

**Механика материалов:
прочность, ресурс, безопасность****Materials mechanics:
strength, durability, safety**DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2024-90-2-53-61>**О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ РОСТА ТРЕЩИНЫ УСТАЛОСТИ**© **Сергей Алексеевич Монин***, **Михаил Александрович Горбовец**,
Иван Александрович Ходинев

НИЦ «Курчатовский институт» — ВИАМ, Россия, 105005, Москва, ул. Радио, д. 17; *e-mail: sa_monin@mail.ru

*Статья поступила 16 марта 2023 г. Поступила после доработки 28 апреля 2023 г.
Принята к публикации 30 мая 2023 г.*

С использованием выборки результатов испытаний 68 компактных образцов внецентренного растяжения из титановых сплавов, никелевых сплавов и стали исследовано влияние выбора метода численного дифференцирования (метод секущей и метод дифференциальных полиномов по трем, пяти и семи точкам), используемого для расчета скорости роста трещины усталости, на характеристики линейного участка кинетической диаграммы усталостного разрушения. Цель исследования — определение преимуществ, недостатков и закономерностей рассмотренных методов. В качестве критериев правильности выбора метода численного дифференцирования использованы: коэффициент детерминации R^2 ; интегральный критерий χ , характеризующий разность прогнозируемого и фактического чисел циклов, соответствующих участку устойчивого роста трещины; корреляция между логарифмами констант Париса для сплавов одного класса. В результате проведенных исследований установлено, что использование метода дифференциальных полиномов по трем точкам по сравнению с методом секущей незначительно повышает корреляцию между логарифмами скорости роста трещины усталости и размахом коэффициента интенсивности напряжений (увеличение R^2) и увеличивает разницу между расчетным и экспериментальным числами циклов, соответствующих устойчивому росту трещины (увеличение χ). В то же время при определении скорости роста трещины усталости методом дифференциальных полиномов по пяти и семи точкам наблюдается значительное сглаживание экспериментальных данных, сопровождаемое существенными повышением и снижением χ . Близость к нулю интегрального параметра точности χ является необходимым, но не достаточным критерием хорошего соответствия между результатом испытания и описывающей его математической моделью, тогда как совокупность параметров χ и R^2 однозначно формирует этот критерий. Выбор метода численного дифференцирования не оказывает влияния на корреляцию логарифмов констант уравнения Париса.

Ключевые слова: скорость роста трещины усталости (СРТУ); численное дифференцирование; уравнение Париса; коэффициент интенсивности напряжений; циклическая трещиностойкость; кинетическая диаграмма усталостного разрушения.

**ON THE APPLICATION OF NUMERICAL DIFFERENTIATION METHODS
TO THE DETERMINATION OF THE FATIGUE CRACK GROWTH RATE**© **Sergey A. Monin***, **Mikhail A. Gorbovets**, **Ivan A. Khodinev**

NRC “Kurchatov Institute” — VIAM, 17, ul. Radio, Moscow, 105005, Russia; *e-mail: sa_monin@mail.ru

Received March 16, 2023. Revised April 28, 2023. Accepted May 30, 2023.

Using a sample of test results from 68 compact eccentric tensile specimens made of titanium alloys, nickel alloys and steel, the effect of the choice of numerical differentiation method (secant method and the method of differential polynomials on three, five and seven points) used to calculate the fatigue crack growth rate on characteristics of the linear section of the kinetic diagram of the fatigue failure. The purpose of the study is to determine the advantages, disadvantages and consistent patterns of the considered methods. The coefficient of determination R^2 , integral criterion χ which characterizes the difference between the predicted and actual number of cycles corresponding to the section of stable crack growth, and correlation between the logarithms of the Paris constants for alloys of the same class were used as criteria for the correct choice of the method of numerical differentiation. The main results and conclusions of the

study: the use of the method of differential polynomials over three points compared to the secant method slightly increases the correlation between the logarithms of the fatigue crack growth rate and the range of the stress intensity factor (an increase in R^2) and increases the difference between the calculated and experimental number of cycles corresponding to stable crack growth (an increase in χ). However, when determining the fatigue crack growth rate by the method of differential polynomials for five and seven points, a more significant smoothing of the experimental data is observed, accompanied by a significant increase in R^2 and a decrease in χ ; proximity to zero of the integral accuracy parameter χ is a necessary but not sufficient criterion for good agreement between the test result and the mathematical model that describes it, while the combination of parameters χ and R^2 uniquely forms this criterion; the choice of the method of numerical differentiation does not affect the correlation of the logarithms of the constants of the Paris equation.

Keywords: fatigue crack growth rate (FCGR); numerical differentiation; Paris equation; stress-intensity factor; fatigue fracture kinetic diagram.

Введение

Основные детали газотурбинных двигателей (ГТД) работают в условиях высоких нагрузок и повышенных температур, что устанавливает высокие требования к свойствам материалов, из которых они изготовлены [1, 2]. В состав ГТД входят детали, эксплуатация которых допускается при наличии трещин. После зарождения усталостной трещины в детали, находящейся в условиях циклического нагружения, деталь продолжает функционировать до тех пор, пока распространение трещины устойчиво и с высокой точностью прогнозируемо. Далее деталь ремонтируют или заменяют. Для исследования поведения усталостной трещины в материале, из которого изготовлена деталь ГТД, проводят испытания на скорость роста трещины усталости (далее СРТУ).

Для описания напряженного состояния образца или детали с трещиной используют коэффициент интенсивности напряжений K (далее КИН), который количественно характеризует напряженное состояние в окрестности вершины трещины. КИН зависит от длины трещины, приложенной нагрузки (или напряжения на отдалении от вершины трещины), геометрии образца или детали:

$$K = \sigma F \sqrt{\pi a}, \quad (1)$$

a — длина трещины; σ — номинальное напряжение; F — функция, характеризующая геометрию образца или детали.

