statisticheskii analiz: uchenye zapiski po statistike [Applied multivariate statistical analysis. Scientific notes on statistics]. Vol. 33. — Moscow: Nauka, 1978. P. 380 – 381 [in Russian].

16. **Orlov A. I.** Otsenka razmernosti modeli v regressii [Estimation of the dimension in the regression model] / Algoritmicheskoe i programmnoe obespechenie prikladnogo statisticheskogo analiza: uchenye zapiski po statistike [Algorithmic and the software application of statistical analysis. Scientific notes on statistics]. Vol. 36. — Moscow: Nauka, 1980. P. 92 – 99 [in Russian].
17. **Orlov A. I.** Asimptotika nekotorykh otsenok razmernosti modeli v regressii [The asymptotic behavior of some estimators of model dimension in the regression] / Prikladnaya statistika. Uchenye zapiski po statistike [Applied statistics. Scientific notes on statistics]. Vol. 45. — Moscow: Nauka, 1983. P. 260 – 265 [in Russian].
18. **Orlov A. I.** Ob otsenivanii regressionnogo polinoma [On the estimation of regression polynomial] / Zavod. Lab. 1994. Vol. 60. N 5. P. 43 – 47 [in Russian].
19. **Orlov A. I.** Nekotorye veroyatnostnye voprosy teorii klassifikatsii [Some questions of the probability theory of classification] / Prikladnaya statistika. Uchenye zapiski po statistike [Applied statistics. Scientific notes on statistics]. Vol. 45. — Moscow: Nauka, 1983. P. 166 – 179 [in Russian].
20. **Orlov A. I.** Obshchii vzglyad na statistiku ob’’ektov nechislovoi prirody [General view on the Statistics of the objects of non-numeric nature] / Analiz nechislovoi informatsii v sotsiologicheskikh issledovaniyakh [An analysis of non-numerical information in sociological research]. — Moscow: Nauka, 1985. P. 58 – 92 [in Russian].
21. **Orlov A. I.** On the Development of the Statistics of Nonnumerical Objects / Design of Experiments and Data Analysis: New Trends and Results. — M.: ANTAL, 1993. P. 52 – 90.
22. **Orlov A. I.** Metody snizheniya razmernosti [Methods to reduce the dimensionality] / Prilozhenie 1 k knige Yu. N. Tolstova “Osnovy mnogomernogo shkalirovaniya: uchebnoe posobie dlya vuzov” [Appendix 1 to the Book of N. Tolstov “Basics of multidimensional scaling: a textbook for high schools”]. — Moscow: Izd. KDU, 2006. — 160 p. [in Russian].
23. **Karyakin R. N., Orlov A. I., Adamov S. Yu.** Veroyatnostnaya teoriya vysshikh garmonik pomekh, sozdavaemykh élektrovozami [Probability theory of higher harmonic interference from electric locomotives] / Prikladnoi mnogomernyi statisticheskii analiz: uchenye zapiski po statistike [Applied multivariate statistical analysis. Scientific notes on statistics]. Vol. 33. — Moscow: Nauka, 1978. P. 376 – 380 [in Russian].
24. **Orlov A. I.** Veroyatnostno-statisticheskoe modelirovanie pomekh, sozdavaemykh élektrovozami [Probabilistic and statistical modeling of interference from electric locomotives] / Politem. Setev. Élektron. Nauch. Zh. Kuban. Gos. Agrar. Univ. 2015. 106. P. 225 – 238 [in Russian].
25. **Ermakov S. M.** O datchikakh sluchainykh chisel [About the random numbers] / Zavod. Lab. 1993. Vol. 59. N 7. P. 48 – 50 [in Russian].
26. **Orlov A. I.** Pervyi Vsemirnyi kongress Obshchestva matematicheskoi statistiki i teorii veroyatnostei im. Bernulli [The first World Congress of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability] / Zavod. Lab. 1987. Vol. 53. N 3. P. 90 – 91 [in Russian].
27. **Tyurin Yu. N., Figurnov V. É.** O proverke datchikov sluchainykh chisel [On testing random numbers] / Teor. Veroyatn. Primen. 1990. Vol. 35. Issue 1. P. 156 – 161. URL: http://www.mathnet.ru/links/638b9757785d119ec90539d95ebf3cb7/tvp919.pdf (accessed 04.11.2015) [in Russian].
28. **Orlov A. I.** Kommentarii II k stat’e V. G. Alekseeva «Ob odnom metode proverki datchika psevdosluchainykh chisel» [Comment II to Article of V. Alekseev “A method of testing pseudorandom numbers”] / Zavod. Lab. 1990. Vol. 56. N 3. P. 86 – 87 [in Russian].
29. **Orlov A. I.** Nauchnaya shkola kafedry «Ékonomika i organizatsiya proizvodstva» v oblasti ékonometriki [The scientific school of the department “Economics and organization of production” in the field of econometrics] / Fourth Charnov Readings. Proc. / Proc. IV Int. Sci. Conf. on the Organization of Production. Moscow, December 5 – 6, 2014. — Moscow: Izd. NP “Ob’’edinenie kontrollerov”, 2014. P. 326 – 337. URL: https://yadi.sk/i/7xrB6x37eyPp3 (accessed 04.11.2015) [in Russian].

УДК 519.21

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО: ВОПРОСЫ ТОЧНОСТИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И КАЧЕСТВА ГЕНЕРАТОРОВ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

© Ю. Д. Григорьев[1]

Статья поступила 11 ноября 2015 г.

Рассмотрены задачи повышения эффективности вычислений методом Монте-Карло. Отмечено, что ключевую роль в их решении играют вопросы выбора объема статистических испытаний (моделируемых случайных чисел), а также качества соответствующих датчиков случайных чисел. Обсуждены проблемы реализации алгоритмов методов Монте-Карло, обусловленные требованиями повышения скорости сходимости асимптотических решений к истинным решениям.

