

Математические методы исследования

Mathematical methods of investigation

DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2024-90-3-78-88>

ИЗУЧЕНИЕ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

© Сергей Михайлович Шебанов

ЗАО «ЛЭКИС» Россия, 115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31; e-mail: shebanov_s@mail.ru

*Статья поступила 27 апреля 2023 г. Поступила после доработки 20 июня 2023 г.
Принята к публикации 28 июля 2023 г.*

Основная цель работы — получение дополнительной информации об экспериментальной выборке с предварительно известным теоретическим распределением, точечные оценки параметров которого известны. При этом остаются неизвестными законы распределения этих параметров, позволившие бы исследователю дополнительную информацию о материале и технологическом процессе. Для решения этой задачи требуется получить дополнительное число выборок, что экспериментально не всегда возможно. В качестве экспериментальной выборки использовали данные о ресурсе работы резцов из ГОСТ 11.011–83 «Правила определения оценок и доверительных границ параметров гамма-распределения». Экспериментальная выборка содержит результаты 50 измерений. Среднее значение составляло 57,88 ч, доверительный интервал — [50,74;65,01]. Доверительная вероятность принята равной 0,95. В качестве способа получения дополнительных выборок использовали бутстреп. В работе применяли универсальный математический пакет Matlab. Бутстреп позволяет генерировать большое число выборок, к которым нужно приложить определенные правила отбора. Очевидна значимость коэффициента корреляции генерированной выборки и исходной. Бутстреп показал определенную ограниченность при выполнении поставленной в работе задачи. Для 1000 генерированных с помощью стандартной подпрограммы `Bootstrap` выборок среднее значение всех выборок составило 57,80 ч, а доверительный интервал — [50,59;58,08]. Результат хороший. При этом не отвергалась непараметрическая гипотеза согласия бутстрепокских выборок для гамма-распределения с параметрами, характерными для исходной экспериментально полученной выборки, одновременно наблюдался статистически значимый коэффициент корреляции только для 29 бутстрепокских выборок. Этот факт требует введения дополнительных условий при использовании бутстрепа для получения выборок, приближенных к исходной, экспериментальной.

Ключевые слова: бутстреп; моделирование экспериментальной выборки; гамма распределение; непараметрическая статистика.

STUDYING THE ESTIMATES OF GAMMA DISTRIBUTION PARAMETERS

© Sergey M. Shebanov

ZAO "LEKIS", 31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia; e-mail: shebanov_s@mail.ru

Received April 27, 2023. Revised June 20, 2023. Accepted July 28, 2023.

The main goal of the work is to obtain additional information about the experimentally obtained sample with a previously known theoretical distribution, the point estimates of the parameters of which are considered known. At the same time, the laws of distribution of these parameters remain unknown, whereas they could provide a researcher with additional information about both the material and technological processes. Hence, it is necessary to obtain an additional number of samples, which is not always possible experimentally. Here we used data on the service life of cutters (GOST 11.011–83 "Rules for determining estimates and confidence limits for gamma distribution parameters") as an experimental sample. The experimental sample contains the results of 50 measurements. The mean was 57.88 hours CI [50.74;65.01]. The confidence probability is taken to be 0.95. Bootstrap was used as a way to obtain additional samples. The universal mathematical package MATLAB is used in the study. Bootstrap allows generation of a large number of samples that require certain selection rules to be applied to them. The first obvious requirement is the significance of the correlation coefficient of the generated sample with the original one. Even at this stage, the bootstrap showed certain limitations in performing the task set in the study. For 1000

samples generated by the standard bootstrap routine, the mean for the population of all mean bootstrap samples was 57.80 hours, and the confidence interval was [50.59:58.08]. The result is good. Though the nonparametric hypothesis regarding an agreement between the bootstrap samples for the gamma distribution and the parameters characteristic of the original experimentally obtained sample was not rejected, the statistically significant correlation coefficient was observed only for 29 bootstrap samples. As a result of meeting these obvious requirements, less than 3% of the generated bootstrap samples remained for further consideration. This fact requires the introduction of additional conditions when using the bootstrap to obtain samples that are close to the original experimental sample, which can be rather specific. To determine the parameters of the gamma distribution for bootstrap samples, the method of moments and the one-step method were used.

Keywords: bootstrap; modeling of experimental sample; gamma distribution; nonparametric statistics.

Введение

Использование бутстрепа позволяет «размножать» экспериментальные выборки и получать дополнительную информацию без повторных экспериментов. Данную информацию можно использовать как самостоятельную, так и для коррекции последующих экспериментов [1]. В любом случае это способствует экономии ресурсов при исследованиях, однако конкретная постановка задачи может внести коррективы. На формирование основных положений данной работы значительное влияние оказали статьи [2 – 4].

Работа посвящена решению частного вопроса, имеющего практическое значение для экспериментаторов. Несмотря на ограниченный объем выборки, реальные измерения, возможно, несут информацию об особенностях всей генеральной совокупности, к которой принадлежит экспериментально полученная выборка. Хотя это не очевидно. При использовании бутстрепа получают выборки (в дальнейшем будем их называть псевдовыборками), которые в той или иной степени аналогичны исходной, экспериментальной. Если гипотеза согласия теоретического распределения с каждой из N псевдовыборок и гипотеза согласия этого распределения с исходной экспериментальной не отвергаются, то в конечном итоге для каждого параметра этого распределения получаем выборку из N элементов. Особенности распределений этих выборок дают дополнительную информацию для диагностики технологии или материала, которую экспериментально получить практически невозможно. Авторы работы [5] использовали таким образом бутстреп для получения оценок параметра сдвига распределения Вейбулла – Гнеденко прочности филаментов параарамидных волокон “Tapanan” (Yantai Tayho Advanced materials Co., КНР) и “Twaron” (Teijin Aramid, Нидерланды). Точечные оценки трех параметров распределения Вейбулла – Гнеденко для экспериментальных выборок определяли одношаговым (ОШ) методом [6], а псевдовыборки, моделирующие исходные экспериментальные, получали бутстрепом. Средние значения экспериментально определенных