Для исследования СРТУ проводят испытания стандартных образцов с надрезом, что позволяет контролировать место зарождения трещины. При этом предварительно выращивают усталостную трещину, а далее проводят испытание — циклически нагружают образец, регистрируя изменения длины трещины (ОСТ 1 92127, ASTM E647). Для учета влияния особых эксплуатационных факторов исследователи проводят специальные испытания, например, в условиях воздействия коррозионно-активной среды [3] или при случайном характере нагружения [4].

По результатам испытания в двойных логарифмических координатах строят кинетическую диаграмму усталостного разрушения (КДУР), демонстрирующую зависимость СРТУ от размаха КИН. Для большинства конструкционных материалов эту диаграмму можно разделить на три участка. Второй участок кинетической диаграммы — линейный, или участок стабильного роста трещины, — описывают уравнением Пэриса

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m, \quad (2)$$

где N — количество циклов нагружения; ΔK — размах КИН (разность максимального и минимального значений); C и m — константы материала, определяемые при обработке результатов испытаний. Методы определения границ линейного участка и констант C и m являются объектами интереса исследователей [5 – 8].

Для определения СРТУ (da/dN) используют методы численного дифференцирования и экспериментально полученные зафиксированную длину трещины a и соответствующее ей число циклов N . Исследователи отмечают, что выбор метода численного дифференцирования влияет на разброс СРТУ на КДУР и на определяемые параметры уравнения Пэриса [9 – 11]. Цель данного исследования — выявление закономерностей, преимуществ и недостатков методов численного дифференцирования, применяемых для определения СРТУ (da/dN) на участке устойчивого роста трещины на КДУР.

Работа выполнена в рамках реализации комплексной научной проблемы 2.2 «Квалификация и исследование материалов» («Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года») [12, 13] с использованием оборудования ЦКП «Климатические испытания» НИЦ «Курчатовский институт» — ВИАМ.

Методы исследования

В работе использованы результаты испытаний на СРТУ при комнатной и эксплуатацион-

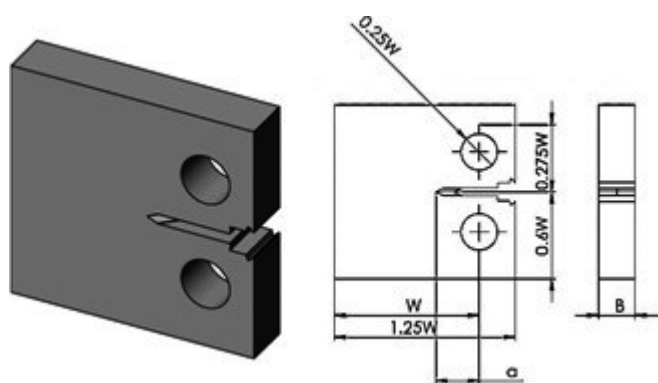


Рис. 1. Компактный образец для внецентренного растяжения

Fig. 1. Compact sample for eccentric tension

ных температурах 21 образца из жаропрочных никелевых сплавов, 40 образцов из титановых сплавов [14, 15] и семи образцов из высокопрочной мартенситостареющей стали [16].

Испытывали компактные С(Т) образцы на внецентренное растяжение (рис. 1) при синусоидальной форме нагружения с частотой 5 – 20 Гц на сервогидравлических испытательных машинах [17]. Длуну трещины определяли методом податливости. Все испытания проводили при постоянном коэффициенте асимметрии нагрузки в условиях возрастания КИН с постоянной скоростью или при постоянной амплитуде нагрузки.

КИН для компактного образца рассчитывали по следующей формуле:

$$\begin{cases} K = \frac{P}{B\sqrt{W}} \frac{2 + \alpha}{(1 - \alpha)^{3/2}} (0,886 + 4,64\alpha - \\ - 13,32\alpha^2 + 14,72\alpha^3 - 5,6\alpha^4); \\ \alpha = \frac{a}{W}; \alpha \geq 0,2, \end{cases} \quad (3)$$

где P — нагрузка; a — длина трещины; W — ширина образца.

СРТУ $(da/dN)_i$ находили методом секущей и методом дифференциальных полиномов. Для определения $(da/dN)_i$ методом секущей использовали точки $\{a_i, N_i\}$ и одну из двух соседних точек — $\{a_{i-1}, N_{i-1}\}$ или $\{a_{i+1}, N_{i+1}\}$. Скорость роста трещины на текущем цикле рассчитывали как тангенс угла наклона между этими точками. При реализации метода дифференциальных полиномов для расчета СРТУ $(da/dN)_i$ применяли экспериментальную точку $\{a_i, N_i\}$ и еще две, четыре или шесть соседних точек (в соответствии с ASTM E647). Зависимость длины трещины от числа циклов аппроксимировали полиномом второй степени с использованием выбранных точек методом наименьших квадратов. СРТУ $(da/dN)_i$ определяли как значение производной от аппроксимирующей функции $a(N)$ в точке N_i . Принци-

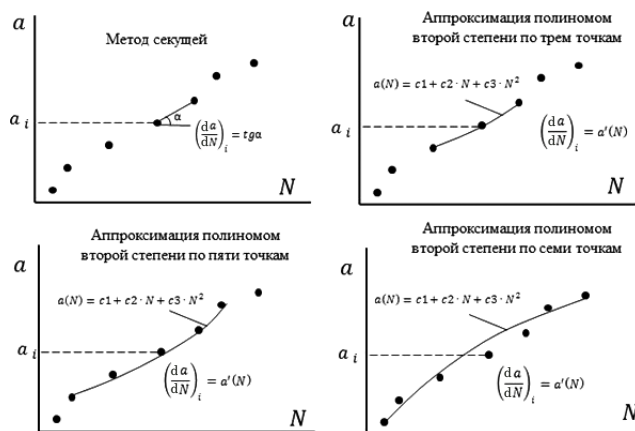


Рис. 2. Графическое представление методов численного дифференцирования для определения СРТУ

Fig. 2. Application of numerical differentiation methods to FCGR determination

пы применения методов численного дифференцирования для определения da/dN графически представлены на рис. 2. Результаты испытания каждого образца обрабатывали с применением каждого из четырех методов.