Ключевые слова: метод Монте-Карло; эффективность и трудность вычислений; предельные теоремы; датчики базовых случайных чисел.

Метод Монте-Карло (другие названия — метод статистических испытаний, статистическое моделирование) применяется в различных научных дисциплинах в тех случаях, когда построить аналитическую модель трудно или вовсе невозможно. Впервые метод был описан в 1949 г. в статье Н. Метрополиса и С. Улама «Метод Монте-Карло». В общем случае его можно рассматривать как совокупность вероятностных вычислительных методов.

В рамках дискуссии, проводившейся в 1985 – 1993-х годах на страницах журнала «Заводская лаборатория», обсуждались некоторые накопленные в этой области результаты. С тех пор вычислительная техника и информатика сделали большой шаг вперед в своем развитии, что привело к появлению новых возмож-

[1] Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет («ЛЭТИ»), г. Санкт-Петербург, Россия; e-mail: yur_grigoriev@mail.ru

Таблица 1. Научные публикации по применению методов Монте-Карло по научным школам и годам: 1 — школа С. М. Ермакова; 2 — школа Г. А. Михайлова; 3 — другие авторы (в том числе докладов на конференциях)

Научные направления	Годы				
	1991 – 1995	1996 – 2000	2001 – 2005	2006 – 2010	2011 – 2015
1	[27, 32, 36]	[18, 25, 104, 105]	[11, 21, 24, 31, 33, 37, 103, 106, 132]	[22, 23, 29, 30, 38, 85]	[5, 10, 12, 20, 26, 28, 39]
2	[1, 2, 3, 16, 60, 69, 79, 80, 126]	[4, 6, 14, 61, 72, 96, 129]	[73, 131]	[15, 62, 63, 64, 65, 67, 83]	[66, 92, 100]
3	[51, 76, 84, 70, 125, 127, 133]	[55, 75, 101, 107, 121, 122, 123, 124, 128, 138, 140]	[7, 9, 54, 56, 57, 59, 70, 77, 78, 81, 86, 87, 99, 109, 110, 118, 120, 134]	[13, 40, 50, 58, 71, 82, 88, 71, 82, 88, 89, 91, 98, 111, 130, 139]	[41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 52, 68, 94, 95, 112, 135, 136, 137, 142, 143]

Таблица 2. Формы публикаций за 1991 – 2015 гг. по направлениям: 1 — алгоритмы моделирования случайных элементов; 2 — точность и эффективность использования асимптотических решений, датчики базовых случайных величин (БСВ); 3 — прикладные задачи

Направ-ления	Формы публикаций			
	Монографии	Статьи, препринты	Конференции	Методики
1	[13, 14, 15, 17, 22, 36, 54, 56, 57, 61, 65, 66, 72, 73, 76, 78, 79, 82, 86, 107, 118, 120, 125, 131]	[9, 11, 16, 18, 23, 25, 26, 29, 30, 31, 33, 37, 38, 45, 50, 60, 62, 63, 67, 83, 85, 92, 105, 106, 111, 139, 143]	[20, 46, 47, 49, 52, 68, 93, 95, 113, 114, 115, 135, 136, 137, 141, 143]	[7, 42, 43, 44, 48, 59, 64, 75, 80]
2	[15, 39, 55, 74, 76, 78, 90, 107, 120, 121, 127]	[1, 2, 3, 4, 5, 12, 21, 24, 27, 40, 53, 70, 81, 83, 96, 101, 109, 123, 124, 130, 140]	[46, 47, 58, 88, 103, 135, 136, 137]	[15, 42, 43, 44, 48, 71, 77, 87]
3	[6, 32, 73, 78, 107, 110, 118, 126, 132]	[10, 12, 28, 41, 69, 83, 89, 91, 98, 104, 122, 134]	[100, 114, 116, 117, 119, 112, 135, 136, 137, 142]	[42, 43, 44, 48]

ностей для реализации как существовавших до этого, так и появившихся за последние 20 – 25 лет новых технологий вероятностного моделирования. Многие известные ранее данные получили новое методическое осмысление, появились новые результаты, касающиеся как разработки самих методов моделирования случайных процессов и полей, так и новых возможностей современной вычислительной техники.

О важности метода Монте-Карло (МК) свидетельствуют многочисленные приложения. Наиболее удачные примеры его использования относятся, как правило, к задачам, допускающим теоретико-вероятностную трактовку. Вопрос о том, насколько целесообразно использовать метод в других случаях, мало изучен. Однако несомненным является факт [39, с. 3], что «привлечение рандомизации оказывается важным средством создания алгоритмов с естественным параллелизмом. Тенденция, направленная на создание компьютеров с большим числом процессоров (ядер), обусловливает важность исследования рандомизованных алгоритмов. Именно в этом направлении в настоящее время ведутся интенсивные исследования».

С другой стороны, в какой бы области и в каких бы вариантах ни применялся метод МК, всегда встает вопрос о точности получаемых результатов. Последняя, в свою очередь, зависит как от качества самих алгоритмов рандомизации, так и от скорости сходимости асимптотических решений к истинным. По существу речь идет о формулировках соответствующих предельных теорем в конкретных задачах, решаемых методами МК.

Наукометрический анализ

Прежде чем перейти к непосредственному обсуждению существующих проблем в области исследования точности методов МК, приведем краткий наукометрический обзор публикаций в данной области.

Отметим, что в России еще со времен СССР действуют две мощные научные школы статистического моделирования, возглавляемые проф. С. М. Ермаковым (СПбГУ, г. Санкт-Петербург) и чл.-корр. РАН Г. А. Михайловым (ВЦ СО РАН, г. Новосибирск). Краткий библиографический обзор работ представителей этих и московской школ (И. М. Соболь и др.), а также зарубежных ученых за 1991 – 2015 гг. представлен в табл. 1 и 2. Они, конечно, не дают всеобъемлющей картины состояния дел, что в принципе сделать невозможно, но могут служить некой отправной точкой для последующих выводов.

