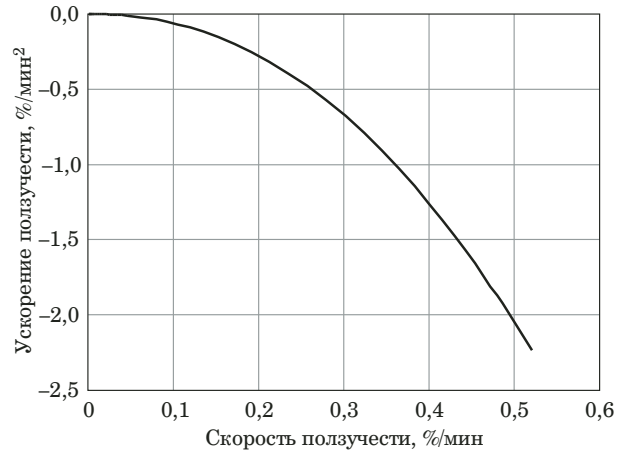


Рис. 13. Ускорение ползучести в процессе выдержки при 57 МПа

Fig. 13. Creep acceleration during holding at 57 MPa

рующей множитель, m и C — параметры материала, зависящие от температуры и напряжения при выдержке. От скорости деформации образца перед выдержкой зависит только параметр t_0 , задающий расположение начальной точки отсчета времени на единой кривой (см. рис. 9).

Дифференцирование выражения (10) позволяет получить зависимость скорости ползучести от времени выдержки (рис. 12):

$$\dot{\rho} = \frac{C}{\tau} \left(\frac{t + t_0}{\tau} \right)^{m-1}. \quad (11)$$

А дифференцирование формулы (11) приводит к выражению для ускорения ползучести, из которого можно исключить время выдержки и получить зависимость ускорения от скорости ползучести (рис. 13):

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= \frac{C(m-1)}{\tau^2} \left(\frac{t + t_0}{\tau} \right)^{m-2} = \\ &= \frac{C(m-1)}{\tau^2} \left(\frac{\dot{\rho}\tau}{C} \right)^{\frac{m-2}{m-1}} = -D \left(\frac{\dot{\rho}}{v} \right)^q, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } q = \frac{m-2}{m-1}, D = \frac{C(1-m)}{\tau^2} \left(\frac{v\tau}{C} \right)^q.$$

На рис. 14 представлены смещенные диаграммы ползучести (см. рис. 10, кривая 2) при различных напряжениях выдержки (см. рис. 8). Их совместная обработка позволяет получить зависимости параметров формул (10) – (12) от напряжения выдержки σ . Показатели экспонент слабо зависят от напряжения выдержки, их средние значения в интервале от 48 до 72 МПа составляют: $m \approx 0,15$, $q \approx 2,18$ (рис. 15).

