УДК 539.26.01

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПО НАБОРУ ОТДЕЛЬНЫХ ОРИЕНТАЦИЙ ЗЕРЕН ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

© **А. С. Вишняков, Т. И. Савёлова**[1]

Статья поступила 23 декабря 2014 г.

Одна из важнейших задач математического текстурного анализа — вычисление функции распределения зерен по их ориентациям (ФРО) по экспериментальным данным. В настоящее время существует большое число методов и комплексов программ для решения задачи восстановления ФРО. Один из них — аппроксимация ФРО «стандартными» функциями на группе вращений, в качестве которых, в частности, используются нормальные распределения на SO(3). Наиболее просто вычисляются центральные нормальные распределения, отличающиеся круговым характером рассеяния относительно некоторой ориентировки. Предложен метод восстановления ФРО по набору отдельных ориентировок путем аппроксимации нормальными распределениями на SO(3). В случае когда ориентировки разделены на отдельные кластеры, приведен алгоритм восстановления параметров нормального распределения: положения «центра», остроты и веса. Даны численные примеры.

Ключевые слова: функция распределения ориентаций; полюсная фигура; нормальное распределение на группе SO(3); отдельные ориентировки; EBSD-метод измерений; метод Монте-Карло.

С 1960-х годов активно развиваются математические методы исследования текстуры поликристаллических материалов [1 – 3]. Разработаны подходы и комплексы программ вычисления функции распределения ориентаций (ФРО) по полюсным фигурам (ПФ), получаемым экспериментально методами рентгеновской (нейтронной) дифракции. В последние десятилетия широкое распространение получают EBSD-методы (electron backscatter diffraction) [5, 6], эффективно решающие задачи микротекстурного анализа и вычисления характеристик макроструктуры.

В [4] предложен подход, основанный на аппроксимации ФРО нормальными распределениями (НР) на группе вращений SO(3). Метод обладает свойством робастности и позволяет описывать ФРО небольшим (по сравнению с другими методами) числом параметров, имеющих простой физический смысл и дающих возможность описать ФРО как совокупность некоторого количества преимущественных ориентаций с определенным «размытием» и весом.

Цель работы — решение задачи восстановления параметров НР по набору отдельных ориентаций зерен поликристаллов, моделируемых методом Монте-Карло.

Рассматривали центральное нормальное распределение (ЦНР) на группе SO(3) [3]. ФРО вычисляли для групп ориентировок при неизвестных положении центра и аналоге дисперсии.

ЦНР на группе SO(3) может быть представлено в виде

$$f(t,\varepsilon)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\exp[-l(l+1)\varepsilon^2]\frac{\sin(l+1/2)t}{\sin(t/2)},\ t\in[-\pi,\pi). \tag{1}$$

Параметр t определяется следующим образом:

$$\cos\frac{t}{2}=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2},\ t\in[-\pi,\pi),\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi,\psi\in(-\pi,\pi]. \tag{2}$$

Таким образом, зависимость ФРО от трех углов Эйлера можно свести к зависимости от одного аргумента.

Для вычисления ФРО использовали специализированный метод Монте-Карло [9], позволяющий получить набор ориентировок, не имеющих смещения относительно центра (0, 0, 0).

[1] Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия; e-mail: frayter93@yandex.ru