Обсуждение результатов

Рассматривали несколько критериев «правильности» выбора метода численного дифференцирования. В качестве первого критерия, характеризующего близость экспериментальных данных к выбранной математической модели, выбран коэффициент детерминации

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (4)$$

где y_i — фактическое значение зависимой переменной; \hat{y}_i — расчетное значение зависимой переменной; \bar{y} — среднее значение зависимой переменной; n — количество пар значений зависимой и независимой переменных. В данном случае зависимой переменной является логарифм da/dN , независимой — логарифм ΔK . Коэффициент детерминации численно характеризует долю дисперсии зависимой переменной, объясненной моделью (в настоящем случае — уравнением Пэриса). Если R^2 равен единице, наблюдается строгая линейная зависимость.

При аппроксимации экспериментальных данных целью исследователя является прогнозирование количества циклов, за которое КИН достигнет критического значения, после которого начинается лавинообразный рост трещины. Чтобы рассчитать число циклов нагружения до дос-

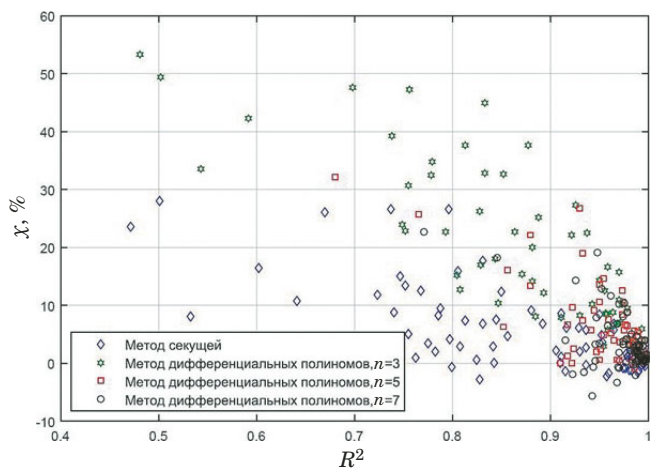


Рис. 3. Соотношения между R^2 и χ при разных методах численного дифференцирования для определения СРТУ

Fig. 3. Relationships between R^2 and χ for different methods of numerical differentiation in FCGR determination

тижения критического значения КИН, надо проинтегрировать уравнение Пэриса:

$$\Delta N_{\text{расч}} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{C(\Delta K(a))^n}, \quad (5)$$

где $\Delta N_{\text{расч}}$ — разность числа циклов нагружения, соответствующих концу и началу линейного участка КДУР в соответствии с моделью Пэриса; a_1 и a_2 — длина трещины в начале и конце линейного участка КДУР. Тогда величину параметра, характеризующего разницу расчетного и экспериментального чисел циклов до достижения критического значения КИН, можно выразить следующим образом:

$$\chi = \frac{\Delta N_{\text{экс}} - \Delta N_{\text{расч}}}{\Delta N_{\text{экс}}} \cdot 100 \%, \quad (6)$$

где χ — интегральный параметр точности; $\Delta N_{\text{экс}}$ — разность экспериментально определенных чисел циклов в конце и начале линейного участка КДУР. Параметры χ и R^2 используют для определения границ линейного участка КДУР. Например, в работе [8] выборку экспериментальных точек $da/dN - \Delta K$ последовательно ограничивают справа и слева таким образом, чтобы минимизировать χ и приблизить к единице R^2 .

Для исследуемых 68 образцов определены константы уравнения Пэриса m и C , коэффициент детерминации R^2 и интегральный параметр точности χ для каждого из четырех рассматриваемых методов численного дифференцирования. Значения R^2 и χ приведены на рис. 3. В табл. 1 представлены средние значения R^2 и χ полной выборки образцов.

Для всех классов сплавов R^2 возрастал при увеличении количества экспериментальных точек, используемых для определения СРТУ, причем это наблюдалось не только в среднем для всей выборки, но и для каждого отдельного образца. При аппроксимации по трем экспериментальным точкам увеличение корреляции незначительно, по пяти и семи точкам — существенно.

Интегральный параметр точности χ наиболее близок к нулю при использовании метода, в котором задействовано наибольшее количество точек. В среднем χ возрастает при переходе от метода секущей к методу дифференциальных полиномов по трем точкам, т.е. увеличивается разница между прогнозируемым моделью Пэриса и экспериментально наблюдаемым числом циклов до начала лавинообразного роста трещины.

Из рис. 3 видно, что результаты, полученные методом секущей и методом дифференциальных полиномов по трем точкам, имеют большой разброс. Большая их доля лежит в областях низких значений R^2 и высоких значений χ , т.е. для них математическая модель плохо согласуется с экспериментом. При увеличении числа точек, используемых для аппроксимации, R^2 приближается к единице, а χ уменьшается. При аппроксимации по семи точкам наблюдается высокое соответствие эксперимента математической модели. На рис. 4 приведены примеры сглаживания СРТУ при применении метода дифференциальных полиномов по семи точкам.