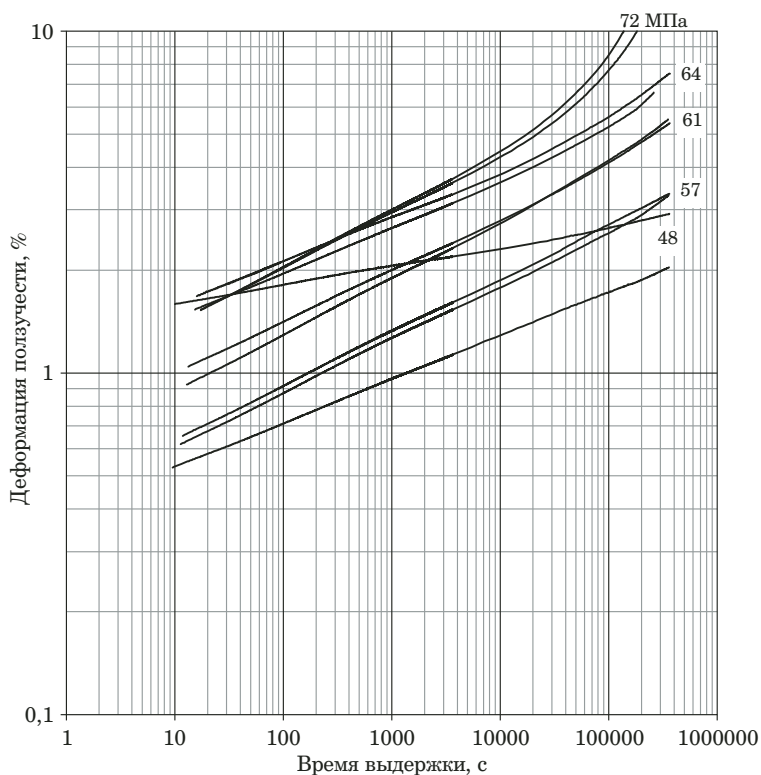


Рис. 14. Развитие ползучести при различных напряжениях выдержки

Fig. 14. The creep development under different holding stresses

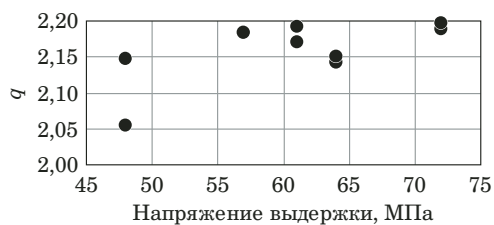


Рис. 15. Зависимость параметра q от напряжения выдержки при $+20\text{ }^\circ\text{C}$

Fig. 15. Dependence of q parameter on the holding stress at $+20\text{ }^\circ\text{C}$

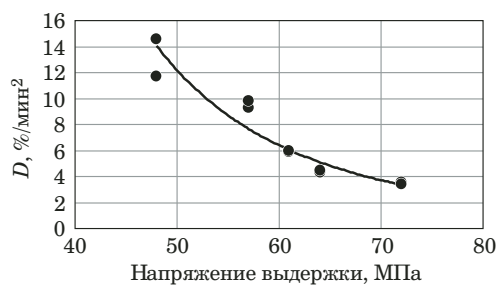


Рис. 16. Зависимость параметра D от напряжения выдержки при $+20\text{ }^\circ\text{C}$

Fig. 16. Dependence of D parameter on the holding stress at $+20\text{ }^\circ\text{C}$

Зависимости от напряжения параметров t_0 и C близки к линейным. Зависимость параметра D от напряжения выдержки можно описать экспоненциальной функцией (рис. 16).

Уравнение состояния для процесса ползучести ПММА

Анализ результатов испытаний при росте нагрузки (формула (6)) и выдержке (формула (12)) показывает, что уравнение состояния для этих двух условий испытаний должно иметь вид

$$\Phi(\ddot{p}, \dot{p}, \sigma, \dot{\epsilon}, T) = 0. \tag{13}$$

В это уравнение, в отличие от (9), не входит накопленная деформация ползучести p .

В общем случае причиной изменения скорости ползучести является суммирование двух процессов: ускорения ползучести при росте напряжения (\ddot{p}_σ) и ее замедления с течением времени (\ddot{p}_t):

$$\ddot{p} = \ddot{p}_\sigma + \ddot{p}_t. \tag{14}$$

В условиях выдержки (при $\dot{\sigma} = 0$) $\ddot{p}_\sigma = 0$, тогда (14) совпадает с (12):

$$\ddot{p}_t = -D \left(\frac{\dot{p}}{v} \right)^q. \tag{15}$$

В условиях роста напряжения (при $\dot{\sigma} > 0$), как и при выдержке, происходит замедление ползу-