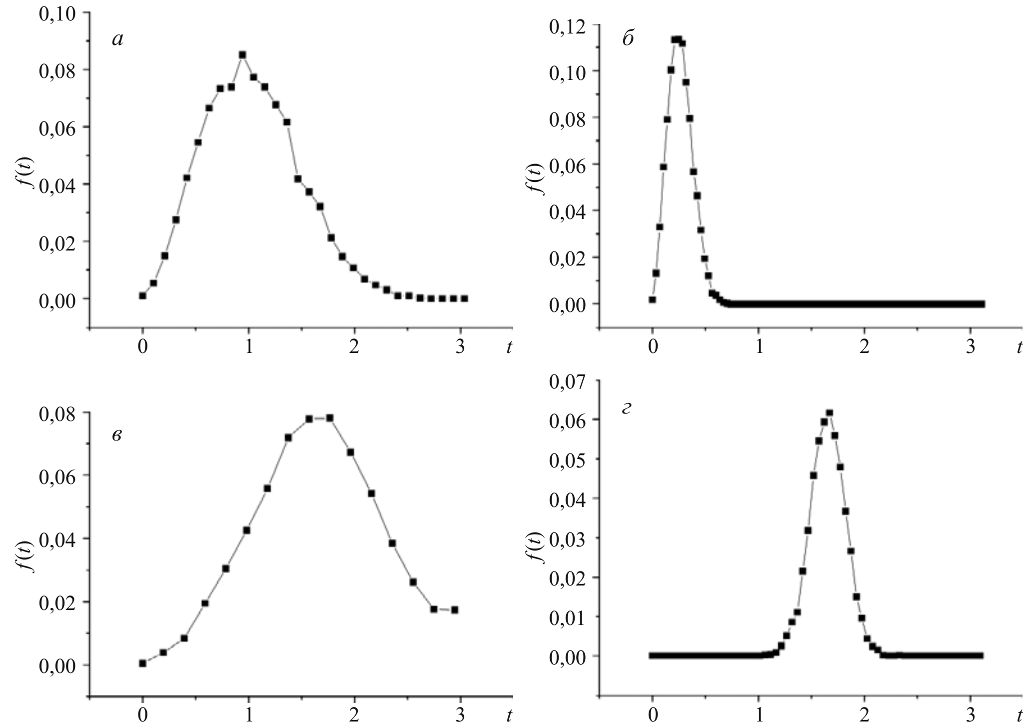

Рис. 1. ЦНР: *а* — $\varepsilon = 1/2$, $\mathbf{g}_0 = \{0, 0, 0\}$, $M = 30$; *б* — $\varepsilon = 1/8$, $\mathbf{g}_0 = \{0, 0, 0\}$, $M = 89$; *в* — $\varepsilon = 1/2$, $\mathbf{g}_0 = \{\pi/2, \pi/4, \pi\}$, $M = 16$; *г* — $\varepsilon = 1/8$, $\mathbf{g}_0 = \{\pi/2, \pi/4, \pi\}$, $M = 62$

Имеем

$$\mathbf{g}(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Пусть $(\varphi_0, \theta_0, \psi_0)$ — новое положение центра, тогда $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}(\varphi_0, \theta_0, \psi_0)$ — матрица поворота вокруг осей OZ, OX', OZ'' [3], а $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{g}$ — матрица, характеризующая ориентировку, смещенную от начального положения относительно центра.

На рис. 1 представлены гистограммы зависимости смещенной плотности распределения f от t для различных параметров: остроты (ε), смещения от центра (g_0) и числе интервалов разбиения (M). Объем выборки $N = 10\,000$.

Разбиение выбиралось программой таким образом, чтобы у ФРО выделить максимум. До максимума функция растет монотонно, затем без резких скачков монотонно убывает (см. рис. 1). Вращения выбраны как по близко стоящим значениям, так и по сильно отличающимся, в том числе по знаку.

Из рис. 1 видно, что максимум меняет свое положение. Это связано с наличием инвариантной меры на SO(3) [3]. Более того, ширина пиков также изменяется. Это делает невозможным восстановление ФРО способом простого перебора параметров дисперсии и углов смещений в силу временных затрат.

Для визуального представления алгоритма использовали проекции ориентировок, отвечающие заданным кристаллографическим параметрам. Кристаллографические направления соответствовали ПФ {0001} и $\{10\bar{1}0\}$ для случая гексагональной симметрии, при которой координаты определяются с точностью до преобразования, отвечающего этой симметрии. Такой прием применяют для нахождения координат центра НР при восстановлении ФРО по ПФ для гексагонально симметричных материалов.

Для изображения проекций ориентировок на рассматриваемые кристаллографические направления $\mathbf{h}_1 = (0, 0)$ и $\mathbf{h}_2 = (\pi/2, 0)$, отвечающие ПФ {0001} и $\{10\bar{1}0\}$, использовали прямоугольную систему координат (рис. 2).

Проекции ориентировок получали с помощью уравнения

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{h},$$

где $\mathbf{h}$ — кристаллографическое направление и

$$\mathbf{y} = \{\eta, \chi\},$$

где $0 \le \eta \le 2\pi$, $0 \le \chi \le \pi/2$ — сферические координаты.