Наблюдаемые явления можно объяснить тем, что аппроксимация $a(N)$ линейной функцией по двум точкам (метод секущей) и полиномом второй степени по трем точкам (метод дифференциальных полиномов по трем точкам) фактически являются интерполяцией, т.е. аппроксимирующая функция проходит через все задействованные точки $\{a_i, N_i\}$. При аппроксимации полиномом второй степени по пяти, семи и более точкам $a(N)$ не проходит через экспериментальные точ-

Таблица 1. Средние значения критериев соответствия модели эксперименту

Table 1. Mean values of the criteria for matching the model to the experiment

Параметр	Метод секущей	Метод дифференциальных полиномов		
		$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$
Среднее значение R^2	0,86	0,88	0,96	0,97
Среднее значение χ , %	6,05	17,2	5,9	3,4

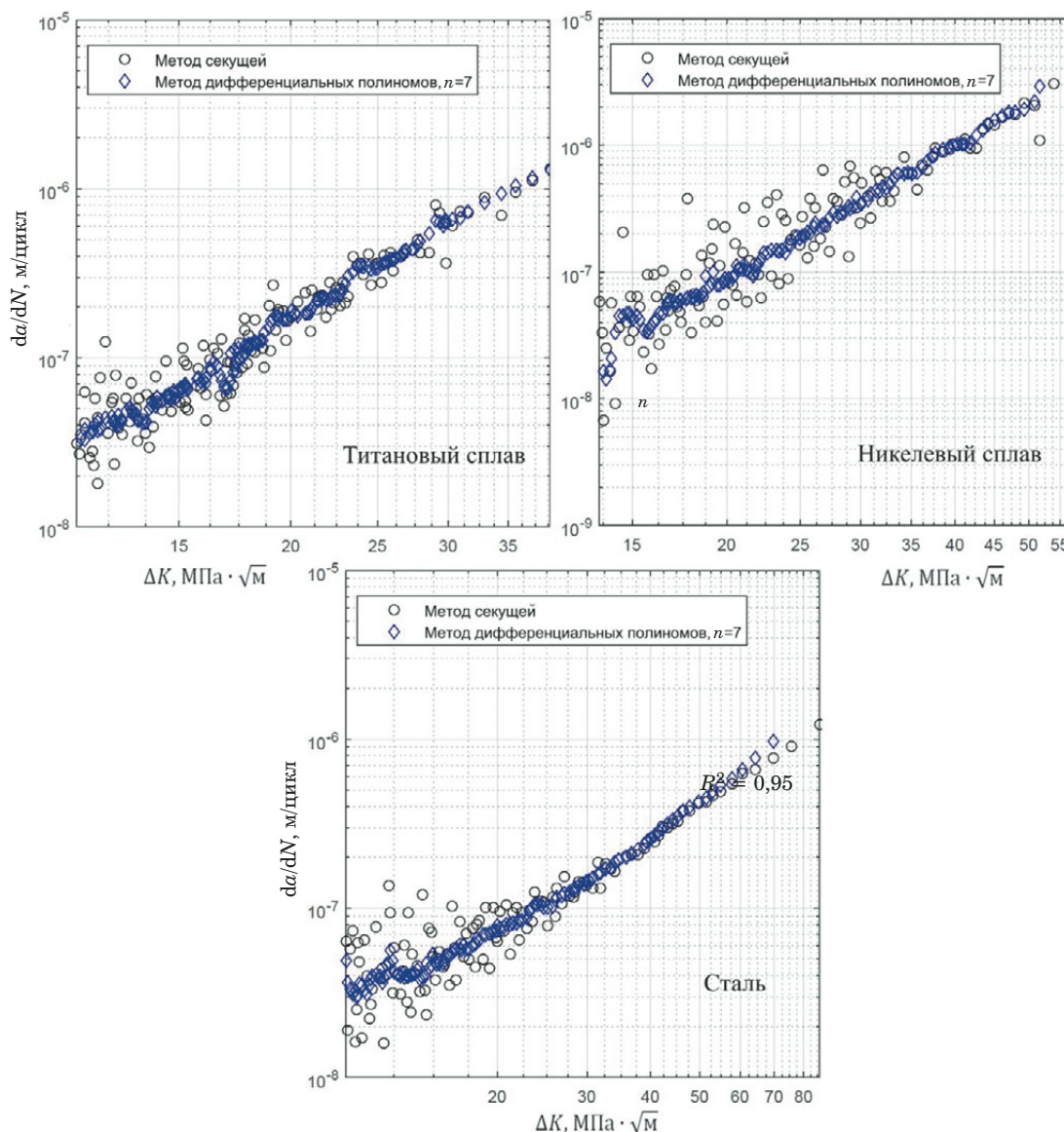


Рис. 4. Примеры «сглаживания» КДУР с помощью аппроксимации СРТУ полиномом второй степени по семи точкам

Fig. 4. Examples of “smoothing” KDFP using the approximation of FCGR by a polynomial of the second degree in seven points

ки, поэтому остается более гладкой при большом разбросе $\{a_i, N_i\}$. Резкое приращение длины трещины вызывает большее изменение интерполирующей функции $a(N)$, чем аппроксимирующей.

В соответствии с принятой математической моделью (уравнение Пэриса) зависимость $a(N)$ на всем линейном участке КДУР описывается уравнением (4). Представление этой функции полиномом второй степени на некотором участке является приближением, причем чем больше этот участок (чем больше точек использовано для аппроксимации), тем это приближение ошибочней. В данной работе прирост трещины регистрировали каждые 0,1 мм. Предполагалось, что любой участок функции $a(N)$ протяженностью не более 0,6 мм корректно описывается полиномом второй степени.

На рис. 5 приведены примеры КДУР никелевого сплава при комнатной и эксплуатационной температурах. Из рис. 5, а видно, что если КДУР, построенная с использованием метода секущей, характеризуется малым разбросом СРТУ, то КДУР, построенная с использованием более сложного метода численного дифференцирования, практически накладывается на нее. На рис. 5, б показаны КДУР, полученные с помощью четырех рассмотренных методов численного дифференцирования. При определении СРТУ методом секущей наблюдается большой разброс, использование метода дифференциальных полиномов по трем точкам этот разброс практически не уменьшает, а метод дифференциальных полиномов по пяти и семи точкам значительно сглаживает экспериментальные результаты.