пределов прочности практически совпадали, но доверительные интервалы, полученные для параметра сдвига из псевдовыборок, различались значительно. Параметр сдвига для измерений прочности имеет ясный физический смысл — это начальное механическое напряжение, приложенное к образцу, начиная с которого вероятность разрушения отлична от нуля. В данной работе рассмотрен способ, который позволяет получать с помощью бутстрепа распределения для параметров изучаемой физической величины, независимо от принятого для нее распределения. С этой точки зрения предлагаемый способ может считаться непараметрическим. Для демонстрации указанного подхода использовали экспериментальные данные по ресурсным испытаниям резцов, которые приведены в ГОСТ 11.011–83 «Правила определения оценок и доверительных границ параметров гамма-распределения». Это обусловлено тремя основными причинами: во-первых, получение подобных экспериментальных результатов чрезвычайно затратно; во-вторых, это результаты технических измерений, а не физических, которые проводятся с очень высокой точностью. Объект исследований имеет значительную неоднородность. Обработка подобных экспериментальных данных косвенно характеризует устойчивость расчетной процедуры. Кроме того, материал ГОСТ 11.011–83 изложен очень скрупулезно и его использование гарантирует от возможных методических некорректностей. Все необходимые для выполнения расчетов таблицы из ГОСТ 11.011–83 были занесены в память компьютера, расчеты проводили способами, аналогичными приведенным в данном стандарте. Бутстреп позволяет формально генерировать большое количество выборок, однако возможно появление и одинаковых выборок, и выборок, которые имеют мало общего с исходной, экспериментальной. Из этого множества необходимо отобрать те, которые «похожи» на исходную выборку. Требуется некоторый фильтр, который позволяет целенаправленно отбирать из получаемый совокупности псевдовыборок те, которые удовлетворяют целям исследования. Первое и оче-

видное требование — значимость коэффициента линейной корреляции между псевдовыборкой и исходной, экспериментальной выборкой. Последующие требования, о которых будет сказано ниже, обусловлены больше конкретными условиями решаемой проблемы.

Экспериментальная часть. Вычислительные процедуры

Определение доверительных интервалов. Интервальные оценки получали, используя свойство асимптотической нормальности выборочных моментов [7]. Нижняя граница выборочного среднего составляла

$$x_m - U(p)s_0/n^{1/2}, \quad (1)$$

а его верхняя граница —

$$x_m + U(p)s_0/n^{1/2}, \quad (2)$$

где x_m — выборочное среднее; p — доверительная вероятность; s_0 — среднеквадратическое отклонение; n — объем выборки; $U(p)$ — число, заданное равенством

$$\Phi[U(p)] = (1 + p)/2. \quad (3)$$

Для доверительных вероятностей [0,99, 0,95, 0,9] значения $U(p)$ равны [2,5758, 1,9600, 1,6449] соответственно. Нижнюю границу выборочной дисперсии определяли как

$$s_0^2 - U(p)d, \quad (4)$$

а ее верхнюю границу — как

$$s_0^2 + U(p)d. \quad (5)$$

Вспомогательное число d находили из выражения

$$d^2 = \left[m_4 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^4 \right] \frac{s_0^4}{n}, \quad (6)$$

где m_4 — выборочный четвертый центральный момент. В качестве экспериментальной выборки использовали данные о стойкости резцов из ГОСТ 11.011–83; объем выборки $n = 50$. Доверительные интервалы для параметров при $p = 0,95$ составили: [50,56;65,19] — для среднего, равного 57,88; [347,38;978,62] — для дисперсии, равной 663,00.

Определение параметров гамма-распределения. В указанном выше стандарте приведены способы определения параметров трехпарамет-

рического гамма-распределения при различной предварительно известной информации:

$$f_G(x|a, b, c) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} b^{-a} \exp\left(-\frac{x-c}{b}\right), \quad (7)$$

где f_G — плотность гамма-распределения; a , b , c — параметры формы, масштаба и сдвига; $\Gamma(a)$ — гамма-функция. Из всех вариантов, представленных в ГОСТ 11.011–83, в данной работе рассмотрен только случай, когда неизвестны все три параметра гамма-распределения. Исследованы оценки параметров, полученных по методу моментов, и наилучшие нормально асимптотические (НАН) оценки, найденные ОШ-методом. Преимущества последних подробно изложены в монографии [8]. Для расчета НАН-оценок сначала необходимо определить оценки параметров гамма-распределения по методу моментов (см. ГОСТ 11.011–83, пункт 3):

$$a_m = 4 \frac{(s^2)^3}{m_3^2}; \quad (8)$$

$$b_m = \frac{m_3}{2s^2}; \quad (9)$$

$$c_m = x_m - a_m b_m, \quad (10)$$

где a_m , b_m , c_m — параметры формы, масштаба и сдвига, определенные методом моментов; s^2 — выборочная дисперсия; m_3 — выборочный третий центральный момент. Для экспериментальной выборки ресурса резцов параметры гамма-распределения составили: $a_m = 5,2313$; $b_m = 11,2578$; $c_m = -1,0132$. НАН-оценки рассчитаны через поправки к оценкам метода моментов (см. ГОСТ 11.011–83, пункт 8.4.6 и пример 4), которые определены с помощью таблиц из стандарта. Получены следующие значения НАН-оценок и их верхних и нижних границ: $a_n = 7,3419$, границы $[-1,7948; 16,4786]$; $b_n = 8,7354$, границы $[2,2809; 15,1898]$; $c_n = -11,5779$, границы $[-46,3755; 23,2197]$.

