Математические методы исследования

Начинаем дискуссию о современном состоянии и перспективах развития статистического моделирования, т.е. теории и практики применения метода статистических испытаний (Монте-Карло), различных вариантов имитационного моделирования. Предлагаем обсудить математические методы исследования, использующие датчики псевдослучайных чисел. В нашем журнале дискуссия о свойствах таких датчиков была проведена в 1985 – 1993 гг. Ниже публикуем статьи Ю. Д. Григорьева и А. И. Орлова, открывающие дискуссию на заданную тему. Предлагаем специалистам, развивающим и/или применяющим метод статистических испытаний (Монте-Карло), рассказать о своем опыте работы, возникших проблемах и полученных научных результатах.

УДК 519.2

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

© **А. И. Орлов**[1]

Статья поступила 10 ноября 2015 г.

Цель математической статистики — разработка методов анализа данных, предназначенных для решения конкретных прикладных задач. С течением времени подходы к разработке таких методов менялись. Сто лет назад принимали, что распределения данных имеют определенный вид, например, являются нормальными, и исходя из этого предположения развивали статистическую теорию. На следующем этапе на первое место в теоретических исследованиях выдвинулись предельные теоремы. Под «малой выборкой» понимают такую выборку, для которой нельзя применять выводы, основанные на предельных теоремах. В каждой конкретной статистической задаче возникает необходимость разделить конечные объемы выборки на два класса: для одного можно применять предельные теоремы, а для другого делать этого нельзя из-за риска получения неверных выводов. Для решения данной задачи часто используют метод Монте-Карло (статистических испытаний). Более сложные проблемы возникают при изучении влияния на свойства статистических процедур анализа данных тех или иных отклонений от исходных предположений. Такое влияние также часто изучают, используя метод Монте-Карло. Основная и не решенная в общем виде проблема при изучении устойчивости выводов при наличии отклонений от параметрических семейств распределений состоит в том, какие распределения использовать для моделирования. Рассмотрены некоторые примеры применения метода Монте-Карло, относящиеся к деятельности нашего научного коллектива. Сформулированы основные нерешенные проблемы.

Ключевые слова: математическая статистика; прикладная статистика; анализ данных; предельные теоремы; метод Монте-Карло; малая выборка; устойчивость выводов; нерешенные проблемы.

Цель математической статистики — разработка методов анализа данных, предназначенных для решения конкретных прикладных задач. Под данными имеются в виду результаты измерений, наблюдений, испытаний, анализов, опытов, обследований.

С течением времени подходы к разработке методов анализа данных менялись. Сто лет назад принимали, что распределения данных имеют определенный вид, например, являются нормальными, и исходя из этого предположения развивали статистическую теорию. В наследство от этого периода нам остался, например, критерий Стьюдента. Од подходов этого периода отказались, поскольку стало ясно, что распределения реальных данных не укладываются в «прокрустово ложе» четырехпараметрического семейства Пирсона и тем более его подсемейств (включающих нормальные распределения, распределения Вейбулла – Гнеденко, гамма-распределения и др.).

На следующем этапе на первое место в теоретических исследованиях выдвинулись предельные тео-

[1] Институт высоких статистических технологий и эконометрики Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия; Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный, Московская обл., Россия; Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, г. Королёв, Московская область, Россия; e-mail: prof-orlov@mail.ru

ремы. Лидеры этого направления И. А. Ибрагимов и Р. З. Хасьминский писали в 1979 г.: «Как и вся математическая статистика, теория оценивания возникла из некоторых практических задач. Для многих из них типична неасимптотическая постановка проблемы, когда требуется построить наилучшие для данной схемы при данном объеме статистического материала оценки. Однако хотя решение неасимптотических задач оценивания весьма важно само по себе, оно, как правило, не может являться объектом достаточно общей математической теории. Более того, соответствующее решение часто сильно зависит от конкретного типа распределения, объема выборки и т.д. Так, теория малых выборок из нормального закона будет отличаться от теории малых выборок из закона Пуассона. По словам Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1], «познавательная ценность теории вероятностей раскрывается только предельными теоремами», и «теория статистического оценивания не составляет исключения» [2].