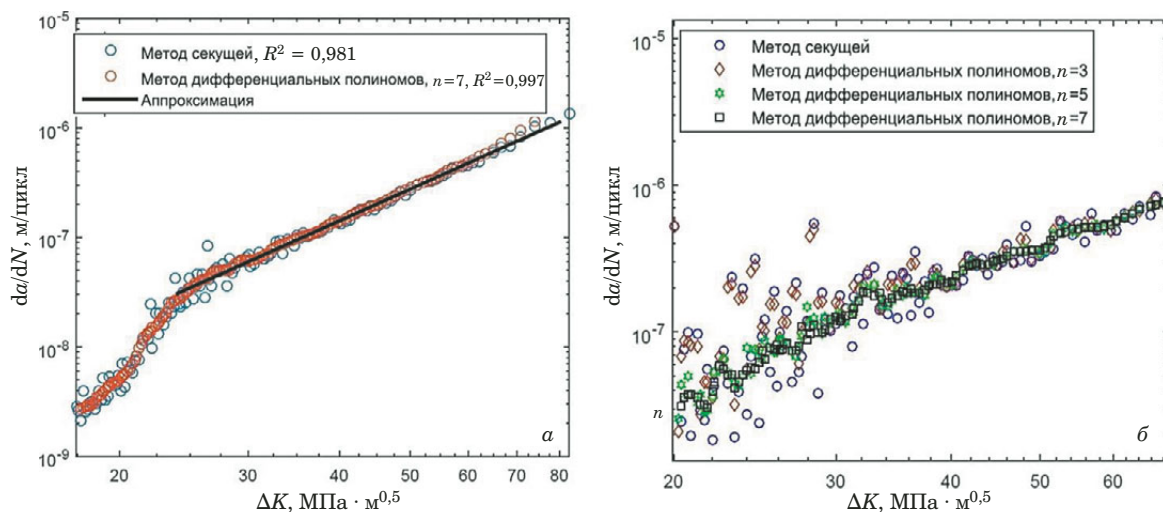


Рис. 5. КДПР никелевого сплава, полученные с использованием разных способов численного дифференцирования: *a* — при комнатной температуре; *б* — при эксплуатационной температуре

Fig. 5. Comparison of the KDFP of a nickel alloy obtained using different methods of numerical differentiation: *a* — at room temperature; *b* — at operating temperature

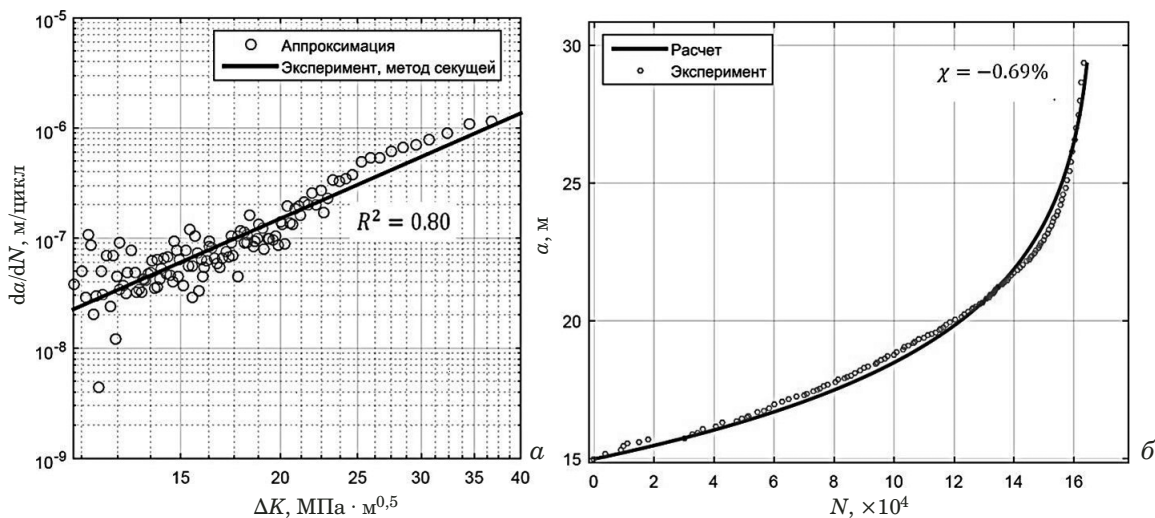


Рис. 6. Результаты испытаний на СРТУ образца из титанового сплава: *a* — КДПР; *б* — зависимость длины трещины от числа циклов

Fig. 6. Results of testing a titanium alloy sample for FCGR: *a* — KDFP; *b* — dependence of the crack length on the number of cycles

На рис. 6 представлены результаты испытания титанового сплава. Интегральный параметр точности χ не превышает одного процента — расчетное число циклов, соответствующее завершению устойчивого роста трещины, практически совпадает с экспериментальным. Однако корреляция между СРТУ и размахом КИН не более чем удовлетворительна (рис. 6, *a*), и расчетная функция числа циклов $N(a)$ при промежуточных значениях длины трещины a существенно отклоняется от экспериментальных значений (рис. 6, *б*). Таким образом, близость к нулю χ не гарантирует хорошего соответствия эксперимен-

тальных результатов испытания на СРТУ математической модели.