Анализ табл. 1 и 2 позволяет заключить следующее. Подавляющее большинство работ направлено на решение конкретных прикладных задач, при этом существующие в настоящий момент методы моделирования случайных элементов и точность получаемых при этом результатов во многих работах просто принимаются за некоторую данность, т.е. не обсуждаются. Вопросам построения новых алгоритмов моделирования случайных чисел (в первую очередь равномерно распределенных) и их преобразованиям, а также повышения скорости сходимости асимптотических решений к истинным (распараллеливанию алгоритмов, методам уменьшения дисперсий и т.д.) уделяется значительно меньшее внимание. Очевидно, это объясняется трудностью соответствующих теоретических проблем и задач программной реализации алгоритмов.

Особый интерес в табл. 2 представляют графы «Монографии» и «Конференции». Они показывают важность и огромный интерес, проявляемый к задачам моделирования методом МК. Так, в 2013 г. в университетском городке Римини университета Болоньи (Италия) состоялся VII Международный симпозиум, посвященный статистическим методам в вероятностном моделировании, сборе данных и анализе научных экспериментов и исследований [137]. Предыдущие симпозиумы проходили в разные годы в Санкт-Петербурге: I — 1994, май; II — 1996, июнь; III — 1998, июнь; IV — 2001, июнь; V — 2005, июнь; VI — 2009, июнь (интернет-ресурс http://pws.math.spbu.ru/start).

Наконец, 21 – 25 сентября 2015 г. в Вене (Австрия) состоялся VIII Международный симпозиум, посвященный статистическим методам в вероятностном моделировании, организованный Центром планирования эксперимента Института прикладной статистики и компьютерных вычислений Университета наук о жизни совместно с Секцией статистики Альпен-Адрия-Университета (г. Клагенфурт, Австрия), кафедрой статистического моделирования СПбГУ (Россия) и Обществом моделирования INFORMS (США).

Области применения методов Монте-Карло

Метод МК оказал и продолжает оказывать существенное влияние на развитие методов вычислительной математики и при решении многих задач может не только успешно конкурировать с традиционными вычислительными методами, но и входить в них как составная часть, образуя эффективные комбинированные методы решения сложных задач. Например, это касается краевых задач, решения которых могут быть представлены в виде интегральных уравнений со стохастическим ядром $P(x, dy)$ [39, с. 109]. В этом случае решения соответствующих уравнений обычно строят на траекториях цепи Маркова, определяемой переходной вероятностью $P(x, dy)$. Сама же цепь Маркова моделируется методами МК.

Востребованность методов МК в детерминированных задачах, в частности в задачах численного интегрирования, обусловлена трудностью или невозможностью решения таких задач обычными методами, неточностью определения входящих в задачу краевых или граничных условий, значений вычисляемых функционалов в узлах всевозможных сеток, а также особенностями реализации методов МК, сочетающими разумный компромисс между скоростью и точностью вычислений.

Для использования в детерминированных задачах стохастического подхода сначала строится вероятностная модель исходной задачи или ее части, а затем используются методы МК. Например, это может быть представление вычисляемого интеграла к виду математического ожидания некоторой случайной величины. Другим примером применения методов МК являются задачи нахождения глобального экстремума функций большого числа переменных. Методы случайного поиска для решения этой задачи широко используются и подробно исследованы. Но и здесь задачу определения глобального экстремума можно существенно облегчить, если точку экстремума представить в виде моды некоторого распределения вероятностей и затем в качестве решения рассматривать оценку этой моды [39, с. 22].

Применение методов МК, естественно, оправдано и в тех задачах, которые изначально допускают теоретико-вероятностное описание (регрессионный и дисперсионный анализ, проверка статистических гипотез, вычисление квантилей распределений и т.д.). Это объясняется как естественностью получения ответа с некоторой заданной вероятностью в задачах с вероятностным содержанием, так и существенным упрощением процедуры решения.

Наконец, следует отметить, что методы МК являются единственной возможностью для решения задач моделирования сложных систем, где точные решения в принципе не могут быть получены. Например, это могут быть задачи расчета надежности структурно-сложных систем или расчета многомерных интегралов, прогнозирования погоды, изменения климата, последствий катастроф (землетрясений, цунами, ядерной зимы), развития экономик, военных действий и т.д.

Первоначально метод МК использовался главным образом для решения задач нейтронной физики, где традиционные численные методы оказались малопригодными. Далее его влияние распространилось на широкий класс задач статистической физики, очень разных по своему содержанию. Методы МК все в большей мере используются для решения задач в таких науках, как:

имитационное моделирование систем массового обслуживания (СМО);

численное моделирование случайных процессов и полей;

теория игр и математическая экономика;

поиск экстремумов функционалов;

теория передачи сообщений при наличии помех;

астрономия и астрофизика;

теория переноса излучений;

взаимодействие частиц с веществом;

физика конденсированного вещества;

атмосферная оптика и поверхность океана;

финансовый инжиниринг;

математическая физика, в том числе краевые задачи для линейных систем стохастических дифференциальных уравнений и др.

Как и любая технология, метод МК обладает как достоинствами, так и недостатками. Назовем некоторые из них.

Достоинства метода МК:

возможность решения задач, для которых другие методы решения недоступны;

простота учета вычислительных затрат;

высокая степень параллелизма.