Под «малой выборкой» понимают такую выборку, для которой нельзя применять выводы, основанные на предельных теоремах. В каждой конкретной задаче возникает необходимость разделить конечные объемы выборки на два класса: для одного можно применять предельные теоремы, для другого делать этого нельзя из-за риска получения неверных выводов.

Предельные теоремы и распределения при конечных объемах выборок

К сожалению, предельными теоремами нельзя непосредственно пользоваться при статистическом анализе конкретных данных. Приходится предполагать, что предельные теоремы позволяют делать статистические выводы «с достаточной для практики точностью». Подобные предположения обосновывают с помощью того или иного метода прикладной математики.

Схема исследования такова. Сначала с помощью предельных теорем получают расчетные формулы, затем изучают их точность. Например, согласно работам С. Н. Бернштейна и В. Феллера для применения нормального закона в теореме Муавра – Лапласа достаточно объема выборки 100 (т.е. при объеме выборки 100 и более допредельное распределение нормированной центрированной биномиально распределенной случайной величины с достаточной для практики точностью совпадает с предельным нормальным). Второй пример: согласно расчетам магистранта МФТИ К. Виноградова использование полученной нами формулы (для синтеза плана статистического контроля на основе ограничения на предел среднего выходного уровня дефектности) обосновано для объема выборки $n > 10$. Третий пример: биномиальное приближение для гипергеометрического распределения можно использовать, когда объем генеральной совокупности N по крайней мере в 10 раз больше объема выборки n, т.е. при $N > 10n$.

Принципиально важной является работа по созданию таблиц критических точек двухвыборочного критерия Смирнова [3]. В ней таблицы точных распределений доведены до тех границ, за которыми можно пользоваться расчетными формулами, вытекающими из предельных распределений.

В прикладной статистике и других математических методах исследования получено много рекомендаций, следующих из предельных теорем, для которых точность этих рекомендаций еще не исследована достаточно подробно. При просмотре современных учебников [4 – 7], соответствующих новой парадигме математических методов исследования [8 – 9], становится очевидным, что подобные рекомендации составляют их основное содержание.

Констатируем, что к классическим инструментам прикладной статистики — предельным теоремам теории вероятностей — добавились новые, основанные на интенсивном использовании компьютеров. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) — вот партнер и конкурент асимптотическим методам математической статистики. Термин «метод Монте-Карло» объединяет обширную совокупность интеллектуальных инструментов. Например, бутстреп [10] — лишь один из таких инструментов.

Отклонения от параметрических семейств распределений

Более сложные проблемы возникают при изучении влияния на свойства статистических процедур анализа данных тех или иных отклонений от исходных предположений. Для изучения такого влияния часто используют метод Монте-Карло.

Как известно, математическая статистика как наука была сформирована в начале XX в. [4, 11]. Ее создатели исходили из предположения о том, что распределения статистических данных входят в те или иные параметрические семейства размерности 1, 2, 3, 4. В большинстве случаев принималось (без обоснования) нормальное распределение. Исходя из этого предположения, были получены распределения Стьюдента, Фишера, хи-квадрат и др. Однако хорошо известно, что практически все распределения реальных статистических данных не являются нормальными [12].

Следовательно, имеется необходимость изучения свойств расчетных методов классической математической статистики, опирающихся на предположение нормальности, в ситуациях, когда это предположение не выполнено. Аппаратом для такого изучения наряду с методом Монте-Карло могут послужить предельные теоремы теории вероятностей, прежде всего центральная предельная теорема (ЦПТ), поскольку интересующие нас расчетные методы обычно используют разнообразные суммы. Пока подобное изучение не проведено, остается неясной научная ценность, например, применения основанного на предположении многомерной нормальности факторного анализа к векторам из переменных, принимающих небольшое число градаций и к тому же измеренных в порядковой шкале.

Одна из важных проблем — использование асимптотических результатов при конечных объемах выборок. Конечно, естественно изучить свойства алгоритма с помощью метода Монте-Карло. Однако из какого конкретного распределения, отличного от базового (например, стандартного нормального), брать выборки при моделировании? От выбора распределения зависит результат. Кроме того, датчики псевдослучайных чисел лишь имитируют случайность. До сих пор неизвестно, каким датчиком целесообразно пользоваться в случае возможного безграничного роста размерности пространства [13].