Выбор метода численного дифференцирования влияет на точность определения констант Пэриса C и m . Исследователи отмечают, что для одного материала или класса материалов взаимосвязь констант $\lg(C)$ и $\lg(m)$ хорошо описывается линейной зависимостью, т.е. величины C и n не являются независимыми [18–20]. Более того, корреляцию между этими величинами предложено использовать в качестве критерия корректности полученных результатов. В данной работе сопоставлены зависимости $m(C)$ для исследованных классов сплавов, полученные с использова-

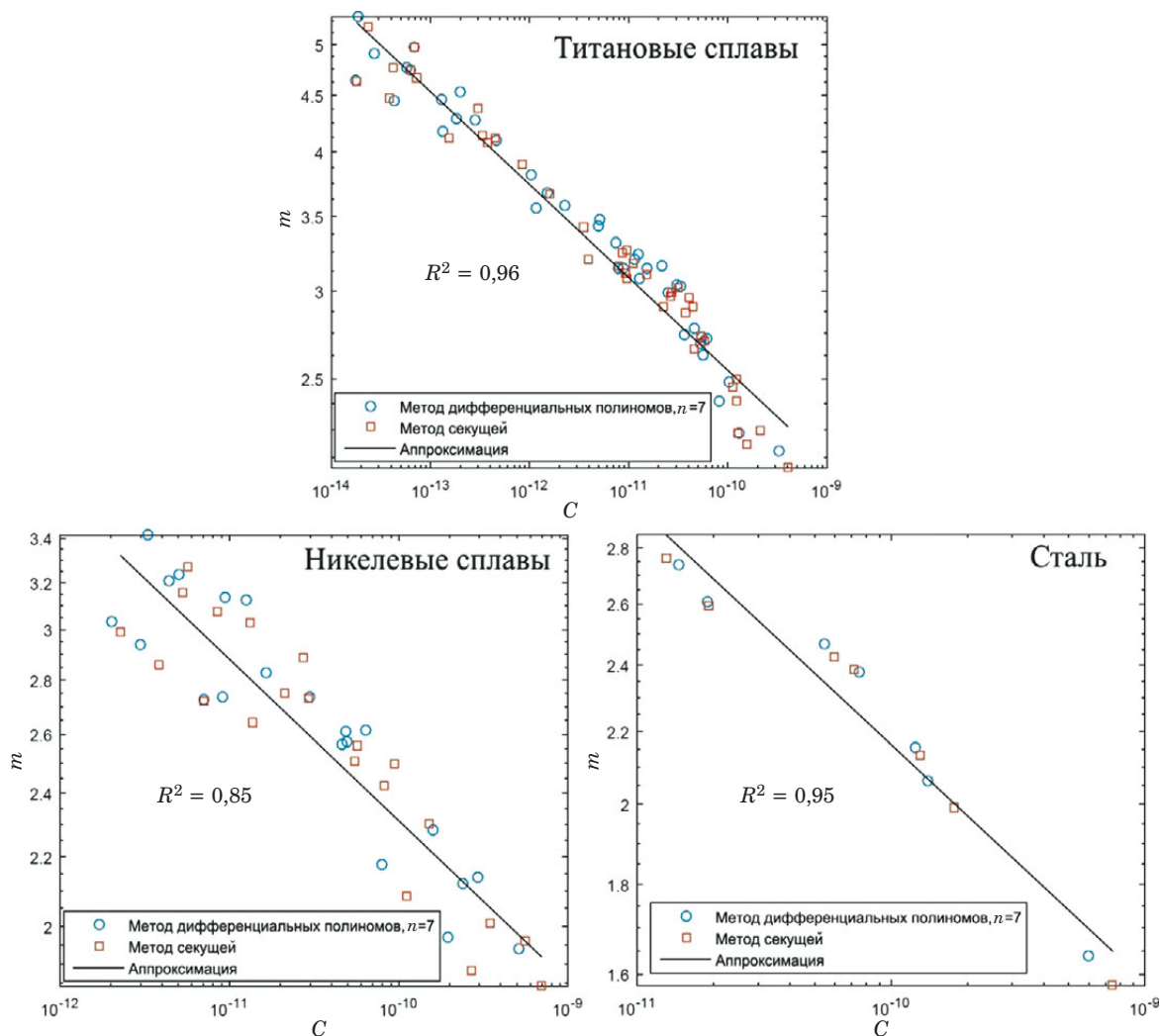


Рис. 7. Корреляция логарифмов констант уравнения Пэриса C и m при разных методах расчета СРТУ

Fig. 7. Correlation of the logarithms of the constants of the Paris equation C and m for different methods of calculating FCGR

нием разных методов численного дифференцирования, а коэффициент детерминации выборок $\lg(m)$ и $\lg(C)$ принят в качестве третьего критерия «правильности» выбора метода численного дифференцирования.

На рис. 7 показаны зависимости констант уравнения Пэриса $m(C)$ в двойных логарифмических координатах для титановых сплавов, никелевых сплавов и стали. На графики нанесены значения m и C , полученные при расчете СРТУ по двум точкам методом секущей и по

семи точкам методом дифференциальных полиномов. В табл. 2 приведены коэффициенты детерминации для выборок $\lg(m) - \lg(C)$, полученных при использовании разных методов численного дифференцирования для расчета СРТУ. Для всех трех рассмотренных классов сплавов изменение способа численного дифференцирования вызывает незначительные колебания коэффициента детерминации, не превышающие одного процента.

Таблица 2. Зависимость корреляции между $\lg(m)$ и $\lg(C)$ от метода численного дифференцирования

Table 2. Dependence of the correlation between $\log(m)$ and $\log(C)$ on the method of numerical differentiation

Материалы	R^2 для метода секущей	Метод дифференциальных полиномов		
		R^2 при $n = 3$	R^2 при $n = 5$	R^2 при $n = 7$
Титановые сплавы	0,9561	0,9568	0,9561	0,9546
Никелевые сплавы	0,8507	0,8518	0,8505	0,8468
Сталь	0,9521	0,9564	0,9504	0,9486

Заключение

Проведенный анализ влияния методов численного дифференцирования на определение СРТУ da/dN позволил сделать следующие выводы.