Недостатки метода МК:

границы погрешности решений не определены точно, но включают некую случайность (хотя, возможно, это скорее психологическая, чем реальная, трудность);

несовершенства технологии, связанные с осуществлением операций предельного перехода;

результаты получают только для конкретных числовых значений параметров задачи; при необходимости исследовать некоторую зависимость (например, средней длины очереди в заданной СМО от ее коэффициента загрузки) расчет повторяют для их новых значений;

статистическая погрешность с ростом объема выборки n убывает медленно;

необходимо иметь случайные числа с заданными свойствами (проблема моделирования случайных элементов).

Два последних недостатка традиционно вызывают много вопросов. Универсального способа их преодоления, по-видимому, нет. Здесь многое находится в стадии становления, поиска и потому вызывает оживленный интерес и обсуждения.

Точность и эффективность асимптотических решений

О роли предельных теорем типа закона больших чисел (ЗБЧ) в теории статистического моделирования говорится во многих руководствах (в частности, [34, с. 74 – 84; 71, с. 519 – 522]). Непосредственно связанный с ними вопрос о точности метода МК рассмотрим на примере численного интегрирования [64, с. 147].

Пусть требуется численно вычислить однократный интеграл

$$I = \int_{R^1} \lg(x_1, \ldots, x_l)\mathrm{d}x_1 \ldots x_l = \int g(x)\mathrm{d}x. \qquad (4.1)$$

Выберем плотность распределения $f(x)$ случайного вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_l)$ такую, что

$$\int f(x)\mathrm{d}x = 1,\ \ f(x) = \begin{cases} \geq 0, x \in R^l \\ \neq 0, g(x) \neq 0, x \in R^l \end{cases},$$

и перепишем интеграл (4.1) в виде математического ожидания

$$I = \int g(x)\mathrm{d}x = \int q(x) f(x)\mathrm{d}x = \mathbb{M}\,\zeta,$$

где

$$q(x) = g(x)/f(x),\ \ \zeta = q(\xi). \qquad (4.2)$$

На основании ЗБЧ построим стандартный алгоритм метода МК вычисления интеграла (4.1):

$$I \approx \overline{\zeta}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\zeta_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q(\xi_i). \qquad (4.3)$$

Величина $\overline{\zeta}_n$ из (4.3) имеет математическое ожидание $\mathbb{M}\overline{\zeta}_n = I$ и дисперсию $\mathbb{D}\overline{\zeta}_n = \sigma^2/n$, где

$$\sigma^2 = \int \frac{g^2(x)}{f(x))}\mathrm{d}x - I^2. \qquad (4.4)$$

Если σ^2 в (4.4) конечна, т.е. $\sigma^2 < \infty$, и $S_n = \zeta_1 + ... + \zeta_n$, то абсолютная погрешность $\delta_n = |\overline{\zeta}_n - I|$ алгоритма (4.3) можно представить в виде

$$\delta_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left|\frac{S_n - n\mathbb{M}\zeta}{\sigma\sqrt{n}}\right|.$$

Именно в этом и заключается известная деликатность этой задачи: каково бы ни было число испытаний n, нельзя утверждать с полной достоверностью, что будет выполнено, скажем, неравенство

$$|\overline{\zeta}_n - I| \leq 0{,}01.$$

Любая нетривиальная оценка близости $\overline{\zeta}_n$ к интегралу I действует не с полной достоверностью, а лишь с некоторой меньшей единицы вероятностью. Аналогичная ситуация возникает и во всех других подобных задачах, например, при вычислении квантилей различных распределений.

В качестве примера, позволяющего оценить точность моделирования квантилей, рассмотрим статистику Джини [108]

$$G_n - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)(U_{(i+1)} - U_i),U_{(i)} - \frac{X(i)}{\overline{X}}, \qquad (4.5)$$

используемую для проверки гипотезы экспоненциальности генеральной совокупности на основе выборки $\{X_i\}$, где $\overline{X}$ и $\{X_{(i)}\}$ — ее среднее и вариационный ряд.

Для статистики (4.5) известно точное выражение ее функции распределения $F(x)$. Поэтому известны и ее квантили. Для объемов выборки $n = 5(5)20$ они представлены в левой части табл. 3. В ее правой части приведены квантили, полученные методом МК. Поскольку G_n симметрична относительно точки $x = 0{,}5$, то квантили u_α нижнего хвоста распределения $F(x)$ вычисляются согласно равенству $u_\alpha = 1 - u_{1-\alpha}$.

Сравнение левой и правой частей табл. 3 показывает, что с помощью моделирования методом МК квантили вычисляются хотя и достаточно точно (примерно два знака после запятой), но все-таки с погрешностью. Таким образом, говорить, скажем, о табулировании квантилей различных статистик типа G_n с неизвестной функцией распределения $F(x)$, аналогичном составлению таблиц математической статистики Большева и Смирнова [8], не приходится.

Близкие по смыслу результаты при различных входных параметрах (длина окна L и степень m матрицы оператора) имеют место и в задаче вычисления собственных значений линейного оператора [39, с. 81, табл. 4.1]. Здесь точность вычислений существенно зависит от сбалансированности параметров L и m и, как правило, ограничивается двумя-тремя знаками после запятой.

Вернемся к задаче вычисления интеграла (4.1). Из центральной предельной теоремы (ЦПТ) следует, что $(S_n - n\mathbb{M}\zeta)/\sigma\sqrt{n} \to \omega \in N(0, 1)$ при $n \to \infty$ (сходимость по распределению). Поэтому для малого $\alpha > 0$ найдется константа u_α (квантиль нормального распределения), для которой выполняется соотношение

$$P\left(\delta_n \le \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha\right) \approx P|\omega| < u_\alpha \ge 1 - \alpha. \qquad (4.6)$$

Величина $r_n = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha$ называется вероятной ошибкой метода [64, с. 148] и используется на практике для приближенной оценки порядка ошибки.