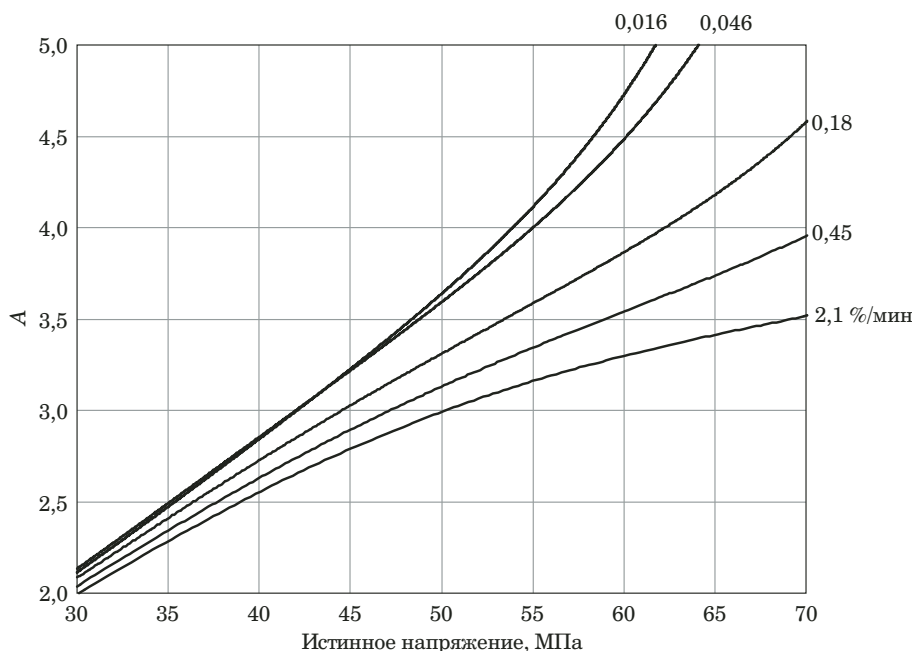


Рис. 17. Зависимость отношения A от уровня напряжения при $+20\text{ }^\circ\text{C}$

Fig. 17. Dependence of A ratio on the stress level at $+20\text{ }^\circ\text{C}$

части \ddot{p}_t , при этом суммарный эффект от двух процессов соответствует (6):

$$\ddot{p} = \ddot{p}_\sigma + \ddot{p}_t = 2\dot{p} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}. \quad (16)$$

Отсюда можно найти составляющую ускорения ползучести, связанную с ростом напряжения:

$$\ddot{p}_\sigma = \ddot{p} - \ddot{p}_t = 2\dot{p} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + D \left(\frac{\dot{p}}{v} \right)^q. \quad (17)$$

Обработка результатов испытаний ПММА в условиях непрерывного деформирования показала, что зависимости отношения $A = \ddot{p}_\sigma / \dot{p}$ от уровня напряжения близки к линейным, как это видно на рис. 17. Здесь возле каждой кривой, как и на рис. 3, указана скорость истинной деформации (%/мин) при уровне деформации 3 %.

Таким образом, уравнение состояния для произвольных условий нагружения ПММА можно представить в виде

$$\ddot{p} = \ddot{p}_\sigma + \ddot{p}_t = 2A\dot{p} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} - D \left(\frac{\dot{p}}{v} \right)^q. \quad (18)$$

Обсуждение результатов

Разработанная методика обработки экспериментальных данных позволила провести дифференцирование по времени экспериментальных диаграмм ползучести и получить зависимости скорости ползучести от времени при различных скоростях деформирования и уровнях напряже-

ния выдержки. По экспериментальным данным проведена идентификация полученных зависимостей. Их параметры представлены в виде диаграмм и аппроксимаций для широкого интервала температур, скоростей деформирования и напряжений выдержки.

Основное внимание в работе уделено условиям нормальной эксплуатации ПММА, ограниченным по уровням напряжения и деформации (до начала необратимого повреждения материала). Установлено, что при этих условиях любая диаграмма ползучести ПММА при выдержке может быть описана простой степенной зависимостью от времени выдержки. Таким образом, нет оснований для разделения процесса на стадии неустановившейся и установившейся ползучести, как предложено в большинстве известных работ [16, 17]. Это позволяет использовать менее длительные выдержки при экспериментальном определении параметров ползучести ПММА.

Сопоставление диаграмм ползучести при одинаковых напряжениях выдержки после деформирования с различными скоростями показало, что эти диаграммы ложатся со смещением по времени на единую кривую. Данное обстоятельство указывает на возможность описания совокупности полученных экспериментальных данных единым уравнением состояния, связывающим скорость ползучести с напряжением и температурой.

Повторное дифференцирование позволило получить уравнения ускорения ползучести и исключить из них переменную времени. В таком

виде их можно рассматривать как уравнения состояния вязкоупругого материала, поведение которого не зависит от предыстории нагружения. В эти уравнения не входит накопленная деформация ползучести. В качестве главного параметра состояния выступает текущая скорость ползучести.

Форма уравнения (6) дает основание для его применения не только для монотонного деформирования с постоянной скоростью, но и для ступенчатого нагружения, при переходе на следующую ступень.

Гипотеза о применимости уравнения (12) в условиях переменного напряжения выдержки позволила объединить уравнения (6) и (12) и получить единое уравнение состояния (18) для процесса с произвольным законом роста деформации и напряжения. При пошаговом моделировании процесса ползучести по значениям σ , $\dot{\sigma}$ и $\dot{\rho}$ в начале шага проводится расчет ускорения ползучести по формуле (18), а затем, в конце шага, — расчет скорости ползучести, деформации и напряжения.