Из рис. 2 видно, что «размытие» ориентировок вследствие смещения центра присутствует. Тем не менее точку смещения ориентировок выделить можно. Это ключевой фактор в алгоритме восстановления параметров, который включает: вычисление проекции на $\mathbf{h}_1$ и восстановление по ней параметров φ_0, θ_0; вы-

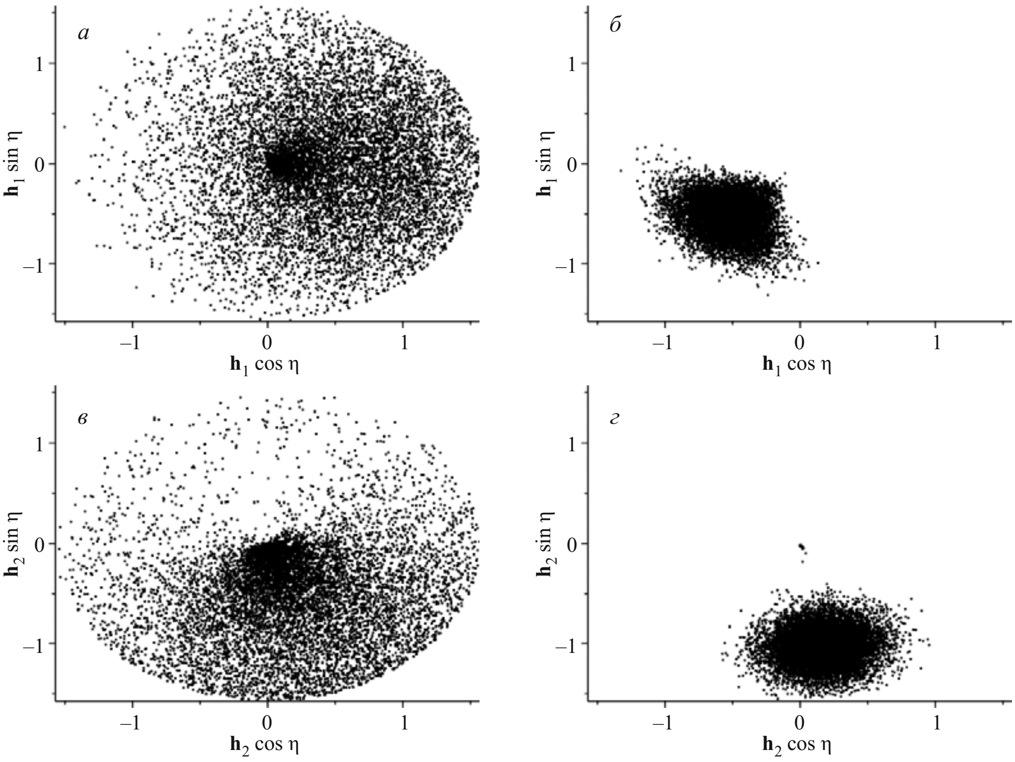

Рис. 2. Проекции ФРО на $\mathbf{h}_1$ ($а, б$) и $\mathbf{h}_2$ ($в, г$) для ЦНР: $а$, $в$ — $\varepsilon = 1/2$, $\mathbf{g}_0 = \{\pi/2, \pi/4, \pi\}$; $б$, $г$ — $\varepsilon = 1/8$, $\mathbf{g}_0 = \{-\pi/4, 3\pi/4, \pi/10\}$ (объем выборки $N = 10\,000$)

числение проекции на $\mathbf{h}_2$ и восстановление по ней параметра ψ_0; обратное смещение ориентировок в положение центра $\{0, 0, 0\}$ и восстановление параметра ε.

Пусть $\{\varphi, \theta, \psi\}$ — углы Эйлера, описывающие неизвестную ориентировку с ЦНР, полученную методом Монте-Карло. Тогда $\{\tilde\varphi, \tilde\theta, \tilde\psi\}$ — углы Эйлера ориентировки, повернутой относительно центра на некоторые углы $\{\varphi_0, \theta_0, \psi_0\}$. Имеем соотношение

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{h}_1 = \{\sin\tilde\varphi \sin\tilde\theta, -\cos\tilde\varphi \sin\tilde\theta, \cos\tilde\theta\}.$$

Обозначив полярный и азимутальный углы соответственно $\theta_{пф}$ и $\varphi_{пф}$, получаем

$$\theta_{пф} = \tilde\theta, \ \varphi_{пф} = \tilde\varphi - \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Рассмотрим ориентировки без смещения центра, для которых $\theta = 0$, а два других угла — произвольные. Согласно (4) такие ориентировки при проекции на $\mathbf{h}_1$ попадут в центр координат (радиус-вектор равен нулю). В случае смещения ($\theta \neq 0$) центр проекции отобразится в точку, которая определяется углами φ_0 и θ_0. Другими словами, достаточно определить центр проекции (или точку сгущения ориентировок), чтобы восстановить два параметра вращения.