Из соотношения (4.6) следует, что скорость сходимости метода МК определяется величиной $n^{-1/2}$, т.е. относительно невелика. Для того чтобы получить следующий знак после запятой величины I (т.е. уменьшить погрешность r_n примерно в десять раз), требуется в сто раз увеличить число испытаний n. Поэтому характерные числа испытаний в практических вычислениях по методу МК весьма велики.

При вычислении однократного интеграла I с гладкой подынтегральной функцией $g(x)$ для $x \in [a, b]$ погрешность простейшей формулы прямоугольников, определяемая числом вычислений подынтегральной функции $g(x)$ из (4.1), имеет порядок n^{-2}, т.е. на четыре порядка лучше метода МК, а погрешность чуть более сложной формулы Симпсона — порядок n^{-3} [64, с. 149].

Хорошо известно [64, с. 149], что при переходе к размерностям $l \ge 2$ и при рассмотрении негладких подынтегральных функций $g(x)$, $x \in R^l$ построение интерполяций для $g(x)$ и соответствующих им кубатурных формул значительно усложняется и порядок m погрешности $\delta_n \sim n^{-m}$ уменьшается с ростом l. Скорость сходимости метода МК не зависит от величины l. Свойства функции $g(x)$ влияют лишь на величину $\mathbb{D}\zeta$ из (4.4). Таким образом, при переходе к сложным многомерным задачам конкурентоспособность методов МК возрастает.

Метод Монте-Карло может быть эффективным, если нас удовлетворяет сравнительно грубое приближенное решение (скажем, два знака после запятой при вычислении квантилей) и размерность l достаточно велика [39, с. 64; 64, с. 149]. Существует много способов преодоления трудностей на пути повышения точности решений, одним из которых является использование параметрически разделимых алгоритмов. Однако и здесь при наличии многих процессоров также возникают свои проблемы [39, с. 64]. Поэтому в ходе дискуссии хотелось бы услышать реальные мнения по поводу границ применимости конкретных методов МК при решении детерминированных задач, традиционно решаемых обычными итерационными методами.

В связи с асимптотическим характером решений в методах МК отметим также недостаточно четкое освещение в литературе вопросов наследования сходимости при моделировании статистических данных произвольной природы. Суть этой проблемы кратко изложена в [71, с. 527 – 533].

Величина $S = t\sigma^2$, где t — среднее время для получения одного выборочного значения ζ_i случайной величины ζ, называется трудоемкостью метода МК [64, с. 150]. Чем меньше S, тем выше качество соответствующего алгоритма МК. Существует ряд приемов, уменьшающих дисперсию $a^2 = \mathbb{D}\zeta$ в (4.2). Способы уменьшения времени t, как правило, связаны с оптимизацией моделирования случайного вектора ζ. Поэтому здесь мы приходим к необходимости применения датчиков псевдослучайных чисел, качество которых составляет одну из основных проблем методов МК.

Проблема датчиков псевдослучайных величин

Следуя [44], кратко остановимся на современном состоянии проблемы датчиков базовых случайых величин (БСВ) и некоторых основных принципах их использования.

В настоящее время предпочтение отдается алгоритмическим (программным) генераторам псевдослучайных чисел, а не физическим генераторам так называемых «чисто случайных чисел». Качество

Таблица 3. Квантили $u_{1-\alpha}$ статистики Джини (4.5) ($N = 10{,}000$ — количество испытаний; $\alpha = 0{,}05, 0{,}025, 0{,}01$ — размер критерия; n — объем выборки $\{X_i\}_{i=1}^n$)

n	Точные значения [108]			Моделирование [19]		
	0,950	0,975	0,990	0,950	0,975	0,990
5	0,73834	0,77997	0,82501	0,73535	0,77820	0,82184
10	0,65855	0,68768	0,72070	0,65781	0,68610	0,72167
15	0,62704	0,65076	0,67792	0,62839	0,65037	0,67745
20	0,60902	0,62952	0,65308	0,60969	0,63042	0,65480

моделирования случайных величин, процессов, полей и других случайных объектов зависит от качества генератора стандартных псевдослучайных чисел (ГСПЧ), равномерно распределенных на отрезке [0, 1]. Псевдослучайные числа (ПСЧ) на выходе ГСПЧ должны быть независимы в совокупности и равномерно распределены. Наличие нужных свойств у прочих случайных элементов, порождаемых подходящими преобразованиями ПСЧ, доказывается в предположении, что ПСЧ независимы и равномерно распределены.

Метод МК следует рассматривать как вычислительную технологию, реализуемую на ЭВМ. Это означает, что метод МК оперирует не с подлинными математическими объектами, а с их «неполноценными» (согласно Платону) техническими (материальными) реализациями. Например, числа и операции над ними в силу конечности разрядной сетки реализуются на ЭВМ неполноценно. Не любые целые числа представимы на ЭВМ (в рамках любого конкретного языка программирования и любой конкретной архитектуры ЭВМ). И не любые два представимых на ЭВМ целых числа можно на ней сложить. «Вещественные» числа в ЭВМ — это лишь конечное множество точек числовой оси. Среди них нет иррациональных чисел. Данное обсуждение можно продолжать до бесконечности.

Отсюда возникает необозримое множество ситуаций, в которых простые правила арифметики и простые теоремы высшей математики не работают. Примеры из арифметики приводить не будем, их слишком много. Пример из математического анализа, принадлежащий акад. Н. Н. Моисееву: отношение $[y(x+h) - y(x)]/h$ не сходится к производной $y'(x)$ при $h \to 0$ (на ЭВМ всегда получаем либо 0, либо ∞).