Непараметрическая проверка гипотезы согласия. Непараметрическая проверка гипотезы согласия псевдовыборок с теоретическим распределением корректно может быть выполнена, если заранее известна «заданная функция непрерывного распределения $F(x)$, не содержащая неизвестных параметров» [9, с. 80]. В данной работе, во-первых, проверялась гипотеза согласия псевдовыборки с трехпараметрическим гамма-распределением, в качестве параметров которого использовались оценки метода моментов или НАН-оценки для экспериментально полученной выборки ресурса резцов. Во-вторых, проводилась проверка гипотезы согласия выборки из парамет-

ров псевдовыборок с одним из четырех непрерывных распределений, указанных ниже. В этом случае одна часть выборки использовалась для определения параметров распределения, а другая часть — для проверки собственно гипотезы согласия. (Этот прием рекомендован в [10].) Для наглядности элементы выборки перенумеровались в порядке возрастания значений. По нечетным номерам определялись параметры распределения, а по четным проверялась гипотеза согласия с этим теоретическим распределением, параметры которого предварительно находились по элементам выборки с нечетными номерами. В обоих вариантах выполнялось требование проверки гипотезы согласия с непрерывной функцией распределения, не содержащей неизвестных параметров [9]. Гипотеза согласия во втором варианте проверялась для двухпараметрических распределений Вейбулла – Гнеденко, гамма, лог-нормального и нормального, плотности распределения которых представлены ниже:

$$f_W(x|m_a, \beta) = \frac{\beta}{m_a} \left(\frac{x}{m_a}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{m_a}\right)^\beta\right], \quad (11)$$

$$f_G(x|a, b) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} b^{-a} \exp\left(-\frac{x}{b}\right), \quad (12)$$

$$f_L(x|\mu_L, \sigma_L) = \frac{1}{x\sigma_L\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_L}{\sigma_L}\right)^2\right], \quad (13)$$

$$f_N(x|\mu_N, \sigma_N) = \frac{1}{x\sigma_L\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_N}{\sigma_N}\right)^2\right]. \quad (14)$$

Числовые значения параметров двухпараметрических распределений (11) – (14) определялись с использованием стандартных процедур пакета Matlab, в которых реализован принцип максимума правдоподобия. Выбор наиболее подходящего теоретического распределения, соответствующего экспериментальным данным, проводится на основе анализа «расстояния» между эмпирической функцией распределения и выбранной теоретической функцией. Значения эмпирической функции распределения рассчитывались традиционно:

$$F_{em}(x) = 0 \dots x < \min(x_i),$$

$$F_{em}(x) = i/n \dots x_i < x \leq x_{i+1},$$

$$F_{em}(x) = 1 \dots x \geq \max(x_i).$$

Расчет «расстояний» — экспериментальных значений критериев Колмогорова D_n , Смирнова D_n^+ , Крамера – Мизеса – Смирнова $n\omega^2$ и Андер-

сона – Дарлингга $n\Omega^2$ проводили по формулам из справочника [9]. Так,

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{i}{n} - F(x_i) \right], \quad (15)$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left[F(x_i) - \frac{i-1}{n} \right], \quad (16)$$

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-). \quad (17)$$

Критическое значение критерия Смирнова при $n \geq 10$ на отрезке $q \geq 0,005$ рассчитывается по формуле

$$D_n^+(q) = \sqrt{\frac{1}{2n} \left(y - \frac{2y^2 - 4y - 1}{18n} \right)} - \frac{1}{6n} \dots y = -\ln(q), \quad (18)$$

а критическое значение критерия Колмогорова при $n \geq 10$ на отрезке $q \geq 0,005$ — по формуле

$$D_n(q) = \sqrt{\frac{1}{2n} \left(y - \frac{2y^2 - 4y - 1}{18n} \right)} - \frac{1}{6n} \dots y = -\ln \frac{q}{2}, \quad (19)$$

где $q = 1 - p$ — уровень значимости. Если значение соответствующего критерия больше критического, то гипотеза согласия теоретического распределения и экспериментальных данных отвергается. Значения критерия Крамера – Мизеса – Смирнова определялись как

$$n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[F(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2. \quad (20)$$

Критическое значение этого критерия находится из предельного распределения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{n\omega^2 < x\} = a1(x), \quad (21)$$

$$a1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \sqrt{4j+q} \exp\left\{-\frac{(4j+1)^2}{16x}\right\} \times$$

$$\times \left\{ I_{-1/4} \left[\frac{(4j+1)^2}{16x} \right] - I_{-1/4} \left[\frac{(4j+1)^2}{16x} \right] \right\},$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция; $I_k(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

Результат зависит только от уровня значимости q . Для $q = [0,01, 0,05, 0,1]$ критические значения критерия Крамера – Мизеса – Смирнова равны $[0,7435, 0,4614, 0,3473]$ соответственно.

Экспериментальное значение критерия Андерсона – Дарлинга рассчитывается по формуле

$$n\Omega_n^2 = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n} \right) \ln [1 - F(x_i)] \right\}. \quad (22)$$

Его критическое значение находится из предельного распределения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{n\Omega_n^2 < x\} = \alpha 2(x), \quad (23)$$

$$\alpha 2(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \times$$

$$\times (4j+1) \exp\left[-\frac{(4j+1)^2 \pi^2}{8x}\right] \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{x}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2 \pi^2 y^2}{8x}\right] dy.$$

Результат зависит только от уровня значимости q . Для $q = [0,01, 0,05, 0,1]$ критические значения критерия Андерсона – Дарлинга равны $[3,8826, 2,4924, 1,9330]$ соответственно.

Последовательность отбора псевдовыборок. Для генерации выборок методом бутстрепа использовали стандартную процедуру Bootstrap пакета Matlab. Требуется, чтобы каждая псевдовыборка удовлетворяла конкретным условиям:

1) коэффициент корреляции с исходной экспериментальной выборкой должен быть более 0,3;

2) третий центральный момент псевдовыборки обязан быть положительным;

3) среднему значению псевдовыборки положено находиться внутри доверительного интервала для среднего экспериментальной выборки, как и доверительному интервалу для среднего псевдовыборки;

4) необходимо, чтобы НАН-оценки параметров формы и масштаба были положительными;

5) гипотеза согласия с трехпараметрическим гамма-распределением должна не отвергаться по четырем критериям (см. выше);

6) всем НАН-параметрам оставшихся псевдовыборок следует быть внутри соответствующих доверительных интервалов для НАН параметров экспериментальной выборки, рассчитанных по стандартной методике (см. выше).