1. Чем больше экспериментальных точек использовано для определения СРТУ $(da/dN)_i$ в каждой точке a_i , тем меньше разброс данных и выше коэффициент детерминации.

2. При определении СРТУ методом дифференциальных полиномов по трем точкам по сравнению с методом секущей незначительно повышается корреляция между СРТУ и КИН (увеличивается R^2) и возрастает разница между расчетным и экспериментальным числами циклов, соответствующих устойчивому росту трещины (увеличение χ). При аппроксимации СРТУ методом дифференциальных полиномов по пяти и семи точкам наблюдается существенное сглаживание экспериментальных данных, сопровождаемое заметными увеличением R^2 и уменьшением χ .

3. Близость к нулю интегрального параметра точности χ является необходимым, но не достаточным критерием хорошего соответствия результата испытания на СРТУ описывающей его математической модели, тогда как совокупность параметров χ и R^2 однозначно формирует этот критерий.

4. Выбор метода численного дифференцирования не оказывает влияния на корреляцию логарифмов констант уравнения Пэриса C и m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Каблов Е. Н., Оспенникова О. Г., Базылева О. А. Материалы для высокотемпературных деталей газотурбинных двигателей / Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». 2011. № SP2. С. 13 – 19.
2. Бондаренко Ю. А. Тенденции развития высокотемпературных металлических материалов и технологий при создании современных авиационных газотурбинных двигателей / Авиационные материалы и технологии. 2019. № 2(55). С. 3 – 11. DOI: 10.18577/2071-9140-2019-0-2-3-11
3. Гринь Е. А. Испытание материалов на коррозионно-циклическую трещиностойкость в воде при повышенных температурах / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2010. Т. 76. № 1. С. 57 – 60.
4. Савкин А. Н., Андроник А. В., Бадиков К. А., Седов А. А. Исследование кинетики роста усталостных трещин в сталях в зависимости от характера переменного нагружения / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2018. Т. 84. № 3. С. 43 – 51. DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-3-43-51
5. Ye H., Huang R., Zhou Y., Liu J. Calibration of Paris law constants for crack propagation analysis of damaged steel plates strengthened with prestressed CFRP / Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2022. Vol. 117. Article 103208. DOI: 10.1016/j.tafmec.2021.103208
6. Wang Y., Binuad N., Gogu Ch., et al. Determination of Paris's law constants and crack length evolution via Extended and Unscented Kalman filter: An application to aircraft fuselage panels / Mechanical Systems and Signal Processing. 2016. Vol. 80. P. 262 – 281. DOI: 10.1016/j.ymssp.2016.04.027
7. Савкин А. Н., Андроник А. В., Корради Р. Методика определения коэффициентов уравнения скорости роста трещины при циклическом нагружении / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2016. Т. 82. № 1. С. 57 – 63.
8. Голубовский Е. Р., Волков М. Е., Эммауский Н. М. Метод определения границ стадии устойчивого роста трещины усталости и параметров уравнения Пэриса / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2019. Т. 85. № 9. С. 66 – 74. DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-9-66-74
9. Clark W. G., Hudak S. Variability in Fatigue Crack Growth Rate Testing / Journal of Testing and Evaluation. 1975. Vol. 3. N 6. P. 454 – 476.
10. Norman E. Dowling. Mechanical Behavior of Materials. Pearson Education Limited.
11. Klysz S., Leski A. Good Practice for Fatigue Crack Growth Curves Description / Applied Fracture Mechanics, 2012. P. 197 – 228. DOI: 10.5772/52794
12. Каблов Е. Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» / Авиационные материалы и технологии. 2015. № 1(34). С. 3 – 33. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33
13. Каблов Е. Н. Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года / Авиационные материалы и технологии. 2012. № S. С. 7 – 17.
14. Калашников В. С., Решетило Л. П., Чучман О. В., Наприенко С. А. Характеристики прочности и выносливости прутков и штампов лопаток из серийных жаропрочных титановых сплавов и нового титанового сплава псевдо- α -класса / Труды ВИАМ: электрон. науч.-техн. журн. 2022. № 2(108). С. 13 – 31. DOI: 10.18577/2307-6046-2022-0-2-13-31
15. Каблов Е. Н., Кашапов О. С., Медведев П. Н., Павлова Т. В. Исследование двухфазного титанового сплава системы Ti-Al-Sn-Zr-Si- β -стабилизаторы / Авиационные материалы и технологии. 2020. № 1(58). С. 30 – 37. DOI: 10.18577/2071-9140-2020-0-1-30-37
16. Громов В. И., Якушева Н. А., Востриков А. В., Черкашнев Н. Н. Высокопрочные конструкционные стали для валов газотурбинных двигателей (обзор) / Авиационные материалы и технологии. 2021. № 1. С. 3 – 12. DOI: 10.18577/2713-0193-2021-0-1-3-12
17. Горбовец М. А., Ходинев И. А., Рыжков П. В. Оборудование для проведения испытаний на малоцикловую усталость при «жестком» цикле нагружения / Труды ВИАМ: электрон. науч.-техн. журн. 2018. № 9. С. 51 – 60. DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-9-51-60
18. Paris P., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws / Journal of Basic Engineering (Trans. ASME). 1963. N 12. P. 528 – 534.
19. Горбовец М. А., Ночовная Н. А. О параметрах уравнения Пэриса при испытаниях на скорость роста трещины усталости жаропрочных титановых сплавов / Труды ВИАМ: электрон. науч.-техн. журн. 2016. № 4(40). С. 13 – 19. DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-4-2-2
20. Korsunsky A. V., Dini D. D., Walsh M. J. Fatigue crack growth rate analysis in a titanium alloy / Key Engineering Materials Vols. 2008. Vol. 385 – 387. P. 5 – 8. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.385-387.5