Поскольку проекция ориентировок на $\mathbf{h}_1$ имеет форму круга (особенно для «острых» ориентировок), координаты центра можно получить средним арифметическим как по радиус-вектору, так и углу поворота. В тех случаях, когда проекция набора ориентировок размыта и не имеет формы круга, она все равно остается симметричной относительно центра, поэтому подход корректен. Таким образом, используя $\mathbf{h}_1$ и соответствующую проекцию, можно восстановить два первых искомых параметра.

В случае $\mathbf{h}_2$ вектор $\mathbf{y}$ примет вид

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos\tilde\varphi(2\cos\tilde\psi - \sin\tilde\psi) - \cos\tilde\theta \sin\tilde\varphi(2\sin\tilde\psi + \cos\tilde\psi)) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\sin\tilde\varphi(2\cos\tilde\psi - \sin\tilde\psi) + \cos\tilde\theta \cos\tilde\varphi(2\sin\tilde\psi + \cos\tilde\psi)) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\tilde\theta(2\sin\tilde\psi + \cos\tilde\psi) \end{bmatrix}.$$

Таблица 1. Восстановленные параметры распределения для некоторых значений параметров центра $\{\varphi_0, \theta_0, \psi_0\}$ и остроты ε (объем выборки $N = 10\,000$)

$\{\varphi_0, \theta_0, \psi_0\}$	ε		
	0,50	0,25	0,13
{0, 0, 0}	0,49 {0,006, 0,003, –0,204}	0,25 {0,029, 0,003, –0,024}	0,13 {0,048, 0,001, –0,046}
{1,571, 0,785, 3,142}	0,85 {0,995, 0,672, –2,257}	0,25 {1,522, 0,840, 3,102}	0,13 {1,571, 0,800, 3,131}
{–0,785, 2,356, 0,314}	0,74 {–0,577, 1,197, 0,409}	0,25 {–0,773, 2,201, 0,273}	0,14 {–0,785, 2,341, 0,330}

Таблица 2. Восстановленные параметры распределения для случая кластеров

Пример	Параметры	
	Исходные $\{N, A, \theta_0, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon\}$	Восстановленные $\{N, A, \theta_0, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon\}$
1	{20 000, 0,666, 0, 0, 0, 0,33} {10 000, 0,333, 2,356, 1,571, 0,785, 0,13}	{19 898, 0,663, 0,002, 0,004, –0,014, 0,33} {10 102, 0,337, 2,331, 1,571, 0,848, 0,13}
2	{20 000, 0,500, 0, 0, 0, 0,25} {10 000, 0,250, 2,356, 0,785, 3,142, 0,17} {10 000, 0,250, 2,356, –2,356, 0, 0,13}	{20 042, 0,501, 0,007, 0,020, –0,029, 0,25} {9952, 0,249, 2,326, 0,781, 2,797, 0,17} {10 006, 0,250, 2,334, –2,347, –0,204, 0,13}
3	{10 000, 0,333, 0,785, 3,142, –0,785, 0,20} {10 000, 0,333, 1,571, 0,785, –0,393, 0,14} {10 000, 0,333, 1,571, –0,785, –1,571, 0,11}	{10 000, 0,333, 0,828, 3,131, –0,851, 0,19} {10 000, 0,333, 1,572, 0,785, –0,391, 0,15} {10 000, 0,333, 1,571, –0,786, –1,534, 0,11}

При отсутствии смещения ориентировка (0, 0, 0) перейдет в точку проекции ($\pi/2$, arctg $1/2$) — точку сгущения ориентировок. И это подтверждено экспериментально. Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}}[\cos\varphi_0(2\cos\psi_0 - \sin\psi_0) - \cos\theta_0\sin\varphi_0(2\sin\psi_0 + \cos\psi_0)] = \sin\theta_{\text{пф}}\cos\varphi_{\text{пф}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}[\sin\varphi_0(2\cos\psi_0 - \sin\psi_0) + \cos\theta_0\cos\varphi_0(2\sin\psi_0 + \cos\psi_0)] = \sin\theta_{\text{пф}}\sin\varphi_{\text{пф}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta_0(2\sin\psi_0 + \cos\psi_0) = \cos\theta_{\text{пф}} \end{cases}.$$