Требования пп. 2 – 6 обусловлены конкретной постановкой проблемы: выборка состоит из 50 измерений, для которых не отвергается гипотеза согласия с трехпараметрическим гамма-рас-

Таблица 1. Иллюстрация процесса отбора псевдовыборок по пп. 1 – 6 (qn_i, qv_i — нижняя и верхняя границы доверительного интервала для выборочного среднего псевдовыборки с номером «i»)

Table 1. Illustration of selecting pseudosamples according to points 1 – 6 (qn_i, qv_i — lower and upper boundaries of the confidence interval for the sample mean of pseudosample “i”)

Шаг	Условие	Не выполнено	Осталось
1	Бутстреп		1 000 000
2	Коэффициент корреляции >0,3	979 848	20 152
3	Третий выборочный центральный момент >0	229	19 923
4	Выборочное среднее псевдовыборки < 50,7429	323	19 600
5	Выборочное среднее псевдовыборки >65,0171	545	19 055
6	$qn_i < 50,7429$	9374	9 681
7	$qv_i > 65,0171$	8072	1 609
8	НАН параметр формы <0	683	926
9	НАН параметр масштаба <0	705	221
10	Критерий Колмогорова $D_n > 0,1884$	146	75
11	Критерий Смирнова $D_n^+ > 0,1729$	0	75
12	Критерий $n\omega^2 > 0,4614$	16	59
13	Критерий $n\Omega^2 > 2,4924$	6	53
14	НАН параметр формы <-1,7948	0	53
15	НАН параметр формы >16,4786	1	52
16	НАН параметр масштаба <2,2809	4	48
17	НАН параметр масштаба >15,1898	37	11
18	НАН параметр сдвига <-46,3755	0	11
19	НАН параметр сдвига >23,2197	3	8

пределением. Основная цель исследования — получение бутстрепом совокупности псевдовыборок, удовлетворяющих приведенным требованиям. Из этой совокупности определяют особенности распределений параметров трехпараметрического гамма-распределения. Очень малая часть псевдовыборок, генерированных стандартной процедурой *Boostrap*, удовлетворила перечисленным требованиям. В табл. 1 наглядно представлен процесс отбора по шагам из 1 000 000 псевдовыборок. На каждом последующем шаге рассматривались только выборки, для которых выполнено условие предыдущего шага. Обращает на себя внимание результат второго шага. Коэффициент корреляции, больший 0,3, обнаружили практически только 2 % генерированных псевдовыборок. Критическое значение коэффициента корреляции, ниже которого он незначим, для выборки из 50 элементов при $p = 0,95$ равно 0,23. Это свидетельствует о важ-

ности корректности отбора псевдовыборок при моделировании исходной выборки.

Аналогичные процедуры бутстрепа повторяли несколько раз, пока не набралось 46 выборок, удовлетворяющих перечисленным требованиям, с разными средними значениями. Дальнейшие повторы не приводили к увеличению этого числа псевдовыборок. Полученное число псевдовыборок достаточно для проверок гипотез согласия совокупности параметров их распределений по второму варианту, описанному в разделе «Последовательность отбора псевдовыборок». Половина выборок, а именно 23, использовалась для определения параметров теоретических распределений. Значения параметров других 23 выборок предназначались для проверки гипотезы согласия с ними. Отдельно проверяли гипотезы согласия для оценок метода моментов и НАН-оценок. Результаты приводятся в табл. 2–4 (в квадратных скобках даны критические значения соответствующих критериев при $p = 0,95$).

Таблица 2. Значения непараметрических критериев согласия для оценок параметра масштаба псевдовыборок

Table 2. Values of nonparametric goodness-of-fit tests for estimates of the scale parameter of pseudosamples

Распределение	Значения критериев			
	D_n [0,2749]	D_n^+ [0,2547]	$n\omega^2$ [0,4614]	$n\Omega^2$ [2,4924]
Оценки метода моментов				
Вейбулла – Гнеденко ($m_a = 10,2223, m_o = 14,3440$)	0,1263	0,0509	0,0501	0,2968
Гамма ($a = 108,7775, b = 0,0904$)	0,1611	0,0965	0,1436	0,7765
Логнормальное ($m = 2,2812, s = 0,0997$)	0,1664	0,1062	0,1552	0,8391
Нормальное ($m = 9,8334, s = 0,9350$)	0,1489	0,0937	0,1192	0,6511
Наилучшие асимптотически нормальные оценки				
Вейбулла – Гнеденко ($m_a = 9,4507, m_o = 3,2065$)	0,0970	0,0785	0,0367	0,2890
Гамма ($a = 7,4122, b = 1,1386$)	0,1129	0,0770	0,0611	0,3722
Логнормальное ($m = 2,0639, s = 0,3937$)	0,1302	0,0743	0,0785	0,4476
Нормальное ($m = 8,4393, s = 3,0173$)	0,0945	0,0775	0,0353	0,2834

Таблица 3. Значения непараметрических критериев согласия для оценок параметра формы псевдовыборок

Table 3. Values of nonparametric goodness-of-fit tests for estimates of the shape parameter of pseudosamples

Распределение	Значения критериев			
	D_n [0,2749]	D_n^+ [0,2547]	$n\omega^2$ [0,4614]	$n\Omega^2$ [2,4924]
Оценки метода моментов				
Вейбулла – Гнеденко ($m_a = 6,0403, m_o = 11,6077$)	0,1760	0,1583	0,1827	1,4166
Гамма ($a = 167,1179, b = 0,0348$)	0,1095	0,1046	0,0703	0,7689
Логнормальное ($m = 1,7572, s = 0,0783$)	0,1079	0,1008	0,0650	0,6947
Нормальное ($m = 5,8139, s = 0,4708$)	0,1178	0,1178	0,0875	0,8647
Наилучшие асимптотически нормальные оценки				
Вейбулла ($m_a = 8,1514, m_o = 2,5367$)	0,1099	0,0574	0,0440	0,3009
Гамма ($a = 4,4820, b = 1,6113$)	0,1255	0,0633	0,0793	0,4386
Логнормальное ($m = 1,8614, s = 0,5276$)	0,1573	0,0914	0,1172	0,6205
Нормальное ($m = 7,2217, s = 3,1797$)	0,1046	0,0547	0,0350	0,2861