Обманчивым является часто возникающее у некоторых авторов впечатление о простоте получения окончательных выводов путем примитивного применения метода Монте-Карло. Проще говоря, помоделировали, сформулировали выводы, написали статью. В результате, разработав примитивный программный продукт из двух основных блоков (получение псевдослучайных чисел и процедуры статистического анализа), создают конвейер по изготовлению однотипных статей рассматриваемого типа. Причем часто даже не указывают точность полученных выводов. Если с помощью n статистических испытаний оценивают вероятность p, то в предположении, что псевдослучайные числа можно рассматривать как независимые одинаково распределенные случайные величины, выборочная доля p^* имеет биномиальное распределение, деленное на n, а потому в соответствии с теоремой Муавра – Лапласа полуширина доверительного интервала, соответствующего доверительной вероятности 0,95, равна

$$1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}. \qquad (1)$$

Если $p = 0{,}5$ (или близко к этому числу), то согласно (1) точность метода Монте-Карло оценивается как

$$\frac{0{,}89}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad (2)$$

Следовательно, согласно (2) для оценивания со сравнительно малой точностью 0,001 необходимо провести не менее 1 000 000 статистических испытаний. Многие авторы ограничиваются меньшим числом испытаний.

Основная и не решенная в общем виде проблема, возникающая при изучении устойчивости выводов при наличии отклонений от параметрических семейств распределений, состоит в том, какие распределения использовать для моделирования. Так, при анализе влияний отклонений от нормальности следует изучать не логистическое распределение, от которого расстояние Колмогорова до многообразия нормальных распределений не более 0,01 (см. [4]), а распределение Коши, у которого нет даже математического ожидания. Кроме тех или иных теоретически заданных распределений, целесообразно использовать эмпирические распределения данных из интересующей исследователя прикладной области. Однако ясно, что возможных отклонений от изучаемого параметрического семейства распределений бесконечно много, перебрать их все, очевидно, невозможно, а потому выводы, полученные с помощью метода Монте-Карло, всегда являются не строго доказанными, а лишь правдоподобными.

Итак, при изучении влияния отклонений распределений элементов выборки от параметрических семейств распределений следует установить, какие распределения моделировать с целью оценки величины влияния. Речь идет как о теоретических распределениях (логистических, Коши и др.), так и об эмпирических, полученных при предыдущих исследованиях.

Некоторые примеры применения метода Монте-Карло

При обсуждении нацеленного на практические применения математического метода исследования естественно опираться на результаты его использования. Поэтому перечислим некоторые примеры применения метода Монте-Карло из опыта работы нашего научного коллектива [29].

На использовании метода Монте-Карло основано исследование [14], посвященное изучению и сравнению свойств различных критериев однородности двух независимых выборок, а именно, реальных и номинальных уровней значимости. В статье [14] продемонстрирована необходимость учета отличия, вызванного дискретностью распределения непараметрического критерия, реального уровня значимости статистического критерия от номинального (заданного).

Если возможные подмножества признаков образуют расширяющееся семейство, например, оценивается степень полинома, то естественно ввести термин «размерность модели» (используется также в многомерном шкалировании). Выполнен ряд работ по оцениванию размерности модели. Первая из них подготовлена нами во Франции в 1976 г. [15]. В ней изучена одна оценка размерности модели в регрессии, например степени полинома, в предположении, что зависимость описывается полиномом. Эта оценка была известна в литературе, но позже ее стали ошибочно приписывать А. И. Орлову, в то время как в [15] лишь изучены ее свойства, в частности, установлено, что эта оценка не является состоятельной, и найдено ее предельное геометрическое распределение. Другие, уже состоятельные оценки размерности регрессионной модели предложены в статье [16]. Этот цикл завершила содержащая ряд уточнений работа [17]. Крайняя публикация на эту тему включает в себя обсуждение результатов изучения скорости сходимости в ранее полученных предельных теоремах методом Монте-Карло [18].