Подобные несовершенства технологии МК надо иметь в виду и уметь их преодолевать. Способы преодоления этих трудностей существуют, их полезно обсуждать, так как от них напрямую зависит точность вычислений. В этом случае можно считать все арифметические операции, предельные переходы и т.д. выполнимыми с любой требуемой степенью точности. В частности, любую случайную величину, получаемую с помощью ГСПЧ, можно считать непрерывной и равномерно распределенной на [0, 1].

Что касается независимости ПСЧ на выходе ГСПЧ, то здесь ситуация иная. Для проверки независимости существует много хороших тестов. Если применить идеальный тест (хотя его не существует), то для любого ГСПЧ он обнаружит какую-либо зависимость (попарную или более высокого порядка) генерируемых чисел или даже обнаружит ту формулу (скажем, рекуррентный алгоритм), по которой они вычисляются (разумеется, невозможно доказать независимость чисел, которые зависимы). Но мы можем устанавливать соответствующими тестами ту степень независимости, которая нам необходима (независимость пар, троек чисел и т.д.), и тем самым довести ГСПЧ до некоторой степени совершенства, обеспечивающей разумную реализацию свойства независимости.

Рассуждая подобным образом далее, можно предположить, что при прохождении используемым ГСПЧ тестов на независимость любой глубины останутся такие «сверхчувствительные» преобразования ПСЧ, относительно которых теоремы, основанные на независимости ПСЧ, будут приводить к результатам, резко отличающимся от наблюдений. В связи с этим интересно ознакомиться с примерами таких сверхчувствительных преобразований при условии, что они где-либо сконструированы.

Безусловно, это не должны быть примеры, основанные на устранимых недостатках существующих ГСПЧ, например, на увеличении длины периода. В идеале хотелось бы построить теорию, согласно которой независимость генерируемых чисел следовала бы из некоторых новых принципов, отличных от эксплуатируемых сегодня. Возможно, эта теория могла бы состоять из разделов, посвященных определенным типам ГСПЧ (мультипликативным конгруэнтным датчикам — первый раздел, квадратичным конгруэнтным — второй, методу Макларена – Марсальи — третий и т.д.).

Исследования в области ГСПЧ чрезвычайно обширны. Представляется, что дискуссия по этому поводу должна свестись к вопросу качества ГСПЧ и к свойствам их преобразований. Так, многих исследователей в области имитационного моделирования совершенно не удовлетворяет ГСПЧ языка GPSS. Приходится «прикручивать» к этому языку какой-либо внешний генератор, скажем, генератор «Вихрь Мерсенна» с длиной периода 2^{19937}, разработанный в 1997 г.

Современное состояние вопроса о датчиках детально рассмотрено в [44]. Следуя этому источнику, кратко воспроизведем некоторые его основные положения.

В [90] описан датчик БСВ, встроенный в язык GPSS (в версиях для IBM 360/370). Точный алгоритм и данные тестирования этого датчика там не приводятся, как и в фирменной документации [77, 87]. Наше доверие к датчику может поддерживаться авторитетом фирмы IBM, а также широким апробированием языка GPSS в прикладных исследованиях и в учебных курсах моделирования. Высокое качество датчика подтверждает работа [17], где на GPSS моделируются СМО и результаты сравниваются с точными аналитическими решениями. В настоящее время распространена новая версия GPSS — система GPSS World [7, 57, 86, 87].

Однако в связи с возросшим быстродействием компьютеров к датчикам БСВ предъявляются повышенные требования. Специальные испытания датчиков языка GPSS, проведенные на выборках длины $N = 2 \cdot 10^9$, показывают, что «запас случайности» у этих датчиков исчерпывается уже при $N = 10^8$. При больших значениях возникают явные корреляции между генерируемыми числами, что приводит к недопустимым смещениям результатов моделирования [40]. Датчики же БСВ, разработанные в ЦЕРНе на основе «вихря Мерсенна», предложенного в 1998 г. Мацумото и Нисимурой [124], успешно прошли [44] специальные испытания на большой длине выборки.

Согласно информации, представленной в доступной пользователю литературе, параметры датчиков сильно зависят от длины машинного слова. Дело в том, что в алгоритмах вычисления БСВ используются большие целые числа. А поскольку непосредственное программирование операций над ними может привести к переполнению разрядной сетки ЭВМ, то ряд операций приходится разбивать на промежуточные шаги, в которых учитываются тонкости машинной арифметики. В результате текст программы оказывается существенно зависимым от модели ЭВМ и от используемого языка программирования. Или же программа содержит операции настройки на длину слова и на особенности обработки переполнений в ЭВМ % (см., например, [44]).

Работа на границе диапазона представимых целых чисел — это специфическая трудность при программировании датчиков БСВ. Вместе с тем выяснилось, что для корректной реализации некоторых классов случайных величин, например со степенными распределениями вероятностей, обычной длины машинного слова оказывается недостаточно [48]. Дискретизация БСВ при такой длине слова (казалось бы, пренебрежимо малая) приводит к недопустимым погрешностям реализации математических ожиданий, дисперсий и других моментов БСВ.

Поскольку степенные случайные величины находят все более широкое применение в современных научных исследованиях [41, 49], приходится разрабатывать датчики БСВ с произвольной длиной слова, задаваемой пользователем (например, 100, 200 и более десятичных цифр). В интернете можно найти и подходящие многоразрядные алгоритмы «вихря Мерсенна».

Аналогичный интерес представляет также проблема моделирования устойчивых распределений, возникающих, в частности, в задачах радиотехники и электроники [99, 102, 128, 133].

Наиболее популярным в приложениях мультипликативным датчикам псевдослучайных чисел и их программной реализации посвящено Приложение «Г» в книге Пригарина [73]. Там же приведен библиографический обзор литературы, в которой даются более подробные сведения о датчиках БСВ. Часть этой библиографии, приходящаяся на период позднее 1991 г., представлена в списке литературы к данной статье.