Необходима верификация данного уравнения и идентификация входящих в него параметров в условиях переменной скорости деформирования и при ступенчатом нагружении.

В последующих публикациях будет рассмотрено применение найденных соотношений для условий разгрузки и циклического нагружения.

ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. **Christoefl P. et al.** Comprehensive investigation of the viscoelastic properties of PMMA by nanoindentation / *Polymer Testing*. 2021. Vol. 93. P. 1 – 9. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2020.106978
2. **Wang L. et al.** Measurement of viscoelastic properties for polymers by nanoindentation / *Polymer Testing*. 2020. Vol. 83. P. 1 – 6. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2020.106353
3. **Zhu Q., Burtin C., Christophe Binetruy C.** The viscoelastic effect during acoustoelastic testing of polyethylene / *Polymer Testing*. 2018. Vol. 69. P. 286 – 292. DOI: 10.1016/j.polymertesting.2018.05.032
4. **Maurel-Pantel A., Baquet E., Bikard J., Bouvard J. L., Billon N.** A thermo-mechanical large deformation constitutive model for polymers based on material network description: application to a semi-crystalline polyamide 66 / *Int. J. Plast.* 2015. Vol. 67. P. 102 – 126. DOI: 10.1016/j.ijplas.2014. 10.004
5. **Furmanski J., Cady C. M., Brown E. N.** Time-temperature equivalence and adiabatic heating at large strains in high density polyethylene and ultrahigh molecular weight polyethylene / *Polymer*. 2017. Vol. 54. P. 381 – 390. DOI: 10.1016/j.polymer.2012.11.010
6. **Mortazavian S., Fatemi A.** Fatigue behavior and modeling of short fiber reinforced polymer composites, a literature review / *Int. J. Fatigue*. 2015. Vol. 70. P. 297 – 321.
7. **Vil'deman V. E. et al.** Experimental studies of the properties of materials under complex thermomechanical influences. — Moscow: Fizmatlit. 2012. — 209 p. [in Russian].
8. **Mathiesen D., Vogtmann D., Dupaix R.** Characterization and constitutive modeling of stress-relaxation behavior of polymethyl methacrylate (PMMA) across the glass transition temperature / *Mech. Mater.* 2014. Vol. 71. P. 74 – 84.
9. **Drozdov A. D.** Mechanical response of polypropylene under multiple-step loading / *Int. J. Solids Struct.* 2013. Vol. 50. P. 815 – 823.
10. **Sorvari J., Malinen M.** On the direct estimation of creep and relaxation functions / *Mech. Time-Depend Mater.* 2007. Vol. 11. P. 143 – 157. DOI: 10.1007/s11043-007-9038-1
11. **Khohlov A. V.** The Qualitative Analysis of Theoretic Curves Generated by Linear Viscoelasticity Constitutive Equation / *Sci. Edu. Bauman MSTU*. 2016. N 5. P. 187 – 245 [in Russian]. DOI: 10.7463/0516.0840650
12. **Sadakov O. S.** Structural model in the rheology of structures / *Vestn. Yuzh.-Ural. Gos. Univ. Ser. Mat. Fiz. Khim.* 2003. Vol. 8. N 4. P. 88 – 98 [in Russian].
13. **Londono J. G., Berger-Vergiat L., Waisman H.** A Prony-series type viscoelastic solid coupled with a continuum damage law for polar ice modeling / *Mech. Mater.* 2016. Vol. 98. P. 81 – 97. DOI: 10.1016/j.mechmat.2016.04.002
14. **Kurkin A. S., Kiselev A. S., Krashennnikov S. V., Bogdanov A. A.** Simulation of the deformation diagram of a viscoelastic material based on a structural model / *Industr. Lab. Mater. Diagn.* 2022. Vol. 88. N 6. P. 60 – 69 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2022-88-6-60-69
15. **Alekseev V. N., Rybak S. A.** On the equations of state of viscoelastic biological media / *Acoust. J.* 2002. Vol. 48. N 5. P. 581 – 588.
16. **Shaw M. T., MacKnight W. J.** Introduction to Polymer Viscoelasticity. — Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2005. DOI: 10.1002/0471741833
17. **Lakes R. S.** Viscoelastic Materials. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. DOI: 10.1017/CBO9780511626722