Аналогичные по методологии оценки размерности модели в задаче расщепления смесей (часть теории классификации) рассмотрены в статье [19], оценки размерности модели в многомерном шкалировании — в работах [20 – 22]. В последних публикациях установлено предельное поведение характеристик метода главных компонент (с помощью асимптотической теории поведения решений экстремальных статистических задач).

Упомянем также изучение методом Монте-Карло скорости сходимости к пределу характеристик влияния помех, создаваемых электровозами, на проводные линии связи [23, 24].

Основные нерешенные проблемы

Первая дискуссия по датчикам псевдослучайных чисел (т.е. по методу Монте-Карло) была проведена в журнале «Заводская лаборатория» в 1985 – 1993 гг. (см. № 5, 1985 г.; № 1, 1986; № 10, 1987; № 3, 1990; № 7, 1993 г.). Итоги были подведены в статье [25] и комментарии к ней [13].

За прошедшие 22 года возможности и доступность компьютерной техники резко выросли, в результате широки массы исследователей получили возможность использовать метод Монте-Карло в своих работах. Однако адекватного роста в методологическом обосновании и теоретическом обеспечении этого метода не последовало. Напротив, произошло падение научного уровня ряда публикаций в этой области. Необходимо провести новую дискуссию по методу Монте-Карло, на этот раз обратив внимание не столько на свойства датчиков псевдослучайных чисел, сколько на соотношение этого метода с предельными теоремами математической статистики.

Целесообразно разделить идеальный и реальный методы Монте-Карло.

В *идеальном методе Монте-Карло* предполагаем возможность моделирования последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с заданным распределением. Как показано выше, такие последовательности могут быть использованы для решения ряда актуальных задач.

В *реальном методе Монте-Карло* необходимо учитывать, что датчики псевдослучайных чисел лишь имитируют последовательности случайных чисел. Поэтому, строго говоря, их нельзя назвать датчиками случайных чисел. Согласно второму (алгоритмическому) подходу А. Н. Колмогорова к определению понятия случайности, сложность идеального датчика должна расти вместе с длиной последовательности, в то время как реально используемые датчики алгоритмически ограничены (описываются несложными алгоритмами конечной длины). Для обоснования возможности использования датчиков псевдослучайных чисел используют результаты теории чисел, как это показано С. М. Ермаковым [25]. Однако обоснование удалось найти лишь для псевдослучайных векторов заранее фиксированной размерности. Между тем часто возникает необходимость проводить испытания вплоть до осуществления некоторого события, например, до отказа технического устройства (в математической модели это может означать достижение случайным процессом некоторой границы). В прикладной статистике зачастую нужно определить момент, когда допустимо пользоваться предельным распределением. Это — задача того же типа: ищется момент, когда погрешность меньше заданной величины. В подобных задачах размерность пространства, в котором лежат рассматриваемые объекты, не фиксирована заранее.

Неизвестность для задач с ростом размерности пространства выявлена давно. Еще в 1986 г. в докладе на Первом Всемирном конгрессе Общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли председатель Оргкомитета академик АН СССР Ю. В. Прохоров обратил внимание на то, что нет строгого обоснования возможности применения метода Монте-Карло в задачах с ростом размерности пространства [26].

Более простым и одновременно более практичным кажется вопрос о выборе конкретного датчика псевдослучайных чисел для использования в своей работе. Изучающие этот вопрос Ю. Н. Тюрин и В. Э. Фигурнов пришли к следующим выводам [27].

1. Ходовые методы проверки датчиков псевдослучайных чисел не обеспечивают их полную проверку. Так, забракованные [27] датчики URAND, G19BNU, датчики Аренса – Дитера – Грубе успешно проходят проверки этими методами.

2. Несмотря на сравнительно небольшое число проверенных датчиков можно сделать вывод о преимуществе тех, которые основаны на М-алгоритме. При эффективной программной реализации увеличение времени счета в практических задачах при переходе к использованию таких датчиков не превышает нескольких процентов.

3. Отмечены случаи, когда различные датчики забраковывались при одинаковых параметрах проверки, показывая при этом практически одни и те же результаты. Таким образом, различные датчики могут иметь общие недостатки. Это подтверждает ошибочность распространенного мнения, что совпадение результатов расчетов при использовании различных датчиков доказывает правильность этих результатов.