Из сказанного выше о методах МК можно сделать вывод, что данное направление вычислительной математики чрезвычайно актуально и обладает огромным научным потенциалом, который во все большей степени будет проявлять себя в ближайшей и дальнейшей перспективе. Огромный отряд исследователей вносит неоценимый вклад в развитие многочисленных прикладных областей, опираясь исключительно на широкие возможности современных технологий статистического моделирования.

Вместе с тем, как и в любой другой области знания, здесь также есть трудноразрешимые проблемы. Часть из них, далеко не полная, обозначена в данной работе. К более подробному и максимально доброжелательному обсуждению накопившихся в этом вопросе проблем мы приглашаем наших читателей. Надеемся, что предстоящий разговор окажется полезным как заинтересованным математикам, так и обычным пользователям стандартных технологий методов МК.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Антипов М. В.** Границы случайности / Препринт № 928. — Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1991. — 27 с.
2. **Антипова Т. И., Антипов М. В.** Экспертная система генераторов статистических распределений / Препринт № 1038. — Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995. — 112 с.
3. **Антипов М. В., Лобанов П. В.** Генераторы псевдослучайных чисел на персональных компьютерах / Препринт № 1002. — Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1993. — 47 с.
4. **Антипов М. В., Михайлов Г. А.** Об улучшении генераторов случайных чисел с помощью суммирования по модулю единица / Препринт 1059. — Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1996. — 31 с.
5. **Антонов А. А., Ермаков С. М.** Эмпирическая оценка погрешности квази Монте-Карло вычислений / Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Вып. 1. С. 3 – 11.
6. **Артемьев С. С., Михайличенко И. Г., Синицын И. Н.** Статистическое моделирование срочных финансовых операций: монография / Под ред. Г. А. Михайлова. — Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1996. — 202 с.
7. **Боев В. Д.** Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World: учеб. пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 368 с.
8. **Большев Л. Н., Смирнов Н. В.** Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.
9. **Борщёв А. В.** Практическое агентное моделирование и его место в арсенале аналитика / Exponenta Pro. 2004. № 3 – 4 (http://www.gpss.ru/index-h.html).
10. **Дмитриев А. В., Ермаков С. М., Ермаков К. С.** Параллельный Монте-Карло метод оценки американских опционов / Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 1. С. 72 – 81.
11. **Вагнер В., Ермаков С. М.** Стохастическая устойчивость и параллелизм метода Монте-Карло / ДАН РАН. 2001. Т. 379. № 4. С. 439 – 441.
12. **Видяева К. О., Ермаков С. М.** К обобщению метода Крылова вычисления коэффициентов минимального многочлена / ЖВМ и МФ. 2013. Т. 53. Вып. 5. С. 1 – 9.
13. **Винклер Г.** Анализ изображений, случайные поля и методы Монте-Карло на цепях Маркова: мат. основы / Пер. с англ. С. М. Пригарина. 2-е изд. — Новосибирск: Гео, 2008. — 440 с.
14. **Войтишек А. В.** Основы метода Монте-Карло в алгоритмах и задачах. В 6 частях. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997 – 2004.
15. **Войтишек А. В.** Дополнительные сведения о численном моделировании случайных элементов: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2007. — 92 с.
16. **Войтишек А. В., Пригарин С. М.** О функциональной сходимости оценок и моделей в методе Монте-Карло / ЖВМ и МФ. 1992. Т. 32. Вып. 10. С. 1641 – 1651.
17. **Голованов О. В.** Моделирование сложных дискретных систем на ЭВМ третьего поколения. Опыт применения GPSS. — М.: Энергия, 1978. — 178 с.
18. **Гладкова Л. А., Ермаков С. М.** Рекуррентные алгоритмы Монте-Карло для решения кинетических уравнений / Статистические мо-