Для нахождения полярных координат центра два из трех углов поворота известны. Взяв попарно уравнения из этой системы, получим выражения для $\cos\psi_0$ и $\sin\psi_0$, из которых определим третий угол:

$$\begin{cases} (2\cos\varphi_0 - \cos\theta_0\sin\varphi_0)\cos\psi_0 - (\cos\varphi_0 + 2\cos\theta_0\sin\varphi_0)\sin\psi_0 = \sqrt{5}\sin\theta_{\text{пф}}\cos\varphi_{\text{пф}} \\ (2\sin\varphi_0 + \cos\theta_0\cos\varphi_0)\cos\psi_0 - (\sin\varphi_0 - 2\cos\theta_0\cos\varphi_0)\sin\psi_0 = \sqrt{5}\sin\theta_{\text{пф}}\sin\varphi_{\text{пф}} \\ \sin\theta_0\cos\psi_0 + 2\sin\theta_0\sin\psi_0 = \sqrt{5}\cos\theta_{\text{пф}} \end{cases}.$$

При повороте каждой ориентировки в «обратную» сторону имеем:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0^{-1}\tilde{\mathbf{g}}.$$

Получаем набор ориентировок, соответствующая проекция на $\mathbf{h}_1$ имеет центр в точке (0, 0). Более того, имеется симметрия относительно угла вращения. Другими словами, данный вид проекции зависит только от одного из углов Эйлера — θ, так как рассматриваем ЦНР.

Учитывая ограничения

$$\theta \le \frac{\varepsilon\sqrt[4]{32}}{1 + 0{,}02(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2(\pi - \varepsilon)}, \quad \varepsilon \le 1, \tag{5}$$

ориентировки данной проекции можно аппроксимировать нормальным распределением с дисперсией ε^2 и математическим ожиданием 0 [3]:

$$P(\theta) \sim \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\varepsilon^2}\right).$$

Используя соотношение для нормальной случайной величины $N(a, \sigma)$ в R^1 [10]

$$P\{ns^2/z_\beta^+ < \sigma^2 < ns^2/z_\beta^-\} = \beta,$$

где $s^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ — оценка дисперсии, $\int_0^{z_\beta^+}\chi_n^2(x)dx = \dfrac{1 \pm \beta}{2}$, $a = M\xi$, $\sigma^2 = D\xi$, можно восстановить последний неизвестный параметр — остроту ε.

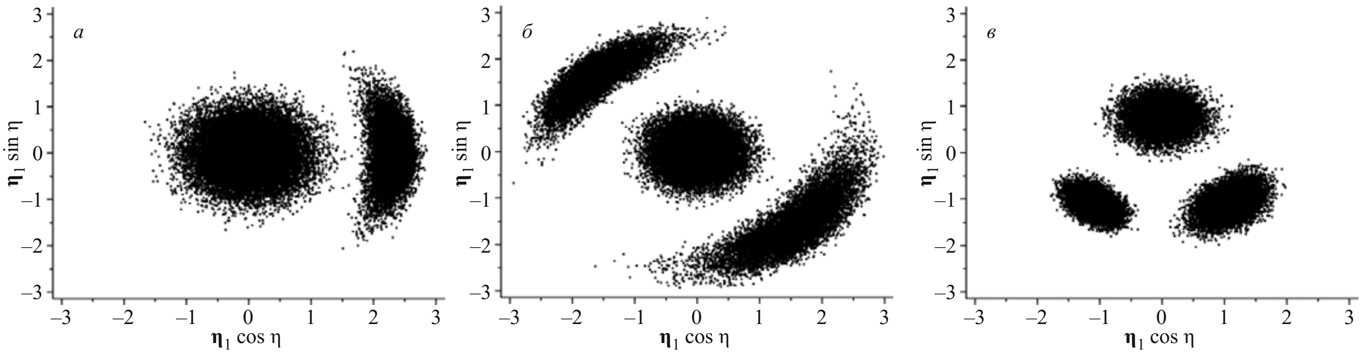

Рис. 3. Проекция ФРО на $\mathbf{h}_1$ для случая кластеров: *а* — пример 1; *б* — пример 2; *в* — пример 3 (см. табл. 2)

В табл. 1 приведены восстановленные параметры распределения для некоторых значений параметров центра и остроты.