Можем ли мы сейчас, через 25 лет после появления статьи [27] (и других по рассматриваемому вопросу, например, [28]), говорить о преимуществе датчиков, основанных на М-алгоритме? Или же появились более эффективные датчики псевдослучайных чисел?

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.** Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. — 264 с.
2. **Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.** Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979. — 528 с.
3. **Орлов А. И., Миронова Н. Г., Фомин В. Н., Черномордик О. М.** Методика. Проверка однородности двух выборок параметров продукции при оценке ее технического уровня и качества. — М.: ВНИИСтандартизации, 1987. — 116 с.
4. **Орлов А. И.** Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.
5. **Орлов А. И.** Организационно-экономическое моделирование: учебник. В 3 ч. Ч. 1. Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. — 541 с.
6. **Орлов А. И.** Организационно-экономическое моделирование: учебник. В 3 ч. Ч. 2. Экспертные оценки. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011 — 486 с.
7. **Орлов А. И.** Организационно-экономическое моделирование: учебник. В 3 ч. Ч. 3. Статистические методы анализа данных. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. — 624 с.
8. **Орлов А. И.** Новая парадигма прикладной статистики / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 1. Ч. I. С. 87 – 93.
9. **Орлов А. И.** Новая парадигма математических методов исследования / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81. № 7. С. 5.
10. **Орлов А. И.** О реальных возможностях бутстрепа как статистического метода / Заводская лаборатория. 1987. Т. 53. № 10. С. 82 – 85.
11. **Орлов А. И.** Основные этапы становления статистических методов / Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2014. № 97. С. 73 – 85.
12. **Орлов А. И.** Часто ли распределение результатов наблюдений является нормальным? / Заводская лаборатория. 1991. Т. 57. № 7. С. 64 – 66.
13. **Орлов А. И.** Комментарий к статье С. М. Ермакова «О датчиках случайных чисел» / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1993. Т. 59. № 7. С. 51.
14. **Камень Ю. Э., Камень Я. Э., Орлов А. И.** Реальные и номинальные уровни значимости в задачах проверки статистических гипотез / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1986. Т. 52. № 12. С. 55 – 57.
15. **Орлов А. И.** Предельное распределение одной оценки числа базисных функций в регрессии / Прикладной многомерный статистический анализ: ученые записки по статистике. Т. 33. — М.: Наука, 1978. С. 380 – 381.
16. **Орлов А. И.** Оценка размерности модели в регрессии / Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа: ученые записки по статистике. Т. 36. — М.: Наука, 1980. С. 92 – 99.
17. **Орлов А. И.** Асимптотика некоторых оценок размерности модели в регрессии / Прикладная статистика. Ученые записки по статистике. Т. 45. — М.: Наука, 1983. С. 260 – 265.
18. **Орлов А. И.** Об оценивании регрессионного полинома / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1994. Т. 60. № 5. С. 43 – 47.
19. **Орлов А. И.** Некоторые вероятностные вопросы теории классификации / Прикладная статистика. Ученые записки по статистике. Т. 45. — М.: Наука, 1983. С. 166 – 179.
20. **Орлов А. И.** Общий взгляд на статистику объектов нечисловой природы / Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. — М.: Наука, 1985. С. 58 – 92.
21. **Orlov A. I.** On the Development of the Statistics of Nonnumerical Objects / Design of Experiments and Data Analysis: New Trends and Results. — M.: ANTAL, 1993. P. 52 – 90.
22. **Орлов А. И.** Методы снижения размерности / Приложение 1 к книге Ю. Н. Толстова «Основы многомерного шкалирования: учебное пособие для вузов». — М.: Издательство КДУ, 2006. — 160 с.
23. **Карякин Р. Н., Орлов А. И., Адамов С. Ю.** Вероятностная теория высших гармоник помех, создаваемых электровозами / Прикладной многомерный статистический анализ: ученые записки по статистике. Т. 33. — М.: Наука, 1978. С. 376 – 380.
24. **Орлов А. И.** Вероятностно-статистическое моделирование помех, создаваемых электровозами / Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. № 106. С. 225 – 238.
25. **Ермаков С. М.** О датчиках случайных чисел / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1993. Т. 59. № 7. С. 48 – 50.
26. **Орлов А. И.** Первый Всемирный конгресс Общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли / Заводская лаборатория. 1987. Т. 53. № 3. С. 90 – 91.
27. **Тюрин Ю. Н., Фигурнов В. Э.** О проверке датчиков случайных чисел / Теория вероятностей и ее применения. 1990. Т. 35. Вып. 1. С. 156 – 161. URL: http://www.mathnet.ru/links/638b9757785d119ec90539d95ebf3cb7/tvp919.pdf (дата обращения 04.11.2015).
28. **Орлов А. И.** Комментарий II к статье В. Г. Алексеева «Об одном методе проверки датчика псевдослучайных чисел» / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1990. Т. 56. № 3. С. 86 – 87.
29. **Орлов А. И.** Научная школа кафедры «Экономика и организация производства» в области эконометрики / Четвертые Чарновские Чтения: сборник трудов / Материалы IV Международной научной конференции по организации производства. Москва, 5 – 6 декабря 2014 г. — М.: НП «Объединение контроллеров», 2014. С. 326 – 337. URL: https://yadi.sk/i/7xrB6x37eyPp3 (дата обращения 04.11.2015).