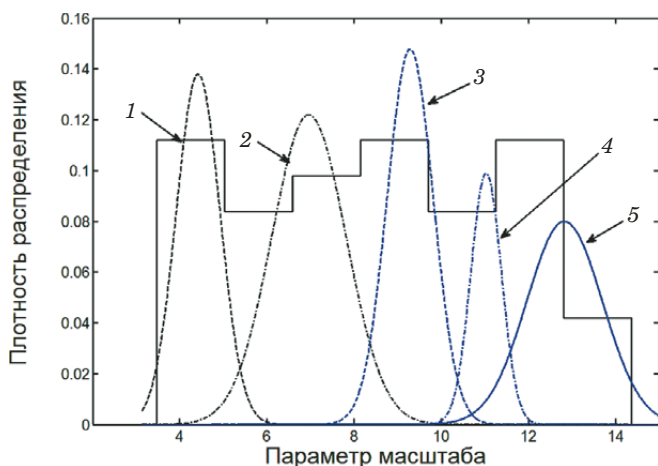


Рис. 1. Гистограмма для наилучших асимптотически нормальных оценок параметра масштаба 46 псевдо-выборок

Fig. 1. Histogram for the best asymptotically normal estimates of the scale parameter for 46 pseudosamples

При выполнении работы отрицательные значения параметра сдвига не отбрасывались, поэтому для этого параметра проверялась только гипотеза согласия с нормальным распределением.

Все четыре критерия для оценок НАН-параметров имеют наименьшее значение для нормального распределения, т.е. нормальное распределение предпочтительней, хотя гипотеза согласия для других распределений не отвергается. Для оценок параметра масштаба, полученных методом моментов, все критерии минимальны для распределения Вейбулла – Гнеденко, а для оценок параметра формы — для логарифмически нормального. Причина этого пока не ясна. Рассмотрим гистограмму НАН-оценок параметра масштаба, представленную на рис. 1. Число ступеней гистограммы определялось по формуле Стерджесса:

$$k = 1 + 3,322 \lg(n). \quad (24)$$

Число k округляется до ближайшего целого. Ступенчатая кривая свидетельствует о том, что реальное распределение составное, несмотря на

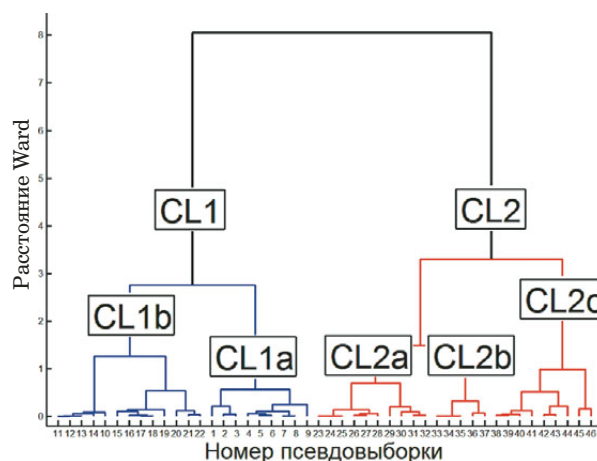


Рис. 2. Дендрограмма для наилучших асимптотически нормальных оценок параметра масштаба 46 псевдо-выборок

Fig. 2. Dendrogram for the best asymptotically normal estimates of the scale parameter for 46 pseudosamples

то, что по формальным признакам критериев согласия можно использовать нормальное распределение.

Используем для выборки НАН-оценок параметра масштаба кластерный анализ. Между объектами принимаем Евклидово расстояние, способ группировки — Варда [12]. Результат представлен на рис. 2. Для наглядности выборка значений оценок НАН-параметров масштаба перенумеровывалась в порядке возрастания. Вся выборка распалась на два кластера, каждый из которых состоит из подкластеров. Для каждого подкластера принимаем нормальное распределение. Число элементов, попавших в подкластеры, незначительно для использования непараметрической гипотезы согласия с теоретическим распределением. Поскольку для кластеров непараметрическая гипотеза согласия с нормальным распределением не отвергается, то для подкластеров проверялась параметрическая гипотеза согласия с нормальным распределением. Из пакета Matlab использовались стандартные процедуры Jbtest [13] и Lillietest [14]. Дополнительно проведена проверка по критерию Уилки – Шапиро [15]. По

Таблица 4. Значения непараметрических критериев согласия для оценок параметра сдвига с нормальным распределением

Table 4. Values of nonparametric goodness-of-fit tests for estimates of the shift parameter with a normal distribution

Распределение	Значения критериев			
	D_n [0,2749]	D_n^+ [0,2547]	$n\omega^2$ [0,4614]	$n\Omega^2$ [2, 4924]
Оценки метода моментов				
Нормальное ($m_x = 0,4973, s_x = 0,8084$)	0,0791	0,0464	0,0215	0,1778
Наилучшие асимптотически нормальные оценки				
Нормальное ($m_x = -7,0194, s_x = 13,1054$)	0,1005	0,0313	0,0394	0,2609

всем критериям для всех подкластеров гипотеза согласия с нормальным распределением не отвергалась. Параметры нормального распределения для подкластеров выборки НАН параметра масштаба приведены в табл. 5.