Нетрудно убедиться, что в случае более «острых» текстур восстановление параметров происходит точнее. Это объясняется более выраженной локализованностью ориентировок вблизи центра.

Для набора ориентаций, у которых можно выделить несколько центров сгущения (кластеров), задача вполне может быть решена путем представления ФРО суперпозицией ЦНР с весовыми коэффициентами:

$$F(g) = \sum_{i=1}^{n} A_i f_i(g), \tag{6}$$

где n — количество выделенных кластеров в выборке; A_i — весовые коэффициенты.

Очевидно, проблема заключается в отделении ориентировок друг от друга и выделении их в отдельные кластеры. Примем следующее допущение: не будем рассматривать выборки, где один кластер находится в составе или касается другого.

Алгоритм для отделения ориентировок в этом случае следующий: получение для смоделированного набора ориентировок проекции на $\mathbf{h}_1 = (0, 0)$; определение местоположения максимумов (точек наибольшего сгущения ориентаций); группировка ориентировок по принципу ближайшего положения к найденным максимумам.

Так как начальный набор выборки известен, то весовые коэффициенты можно определить как отношение отобранного числа ориентировок в кластере к общему объему выборки:

$$A_i = N_i/N.$$

В табл. 2 приведены примеры восстановленных параметров распределений для случая кластеров, на рис. 3 — проекции ФРО на $\mathbf{h}_1$.

В случае гексагональной симметрии каждой смоделированной ориентировке будет соответствовать пять подобных, у которых угол ψ отличается на $\pi/3$:

$$\psi_i = \psi_0 + \frac{\pi}{3} i, \; i = \overline{0, 5}.$$

Так как при этом остальные параметры не меняются, то каждый кластер можно выделить вышеописанным способом.

На проекции ФРО на $\mathbf{h}_2$ симметрия влияет образованием шести групп ориентировок (напоминающих кластеры) за счет сдвига угла ψ. Пусть ψ_0 изменяется в интервале $(0, \pi/3)$ и сдвигается для каждой ориентировки, оставаясь в области определения. Тогда получаем следующий набор восстановленных значений:

$$\psi_0, \; \psi_0 + \pi/3, \; \psi_0 - \pi/3, \; \psi_0 + 2\pi/3, \; \psi_0 - 2\pi/3, \; \psi_0 - \pi.$$

Их сумма равна $6\psi_0 - \pi$. Разделив на шесть и прибавив $\pi/6$, получим ψ_0.

Таким образом, появляется возможность отделить группы друг от друга и восстановить параметры распределения для каждой из них. Стоит добавить, что рассматриваемый метод в случае рядом расположенных скоплений не позволит с достаточной точностью определить параметры распределения для «неострых» текстур. Результаты вычислений приведены в табл. 3.

Таким образом, в работе рассмотрено применение метода аппроксимации ФРО нормальными распределениями по набору отдельных ориентаций, измеренных EBSD-методами. Приведены алгоритмы и приме-

Таблица 3. Восстановленные параметры распределения при наличии гексагональной симметрии

$\{\varphi_0, \theta_0, \psi_0\}$	ε		
	0,20	0,14	0,11
{1,571, 0,785, 0,524}	0,17 {1,565, 0,826, 0,622}	0,12 {1,571, 0,807, 0,582}	0,11 {1,571, 0,798, 0,563}
{–0,785, 1,571, 0,262}	0,16 {–0,785, 1,600, 0,624}	0,13 {–0,780, 1,595, 0,155}	0,09 {–0,785, 1,583, 0,230}
{0, 1,047, 0,785}	0,19 {–0,047, 1,141, 0,455}	0,15 {0,003, 1,059, 0,536}	0,10 {0,001, 1,054, 0,681}