REFERENCES

1. **Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N.** Predel'nye raspredeleniya dlya summ nezavisimykh sluchainykh velichin [Limit distributions for sums of independent random variables]. — Moscow – Leningrad: GITTL, 1949. — 264 p. [in Russian].
2. **Ibragimov I. A., Khas'minskii R. Z.** Asimptoticheskaya teoriya otsenivaniya [Asymptotic estimation theory]. — Moscow: Nauka, 1979. — 528 p. [in Russian].
3. **Orlov A. I., Mironova N. G., Fomin V. N., Chernomordik O. M.** Metodika. Proverka odnorodnosti dvukh vyborok parametrov produktsii pri otsenke ee tekhnicheskogo urovnya i kachestva [Methods. Testing the homogeneity of two samples of product parameters in the estimation of its technical level and quality]. — Moscow: Izd. VNIIStandartizatsii, 1987. — 116 p. [in Russian].
4. **Orlov A. I.** Prikladnaya statistika [Applied Statistics]. — Moscow: Ékzamen, 2006. — 671 p. [in Russian].
5. **Orlov A. I.** Organizatsionno-ékonomicheskoe modelirovanie: uchebnik [Organizational-economic modeling: the textbook]. In 3 parts. Part 1. Nechislovaya statistika [Non-numeric statistics]. — Moscow: Izd. MGTU im. N. É. Baumana, 2009. — 541 p. [in Russian].
6. **Orlov A. I.** Organizatsionno-ékonomicheskoe modelirovanie: uchebnik [Organizational-economic modeling: the textbook]. In 3 parts. Part 2. Ékspertnye otsenki [Expert estimation]. — Moscow: Izd. MGTU im. N. É. Baumana, 2011. — 486 p. [in Russian].
7. **Orlov A. I.** Organizatsionno-ékonomicheskoe modelirovanie: uchebnik [Organizational-economic modeling: the textbook]. In 3 parts. Part 3. Statisticheskie metody analiza dannykh [Statistical methods of data analysis]. — Moscow: Izd. MGTU im. N. É. Baumana, 2012. — 624 p. [in Russian].
8. **Orlov A. I.** Novaya paradigma prikladnoi statistiki [The new paradigm of applied statistics] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2012. Vol. 78. N 1. Part I. P. 87 – 93 [in Russian].
9. **Orlov A. I.** Novaya paradigma matematicheskikh metodov issledovaniya [The new paradigm of mathematical methods of research] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2015. Vol. 81. N 7. P. 5 [in Russian].
10. **Orlov A. I.** O real'nykh vozmozhnostyakh but-strepa kak statisticheskogo metoda [The real possibility of bootstrap as statistical method] / Zavod. Lab. 1987. Vol. 53. N 10. P. 82 – 85 [in Russian].
11. **Orlov A. I.** Osnovnye étapy stanovleniya statisticheskikh metodov [Main stages of development of statistical methods] / Politem. Setev. Élektron. Nauch. Zh. Kuban. Gos. Agrar. Univ. 2014. N 97. P. 73 – 85 [in Russian].
12. **Orlov A. I.** Chasto li raspredelenie rezul'tatov nablyudenii yavlyaet-sya normal'nym? [How often the distribution of the results of observations is normal?] / Zavod. Lab. 1991. Vol. 57. N 7. P. 64 – 66 [in Russian].
13. **Orlov A. I.** Kommentarii k stat'e S. M. Ermakova «O datchikakh sluchainykh chisel» [Commentary on S. M. Ermakov's paper "On the random number generators"] / Zavod. Lab. 1993. Vol. 59. N 7. P. 51 [in Russian].
14. **Kamen' Yu. É., Kamen' Ya. É., Orlov A. I.** Real'nye i nominal'nye urovni znachimosti v zadachakh proverki statisticheskikh gipotez [Real and nominal significance levels in statistical hypothesis testing problems] / Zavod. Lab. 1986. Vol. 52. N 12. P. 55 – 57 [in Russian].
15. **Orlov A. I.** Predel'noe raspredelenie odnoi otsenki chisla bazisnykh funktsii v regressii [The limit distribution of a single estimator of the number of basis functions in the regression] / Prikladnoi mnogomernyi