REFERENCES

1. Kablov E. N., Ospennikova O. G., Bazyleva O. A. Materials for highly heat-loaded parts of gas turbine engines / Vestn. MG TU im. N. E. Bauman. Ser. Mashinost. 2011. N SP2. P. 13 – 19 [in Russian].
2. Bondarenko Yu. A. Trends in the development of high-temperature metallic materials and technologies in the creation of modern aircraft gas turbine engines / Aviats. Mater. Tekhnol. 2019. N 2(55). P. 3 – 11 [in Russian]. DOI: 10.18577/2071-9140-2019-0-2-3-11
3. Grin' E. A. Testing materials for corrosion-cyclic crack resistance in water at elevated temperatures / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2010. Vol. 76. N 1. P. 57 – 60 [in Russian].

4. **Savkin A. N., Andronik A. V., Badikov K. A., Sedov A. A.** Study of the Kinetics of Fatigue Crack Growth in Steels Depending on the Nature of Variable Loading / *Industr. Lab. Mater. Diagn.* 2018. Vol. 84. N 3. P. 43 – 51 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-3-43-51
5. **Ye H., Huang R., Zhou Y., Liu J.** Calibration of Paris law constants for crack propagation analysis of damaged steel plates strengthened with prestressed CFRP / *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2022. Vol. 117. Article 103208. DOI: 10.1016/j.tafmec.2021.103208
6. **Wang Y., Binuad N., Gogu Ch., et al.** Determination of Paris's law constants and crack length evolution via Extended and Unscented Kalman filter: An application to aircraft fuselage panels / *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2016. Vol. 80. P. 262 – 281. DOI: 10.1016/j.ymssp.2016.04.027
7. **Savkin A. N., Andronik A. V., Korradi R.** Method for determining the coefficients of the crack growth rate equation under cyclic loading / *Industr. Lab. Mater. Diagn.* 2016. Vol. 82. N 1. P. 57 – 63 [in Russian].
8. **Golubovskii E. R., Volkov M. E., Emmauskii N. M.** A method for determination on the boundaries of the stage of steady fatigue crack growth and parameters of Paris equation / *Indust Lab. Mater Diagn.* 2019. Vol. 85. N 9. P. 66 – 74 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-9-66-74
9. **Clark W. G., Hudak S.** Variability in Fatigue Crack Growth Rate Testing / *Journal of Testing and Evaluation*. 1975. Vol. 3. N 6. P. 454 – 476.
10. **Norman E. Dowling.** *Mechanical Behavior of Materials*. Pearson Education Limited.
11. **Klysz S., Leski A.** Good Practice for Fatigue Crack Growth Curves Description / *Applied Fracture Mechanics*, 2012. P. 197 – 228. DOI: 10.5772/52794
12. **Kablov E. N.** Innovative developments of FSUE “VIAM” of the State Scientific Center of the Russian Federation for the implementation of the “Strategic Directions for the Development of Materials and Technologies for Their Processing for the Period until 2030” / *Aviats. Mater. Tekhnol.* 2015. N 1(34). P. 3 – 33 [in Russian]. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33
13. **Kablov E. N.** Strategic directions for the development of materials and technologies for their processing for the period up to 2030 / *Aviats. Mater. Tekhnol.* 2012. N S. P. 7 – 17 [in Russian].
14. **Kalashnikov V. S., Reshetilo L. P., Chuchman O. V., Naprienko S. A.** Characteristics of strength and endurance of bars and forgings of blades made of serial heat-resistant titanium alloys and a new pseudo- α -class titanium alloy / *Tr. VIAM: Élektron. Nauch.-Tekhn. Zh.* 2022. N 2 (108). P. 13 – 31 [in Russian]. DOI: 10/18577/2307-6046-2022-0-2-13-31
15. **Kablov E. N., Kashapov O. S., Medvedev P. N., Pavlova T. V.** Investigation of a two-phase titanium alloy of the Ti-Al-Sn-Zr-Si- β -stabilizers system / *Aviats. Mater. Tekhnol.* 2020. N 1(58). P. 30 – 37 [in Russian]. DOI: 10.18577/2071-9140-2020-0-1-30-37
16. **Gromov V. I., Yakusheva N. A., Vostrikov A. V., Cherkashneva N. N.** High-strength structural steels for gas turbine engine shafts (review) / *Aviats. Mater. Tekhnol.* 2021. N 1. P. 3 – 12 [in Russian]. DOI: 10.18577/2713-0193-2021-0-1-3-12
17. **Gorbovets M. A., Khodinev I. A., Ryzhkov P. V.** Equipment for low-cycle fatigue testing under a “hard” loading cycle / *Tr. VIAM: Élektron. Nauch.-Tekhn. Zh.* 2018. N 9. P. 51 – 60 [in Russian]. DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-9-51-60
18. **Paris P., Erdogan F.** A critical analysis of crack propagation laws / *Journal of Basic Engineering (Trans. ASME)*. 1963. N 12. P. 528 – 534.
19. **Gorbovets M. A., Nochovnaya N. A.** On the parameters of the Paris equation in testing the fatigue crack growth rate of high-temperature titanium alloys / *Tr. VIAM: Élektron. Nauch.-Tekhn. Zh.* 2016. N 4. P. 13 – 19 [in Russian]. DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-4-2-2
20. **Korsunsky A. V., Dini D. D., Walsh M. J.** Fatigue crack growth rate analysis in a titanium alloy / *Key Engineering Materials Vols.* 2008. Vol. 385 – 387. P. 5 – 8. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.385-387.5