Весовой коэффициент подкластера в общем объеме измерений рассчитывался исходя из разности значений эмпирической функции распределения на границах подкластера, например, для подкластера CL1a, в котором оказались первые девять объектов, весовой коэффициент

$$m_1 = F_{em}(9) - F_{em}(1) = 9/46 - 1/46 = 0,1739.$$

Плотность нормального распределения для каждого подкластера, рассчитанная по параметрам, указанным в табл. 5, умножалась на весовой коэффициент и наносилась на гистограмму (см. рис. 1). Положения максимумов плотности распределений удовлетворительно совпадали с максимумами гистограммы, т.е. получен своеобразный спектр.

Перенесем полученные результаты на параметры формы и сдвига. Кластерный анализ по этим параметрам не проводился. Для расчета параметров нормального распределения для подкластеров оценок НАН-параметров формы и сдвига использовались значения с номерами, соответствующим номерам параметра масштаба. Например, в подкластер CL1a вошли параметры

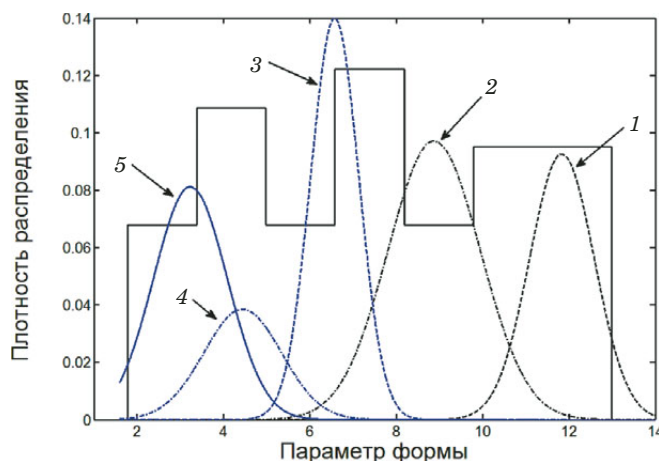


Рис. 3. Гистограмма для выборки из наилучших асимптотически нормальных параметров формы для 46 псевдо-выборок

Fig. 3. Histogram for a sample of the best asymptotically normal shape parameters for 46 pseudosamples

масштаба с номерами от 1-го до 9-го (см. рис. 1). Этим номерам соответствуют номера оценок НАН-параметра формы 28, 15, 18, 10, 5, 14, 43, 13, 34 в выборке из 46 элементов. Аналогичная картина наблюдается для оценок НАН-параметра сдвига. Параметры нормального распределения по подкластерам приведены в табл. 6. На рис. 4 представлены гистограмма выборки оце-

Таблица 5. Параметры нормального распределения для подкластеров наилучших асимптотически нормальных параметров масштаба (N_i — число объектов, попавших в подкластер; m_i — весовой коэффициент каждого подкластера, s_0 — среднее квадратическое отклонение)

Table 5. Normal distribution parameters for subclusters of the best asymptotically normal scale parameters, N_i is the number of objects that fall into the subcluster, m_i is the weight coefficient of each subcluster, the number, color of the line and line type are the same for the subclusters of all figures in the article, s_0 is the standard deviation

Номер кривой	Кластер	N_i	m_i	Цвет, тип линии (см. рис. 1, 3 – 5)	Среднее	s_0
1	CL1a	9	0,1739	Черный, штриховая	4,4200	0,5029
2	CLb	13	0,2609	Черный, штрихпунктирная	6,9613	0,8536
3	CL2a	10	0,1957	Синий, штриховая	9,2834	0,5282
4	CL2b	5	0,0870	Синий, штрихпунктирная	11,0260	0,3508
5	CL2c	9	0,1739	Синий, сплошная	12,8247	0,8680

Таблица 6. Параметры нормального распределения для выборок наилучших асимптотически нормальных оценок параметров формы и сдвига по подкластерам

Table 6. Normal distribution parameters for samples of the best asymptotically normal estimates of the shape and shift parameters by subclusters

Номер кривой (см. рис. 4)	N_i	m_i	Параметр формы		Параметр сдвига	
			Среднее	s_0	Среднее	s_0
1	9	0,1739	4,4200	0,5029	-24,9308	3,8763
2	13	0,2609	6,9613	0,8535	-11,3859	5,7847
3	10	0,1957	9,2834	0,5283	-4,4232	3,7741
4	5	0,0870	11,0259	0,3507	6,0809	5,3827
5	9	0,1739	3,2382	0,8548	10,5604	4,5032

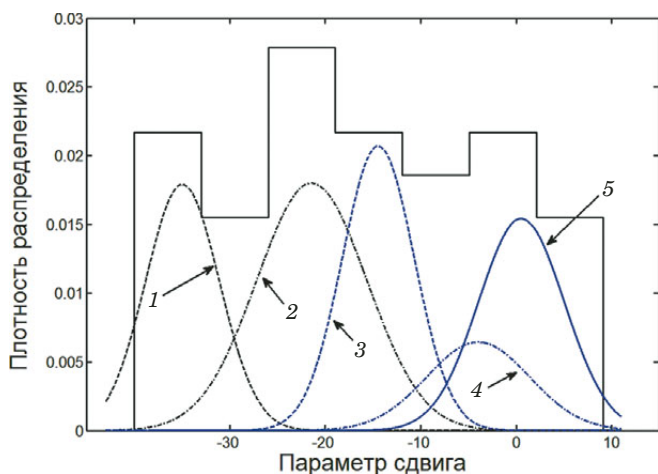


Рис. 4. Гистограмма для выборки наилучших асимптотически нормальных параметров сдвига 46 псевдо-выборок

Fig. 4. Histogram for a sample of the best asymptotically normal shift parameters for 46 pseudosamples

нок НАН-параметра сдвига и соответствующие плотности распределений подкластеров.

Полученные данные можно использовать для анализа результатов измерений исходной физической величины — ресурса работы резцов. Для всей экспериментальной выборки принято трехпараметрическое гамма-распределение. Допустим, что это распределение справедливо и для результатов измерений ресурса резцов, попавших в соответствующий подкластер. Вычислим средние значения параметров масштаба, формы и сдвига для подкластеров исходя из имеющихся данных для 46 псевдовыборок. Результаты приведены в табл. 7. Плотности гамма-распределения для подкластеров, умноженные на соответствующие весовые коэффициенты, показаны на рис. 5.