statisticheskii analiz: uchenye zapiski po statistike [Applied multivariate statistical analysis. Scientific notes on statistics]. Vol. 33. — Moscow: Nauka, 1978. P. 380 – 381 [in Russian].

16. **Orlov A. I.** Otsenka razmernosti modeli v regressii [Estimation of the dimension in the regression model] / Algoritmicheskoe i programmnoe obespechenie prikladnogo statisticheskogo analiza: uchenye zapiski po statistike [Algorithmic and the software application of statistical analysis. Scientific notes on statistics]. Vol. 36. — Moscow: Nauka, 1980. P. 92 – 99 [in Russian].
17. **Orlov A. I.** Asimptotika nekotorykh otsenok razmernosti modeli v regressii [The asymptotic behavior of some estimators of model dimension in the regression] / Prikladnaya statistika. Uchenye zapiski po statistike [Applied statistics. Scientific notes on statistics]. Vol. 45. — Moscow: Nauka, 1983. P. 260 – 265 [in Russian].
18. **Orlov A. I.** Ob otsenivanii regressionnogo polinoma [On the estimation of regression polynomial] / Zavod. Lab. 1994. Vol. 60. N 5. P. 43 – 47 [in Russian].
19. **Orlov A. I.** Nekotorye veroyatnostnye voprosy teorii klassifikatsii [Some questions of the probability theory of classification] / Prikladnaya statistika. Uchenye zapiski po statistike [Applied statistics. Scientific notes on statistics]. Vol. 45. — Moscow: Nauka, 1983. P. 166 – 179 [in Russian].
20. **Orlov A. I.** Obshchii vzglyad na statistiku ob’’ektov nechislovoi prirody [General view on the Statistics of the objects of non-numeric nature] / Analiz nechislovoi informatsii v sotsiologicheskikh issledovaniyakh [An analysis of non-numerical information in sociological research]. — Moscow: Nauka, 1985. P. 58 – 92 [in Russian].
21. **Orlov A. I.** On the Development of the Statistics of Nonnumerical Objects / Design of Experiments and Data Analysis: New Trends and Results. — M.: ANTAL, 1993. P. 52 – 90.
22. **Orlov A. I.** Metody snizheniya razmernosti [Methods to reduce the dimensionality] / Prilozhenie 1 k knige Yu. N. Tolstova “Osnovy mnogomernogo shkalirovaniya: uchebnoe posobie dlya vuzov” [Appendix 1 to the Book of N. Tolstov “Basics of multidimensional scaling: a textbook for high schools”]. — Moscow: Izd. KDU, 2006. — 160 p. [in Russian].
23. **Karyakin R. N., Orlov A. I., Adamov S. Yu.** Veroyatnostnaya teoriya vysshikh garmonik pomekh, sozdavaemykh élektrovozami [Probability theory of higher harmonic interference from electric locomotives] / Prikladnoi mnogomernyi statisticheskii analiz: uchenye zapiski po statistike [Applied multivariate statistical analysis. Scientific notes on statistics]. Vol. 33. — Moscow: Nauka, 1978. P. 376 – 380 [in Russian].
24. **Orlov A. I.** Veroyatnostno-statisticheskoe modelirovanie pomekh, sozdavaemykh élektrovozami [Probabilistic and statistical modeling of interference from electric locomotives] / Politem. Setev. Élektron. Nauch. Zh. Kuban. Gos. Agrar. Univ. 2015. 106. P. 225 – 238 [in Russian].
25. **Ermakov S. M.** O datchikakh sluchainykh chisel [About the random numbers] / Zavod. Lab. 1993. Vol. 59. N 7. P. 48 – 50 [in Russian].