ры численного решения задачи при наличии отдельных кластеров из ориентировок.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bunge H. J.** Texture Analysis in Material Sciences. Mathematical Methods. — London: Butterworths Publ., 1982. P. 593.
2. **Иванова Т. М., Савёлова Т. И.** Методы восстановления функции распределения ориентаций по полюсным фигурам (обзор) / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т. 74. № 7. С. 25 – 33.
3. **Савёлова Т. И., Иванова Т. М., Сыпченко М. В.** Методы решения некорректных задач текстурного анализа и их приложения. — М.: НИЯУ МИФИ, 2012. — 268 с.
4. **Ivanova T. M., Savyolova T. I., Sypchenko M. V.** The Modified Component Method for Calculation of Orientation Distribution Function from Pole Figures / Inverse Problems in Science and Engineering. 2010. Vol. 18. P. 163 – 171.
5. **Schwartz A. I., Kumar M., Adams B. L., Field D. P.** Electron back-scatter diffraction in materials science. Second Edition. — New York: Springer, 2009. P. 406.
6. **Даниленко В. Н., Миронов С. Ю., Беляков А. Н., Жиляев А. П.** Применение EBSD анализа в физическом материаловедении (обзор) / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 2. С. 28 – 46.
7. **Guilmeau E., Henrist C., Suzuki T. S., Sakka Y., Chateigner D., Grossin D., Ouladiaf B.** Texture of Alumina by neutron diffraction and SEM — EBSD / Textures of Materials. ICOTOM. 2005. Vol. 14. P. 179 – 184.
8. **Сыпченко М. В., Савелова Т. И.** Некоторые проблемы измерения ориентаций отдельных зерен и вычисление усредненных упругих свойств магния / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2010. Т. 76. № 6. С. 39 – 44.
9. **Боровков М. В., Савелова Т. И.** Вычисление нормальных распределений на группе вращений методом Монте-Карло / Вычислительная математика и математическая физика. 2002. Т. 42. № 1. С. 112 – 128.
10. **Айвазян С. А., Мхитарян В. С.** Теория вероятностей и прикладная статистика. Т. 1. — М.: ЮНИТИ, 2001. — 656 с.

REFERENCES

1. **Bunge H. J.** Texture Analysis in Material Sciences. Mathematical Methods. — London: Butterworths Publ., 1982. P. 593.
2. **Ivanova T. M., Savelova T. I.** Metody vosstanovleniya funktsii raspredeleniya orientatsii po polyusnym figuram (obzor) [Methods for recovery of the function of orientation distribution using pole figures (review)] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2008. Vol. 74. N 7. P. 25 – 33 [in Russian].
3. **Savelova T. I., Ivanova T. M., Sypchenko M. V.** Metody resheniya nekorrektnykh zadach teksturnogo analiza i ikh prilozheniya [Methods for solving ill-posed problems of texture analysis and their applications]. — Moscow: NRNU MEPHI, 2012. — 268 p.
4. **Ivanova T. M., Savyolova T. I., Sypchenko M. V.** The Modified Component Method for Calculation of Orientation Distribution Function from Pole Figures / Inverse Problems in Science and Engineering. 2010. Vol. 18. P. 163 – 171.
5. **Schwartz A. I., Kumar M., Adams B. L., Field D. P.** Electron backscatter diffraction in materials science. Second Edition. — New York: Springer, 2009. P. 406.
6. **Danilenko V. N., Mironov S. Yu., Belyakov A. N., Zhilyaev A. P.** Primenenie EBSD analiza v fizicheskom materialovedenii (obzor) [Application of EBSD analysis of material physics (review)] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2012. Vol. 78. N 2. P. 28 – 46 [in Russian].
7. **Guilmeau E., Henrist C., Suzuki T. S., Sakka Y., Chateigner D., Grossin D., Ouladiaf B.** Texture of Alumina by neutron diffraction and SEM — EBSD / Textures of Materials. ICOTOM. 2005. Vol. 14. P. 179 – 184.
8. **Sypchenko M. V., Savelova T. I.** Nekotorye problemy izmereniya orientatsii otdel'nykh zeren i vychislenie usrednennykh uprugikh svoistv magniya [Some problems of measuring the orientations of individual grains and calculation of the averaged elastic properties of magnesium] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2010. Vol. 76. N 6. P. 39 – 44 [in Russian].
9. **Borovkov M. V., Savelova T. I.** Vychislenie normal'nykh raspredelenii na gruppe vrashchenii metodom Monte-Karlo [The calculation of normal distributions on the rotation group by Monte Carlo method] / Vychisl. Matem. Matem. Fiz. 2002. Vol. 42. N 1. P. 112 – 128 [in Russian].
10. **Aivazyan S. A., Mkhitaryan V. S.** Teoriya veroyatnostei i prikladnaya statistika [Probability theory and applied statistics]. Vol. 1. — Moscow: UNITI, 2001. — 656 p. [in Russian].