Обсуждение результатов

С помощью бутстрапа получены выборки, аналогичные исходной. В пакете Matlab существует стандартная процедура Ksdensity восстановления плотности распределения по экспериментальным данным, не требующая использования конкретного теоретического непрерывного рас-

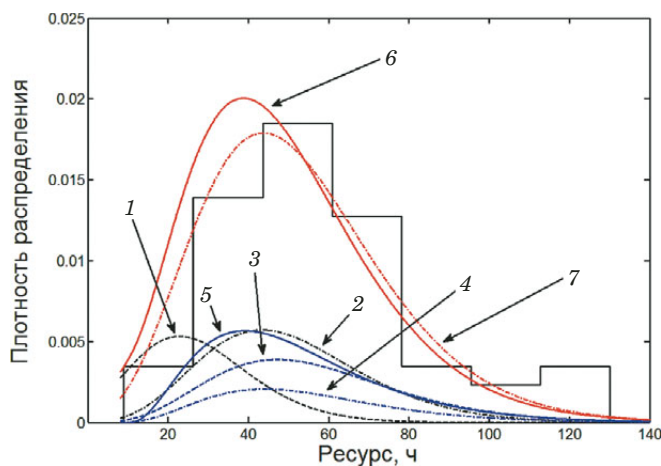


Рис. 5. Плотность гамма-распределений по подкластерам: номера графиков, цвет и тип линий соответствует указанным в табл. 5; 6 — сумма значений плотностей распределений подкластеров; 7 — плотность гамма-распределения для экспериментальной выборки по ресурсу резцов с наилучшими нормально асимптотическими параметрами из ГОСТ 11.011–83; $a_n = 7,3419$, $b_n = 8,7354$, $c_n = -11,5779$

Fig. 5. Density of gamma distributions by subclusters (the numbers of graphs, color and type of lines correspond to those indicated in Table 5); 6 — the sum of the values of the distribution densities of subclusters, 7 — the density of gamma distribution for the experimental sample on the resource of cutters with the best normal asymptotic parameters from GOST 11.011–83 $a_n = 7.3419$, $b_n = 8.7354$, $c_n = -11.5779$

пределения. С этой точки зрения она может считаться непараметрической. На рис. 6 представлены результаты восстановления плотности распределения для исходной экспериментальной выборки и двух произвольно выбранных псевдовыборок. Как и плотность распределения исходной выборки, плотности распределения псевдовыборок имеют два максимума, при этом их коэффициенты корреляции с исходной выборкой практически одинаковы — 0,3064 и 0,3090. Обнаружилась и определенная ограниченность бутстрапа, которая, скорее всего, связана также с технической (достаточно грубой) точностью экспериментальных данных. Пороговое значение коэффициента корреляции было принято 0,3, минимальное полученное значение составило 0,3045, максимальное — 0,5010. Похоже, псевдо-

Таблица 7. Усредненные параметры гамма-распределения по подкластерам

Table 7. Averaged parameters of the gamma distribution by subclusters

Номер кривой (см. рис. 5)	Кластер	m_i	a_n	b_n	c_n
1	CL1a	0,1957	11,8392	4,4200	-24,9308
2	CL1b	0,2826	8,8811	6,9613	-11,3859
3	CL2a	0,2174	6,5783	9,2834	-4,4232
4	CL2b	0,1087	4,4507	11,0260	6,0809
5	CL2c	0,1957	3,2382	12,8247	10,5604

выборки с более высоким коэффициентом корреляции с исходной выборкой получить с использованием процедуры Bootstrap невозможно. Это утверждение пока относится именно к исследуемой в данной работе выборке. Если требуется получение более высоких значений корреляции с экспериментальной выборкой, возможно, потребуется некоторая модификация способа генерации псевдовыборок. Следует также отметить, что коэффициент линейной корреляции — лишь одно из совокупности требований, которое предъявляется к псевдовыборкам. Эта совокупность должна определяться при решении каждой проблемы достаточно индивидуально.

Выводы

С использованием бутстрепа рассмотрен способ получения совокупности выборок, аналогичных исходной экспериментальной, для которой не отвергалась гипотеза согласия с трехпараметрическим гамма-распределением. Из 40 миллионов выборок, полученных с помощью бутстрепа, предъявленным требованиям удовлетворило 46 псевдовыборок. Непараметрическая гипотеза согласия псевдовыборок с трехпараметрическим гамма-распределением с параметрами, полученными для исходной экспериментальной, являлась составляющей частью требований, предъявляемым к псевдовыборкам.

Определены параметры гамма-распределения для каждой из 46 псевдовыборок методом моментов и НАН-параметры — с использованием одношагового метода. Для параметров формы, определенных методом моментов, предпочтительно логарифмически нормальное распределение, для параметра масштаба — распределение Вейбулла – Гнеденко, а для каждого НАН-параметра — нормальное распределение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов А. И. О реальных возможностях бутстрепа как статистического метода / Заводская лаборатория. 1987. Т. 53. № 10. С. 82 – 85.
2. Орлов А. И. Смена парадигм в прикладной статистике / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2021. Т. 87. № 7. С. 6 – 7. DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-7-6-7
3. Орлов А. И. Основные требования к математическим методам классификации / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2020. Т. 86. № 11. С. 67 – 78. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-11-67-68
4. Орлов А. И. Предельные теоремы и метод Монте-Карло / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2016. Т. 82. № 7. С. 67 – 72.
5. Shebanov S. M., et al. Estimation of the Weibull – Gnedenko Distribution Parameters for the Strength of Single Filaments of Twaron and Teparan Para-Aramid Fibers Using the Bootstrap Method / Fibre Chemistry. 2021. Vol. 53. N 4. P. 277 – 282. DOI: 10.1007/s10692-022-10284-8
6. Петрович М. Л., Давидович М. И. Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 191 с.