26. **Orlov A. I.** Pervyi Vsemirnyi kongress Obshchestva matematicheskoi statistiki i teorii veroyatnostei im. Bernulli [The first World Congress of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability] / Zavod. Lab. 1987. Vol. 53. N 3. P. 90 – 91 [in Russian].
27. **Tyurin Yu. N., Figurnov V. É.** O proverke datchikov sluchainykh chisel [On testing random numbers] / Teor. Veroyatn. Primen. 1990. Vol. 35. Issue 1. P. 156 – 161. URL: http://www.mathnet.ru/links/638b9757785d119ec90539d95ebf3cb7/tvp919.pdf (accessed 04.11.2015) [in Russian].
28. **Orlov A. I.** Kommentarii II k stat’e V. G. Alekseeva «Ob odnom metode proverki datchika psevdosluchainykh chisel» [Comment II to Article of V. Alekseev “A method of testing pseudorandom numbers”] / Zavod. Lab. 1990. Vol. 56. N 3. P. 86 – 87 [in Russian].
29. **Orlov A. I.** Nauchnaya shkola kafedry «Ékonomika i organizatsiya proizvodstva» v oblasti ékonometriki [The scientific school of the department “Economics and organization of production” in the field of econometrics] / Fourth Charnov Readings. Proc. / Proc. IV Int. Sci. Conf. on the Organization of Production. Moscow, December 5 – 6, 2014. — Moscow: Izd. NP “Ob’’edinenie kontrollerov”, 2014. P. 326 – 337. URL: https://yadi.sk/i/7xrB6x37eyPp3 (accessed 04.11.2015) [in Russian].

УДК 519.21

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО: ВОПРОСЫ ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И КАЧЕСТВА ГЕНЕРАТОРОВ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

© **Ю. Д. Григорьев**[1]

Статья поступила 11 ноября 2015 г.

Рассмотрены задачи повышения эффективности вычислений методом Монте-Карло. Отмечено, что ключевую роль в их решении играют вопросы выбора объема статистических испытаний (моделируемых случайных чисел), а также качества соответствующих датчиков случайных чисел. Обсуждены проблемы реализации алгоритмов методов Монте-Карло, обусловленные требованиями повышения скорости сходимости асимптотических решений к истинным решениям.

Ключевые слова: метод Монте-Карло; эффективность и трудность вычислений; предельные теоремы; датчики базовых случайных чисел.

Метод Монте-Карло (другие названия — метод статистических испытаний, статистическое моделирование) применяется в различных научных дисциплинах в тех случаях, когда построить аналитическую модель трудно или вовсе невозможно. Впервые метод был описан в 1949 г. в статье Н. Метрополиса и С. Улама «Метод Монте-Карло». В общем случае его можно рассматривать как совокупность вероятностных вычислительных методов.

В рамках дискуссии, проводившейся в 1985 – 1993-х годах на страницах журнала «Заводская лаборатория», обсуждались некоторые накопленные в этой области результаты. С тех пор вычислительная техника и информатика сделали большой шаг вперед в своем развитии, что привело к появлению новых возмож-

[1] Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет («ЛЭТИ»), г. Санкт-Петербург, Россия; e-mail: yur_grigoriev@mail.ru