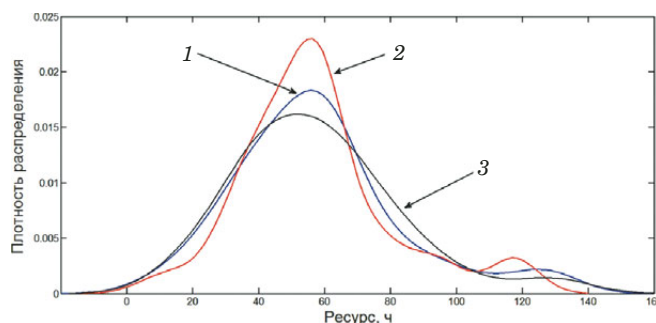


Рис. 6. Плотности распределения: 1 — для исходной экспериментальной выборки; 2 и 3 — для двух произвольно выбранных псевдовыборок

Fig. 6. Distribution densities: 1 — for the initial experimental sample; 2 and 3 — for two arbitrarily chosen pseudosamples

7. Орлов А. И. Непараметрическое точечное и интервальное оценивание характеристик распределения / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. Т. 70. № 5. С. 65 – 70.
8. Орлов А. И. Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.
9. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1983. — 416 с.
10. Бондарев Б. В. О проверке сложных статистических гипотез / Заводская лаборатория. 1986. Т. 52. № 10. С. 62 – 63.
11. Орлов А. И. Распространенная ошибка при использовании критериев Колмогорова и омега-квадрат / Заводская лаборатория. 1985. Т. 51. № 1. С. 60 – 62.
12. Ward J. H., Jr. Hierarchical Grouping to Optimize an Objective Function / Journal of the American Statistical Association. 1963. Vol. 58. N 301. P. 236 – 244. <https://iv.cns.iu.edu/sw/data/ward.pdf> (дата обращения 10.04.2023)
13. Jorjue C. M., Bera A. K. A test for normality of observations and regression residuals / International Statistical Review/ Revue Internationale de Statistique. 1987. Vol. 55. N 2. P. 163 – 172. <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=05c1b378c2d19cfaaf285392484b1159f782065c> (дата обращения 10.04.2023)
14. Lilliefors H. W. On the Kolmogorov – Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown / Journal of the American Statistical Association. 1967. Vol. 62. N 318. P. 399 – 402. <http://www.bios.unc.edu/~mhudgens/bios/662/2008fall/Backup/lilliefors1967.pdf> (дата обращения 10.04.2023).
15. Shapiro S. S., Wilk M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples) / Biometrika. 1965. Vol. 52. N 3/4. P. 591 – 611. <http://www.bios.unc.edu/~mhudgens/bios/662/2008fall/Backup/wilkshapiro1965.pdf> (дата обращения 10.04.2023).

REFERENCES

1. Orlov A. I. On the real possibilities of Bootstrap as a statistical method / Industr. Lab. 1987. Vol. 53. N 10. P. 82 – 85 [in Russian].
2. Orlov A. I. Change of paradigms in applied statistics / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2021. Vol. 87. N 7. P. 6 – 7 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2021-87-7-6-7
3. Orlov A. I. Basic requirements for mathematical methods of classification / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2020. Vol. 86. N 11. P. 67 – 78 [in Russian]. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-11-67-68
4. Orlov A. I. Limit Theorems and Monte Carlo Method / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2016. Vol. 82. N 7. P. 67 – 72 [in Russian].
5. Shebanov S. M., et al. Estimation of the Weibull – Gnedenko Distribution Parameters for the Strength of Single Filaments of Twaron and Teparan Para-Aramid Fibers Using the Bootstrap

- Method / Fibre Chemistry. 2021. Vol. 53. N 4. P. 277 – 282.
DOI: 10.1007/s10692-022-10284-8
6. **Petrovich M. L., Davidovich M. I.** Statistical estimation and testing of hypotheses on a computer. — Moscow: Finansy i Statistika, 1989. — 191 p. [in Russian].
 7. **Orlov A. I.** Nonparametric point and interval estimation of distribution characteristics / Industr. Lab. Mater. Diagn. 2004. Vol. 70. N 5. P. 65 – 70 [in Russian].
 8. **Orlov A. I.** Applied statistics. — Moscow: Ékzamen, 2006. — 671 p. [in Russian].
 9. **Bolshev L. N., Smirnov N. V.** Tables of mathematical statistics. 3rd edition. — Moscow: Nauka, 1983. — 416 p. [in Russian].
 10. **Bondarev B. V.** On testing complex statistical hypotheses / Industr. Lab. 1986. Vol. 52. N 10. P. 62 – 63 [in Russian].
 11. **Orlov A. I.** A common mistake when using the Kolmogorov criteria and omega-square / Industr. Lab. 1985. Vol. 51. N 1. P. 60 – 62 [in Russian].
 12. **Ward J. H., Jr.** Hierarchical Grouping to Optimize an Objective Function / Journal of the American Statistical Association. 1963. Vol. 58. N 301. P. 236 – 244. <https://iv.cns.iu.edu/sw/data/ward.pdf> (accessed 10.04.2023).
 13. **Jorjue C. M., Bera A. K.** A test for normality of observations and regression residuals / International Statistical Review/ Revue Internationale de Statistique. 1987. Vol. 55. N 2. P. 163 – 172. <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=05c1b378c2d19cffaf285392484b1159f782065c> (accessed 10.04.2023).
 14. **Lilliefors H. W.** On the Kolmogorov – Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown / Journal of the American Statistical Association. 1967. Vol. 62. N 318. P. 399 – 402. <http://www.bios.unc.edu/~mhudgens/bios/662/2008fall/Backup/lilliefors1967.pdf> (accessed 10.04.2023).
 15. **Shapiro S. S., Wilk M. B.** An analysis of variance test for normality (complete samples) / Biometrika. 1965. Vol. 52. N 3/4. P. 591 – 611. <http://www.bios.unc.edu/~mhudgens/bios/662/2008fall/Backup/wilkshapiro1965.pdf> (accessed 10.04.2023).