дели с приложениями в эконометрике и смежных областях. — СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1999. С. 50 – 75.
19. **Григорьев Ю. Д.** Гипотеза экспоненциальности: методологический аспект / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2016. Т. 82. № 1. С. 69 – 80.
20. Динамика систем, механизмов и машин / IX Международная IEEE научно-техническая конференция, 11 – 13 ноября 2014, Омск, Россия.
21. **Ермаков С. М.** О мультипликативном датчике случайных чисел / Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2003. Вып. 3. С. 23 – 30.
22. **Ермаков С. М.** Метод Монте-Карло в вычислительной математике. Вводный курс. — СПб.: «Невский Диалект»; — М.: Бином, 2009. — 192 с.
23. **Ермаков С. М.** Параметрически разделимые алгоритмы / Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2010. Вып. 4. С. 25 – 31.
24. **Ермаков С. М., Адамов А. В.** О стохастической устойчивости метода Монте-Карло (случай операторов) / Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2004. Вып. 2. С. 3 – 8.
25. **Ермаков С. М., Беляева А. А.** О методе Монте-Карло с запоминанием промежуточных результатов / Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. Математика, механика, астрономия. 1996. Вып. 29. № 3. С. 5 – 8.
26. **Ермаков С. М., Видяева К. О.** Об оценке спектра линейного оператора / Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 1. С. 11 – 17.
27. **Ермаков С. М., Иванова А. В.** О стохастической устойчивости разностных схем / Вестник СПбГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. 1991. Вып. 1. № 1. С. 30 – 34.
28. **Ермаков С. М., Калошин И. В.** Метод Монте-Карло для решения систем уравнений с квадратичной нелинейностью / Нелинейные динамические системы. Вып. 5 / Под ред. Г. А. Леонова. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003.
29. **Ермаков С. М., Калошин И. В., Тимофеев К. А.** Метод искусственного хаоса для решения методом Монте-Карло уравнений с квадратичной нелинейностью / Математические модели. Теория и приложения. Вып. 7. — СПб: Изд-во НИИХ СПбГУ, 2006. С. 3 – 7.
30. **Ермаков С. М., Леора С. Н.** Метод Метрополиса в задачах поиска экстремума / Математические модели. Теория и приложения. Вып. 11. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2010. С. 72 – 82.
31. **Ермаков С. М., Ликинова О. М., Калошин И. В.** Об одной итерационной схеме решения задач с квадратичной нелинейностью / Математические модели. Теория и приложения. Вып. 6. — СПб.: Изд-во НИИММ, 2005. С. 26 – 33.
32. **Ермаков С. М., Мелас В. Б.** Математический эксперимент с моделями сложных стохастических систем. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993. — 270 с.
33. **Ермаков С. М., Мисов Т.** Моделирование σ^2-распределения / Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2005. Вып. 4. С. 53 – 60.
34. **Ермаков С. М., Михайлов Г. А.** Курс статистического моделирования. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
35. **Ермаков С. М., Михайлов Г. А.** Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982. — 296 с.
36. **Ермаков С. М., Расулов А. С., Бакаев М. Т., Веселовская А. З.** Избранные алгоритмы метода Монте-Карло. — Ташкент: Изд-во Ташкентского гос. ун-та, 1992. — 132 с.
37. **Ермаков С. М., Рукавишникова А. И.** Квази Монте-Карло алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений / Математические модели. Теория и приложения. Вып. 6. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2005. С. 3 – 26.
38. **Ермаков С. М., Рукавишникова А. П., Тимофеев К. А.** О некоторых стохастических и квазистохастических методах решения уравнений / Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2008. Вып. 4. С. 43 – 51.
39. **Ермаков С. М., Сипин А. С.** Метод Монте-Карло и параметрическая разделимость алгоритмов. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. — 248 с.
40. **Задорожный В. Н.** К дискуссии о качестве датчиков случайных чисел / Имитационное моделирование. Теория и практика (ИММОД-2009). Материалы 3-й Всероссийской конференции. Т. 1. — СПб.: ЦТ СС, 2009. С. 128 – 134.
41. **Задорожный В. Н.** Основная задача фрактальной теории массового обслуживания / Омский научный вестник. 2013. № 3(123). С. 9 – 13.
42. **Задорожный В. Н.** Имитационное и статистическое моделирование: учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2013. — 136 с.
43. **Задорожный В. Н.** Имитационное моделирование: учеб. пособие. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2014. — 172 с.
44. **Задорожный В. Н.** Введение в статистическое моделирование: учеб. пособие. — Омск: Изд-во ОмГТУ, 2014. — 100 с.
45. **Задорожный В. Н.** Особенности моделирования систем массового обслуживания с тяжелыми хвостами распределений на GPSS World. Метод ARAND / Омский научный вестник. 2015. № 3(143). С. 307 – 311.
46. **Задорожный В. Н.** Реализация больших выборок при моделировании систем массового обслуживания на GPSS World / Имитационное моделирование. Теория и практика. Труды VII Всерос. научно-практ. конф., 21 – 23 октября 2015, Москва, ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН. Т. 1. С. 225 – 230.
47. **Задорожный В. Н.** Метод ARAND / Имитационное моделирование. Теория и практика / Труды VII Всерос. научно-практ. конф., 21 – 23 октября 2015, Москва, ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН. Т. 1. С. 239 – 244.
48. **Задорожный В. Н., Кутузов О. И.** Методы моделирования очередей в условиях фрактального трафика в сетях с коммутацией пакетов: Учеб. пособие. — Омск: ОмГТУ, 2013. — 104 с.
49. **Задорожный В. Н., Кутузов О. И.** Проблемы и техника моделирования фрактальных очередей / Имитационное моделирование. Теория и практика (ИММОД-2013) / Материалы 6-й Всероссийской конференции. Т. 1. — Казань: ФЭН АН РТ, 2013. С. 143 – 148.
50. **Задорожный В. Н., Семёнова И. И.** Управление сложными техническими объектами и парадигмы имитационного моделирования / Омский научный вестник. 2006. № 2(35). С. 102 – 108.
51. **Золотарёв В. М.** О представлении плотностей устойчивых законов специальными функциями / ТВП. 1994. Т. 39. Вып. 2. С. 429 – 437.
52. Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2015) / Материалы XIV Международной конференции. Анжеро-Судженск, Россия, 18 – 22 ноября 2015. Ч. 1. — Томск: Изд-во ТГУ. — 218 с.
53. **Каргин Б. А., Михайлов Г. А.** Исследование эффективности использования асимптотических решений в расчетах по методу Монте-Карло / ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12. Вып. 1. С. 150 – 158.
54. **Карпов Ю. Г.** Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. — СПб.: БХВ Петербург, 2005. — 400 с.
55. **Кнут Д.** Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. — М.: Мир, 1997. — 724 с.
56. **Кочубей Ю. К.** Статистическое моделирование кинетических процессов. — Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2004. — 245 с.
57. **Кудрявцев Е. М.** GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем. Сер. Проектирование. — М.: ДМК Пресс, 2004. — 320 с.
58. **Кузьмина А. В.** Моделирование гамма-процесса и оценка его параметров / Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения. Материалы Международной конференции, посвященной 75-летию профессора, докт. физ.-мат. наук Г. И. Медведева. — Минск: РИВШ, 2010. С. 178 – 185.
59. **Мазуркин П. М.** Статистическое моделирование: Эврико-матем. подход. — Йошкар-Ола: МарГТУ, 2001. — 99 с.
60. **Михайлов Г. А.** Рекуррентные формулы и принцип Беллмана в методе Монте-Карло / Препринт № 1001. — Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1993. — 32 с.
61. **Михайлов Г. А.** Весовые методы Монте-Карло. — Новосибирск: Наука, 2000. — 248 с.
62. **Михайлов Г. А.** Весовые алгоритмы метода Монте-Карло с ветвлением / Доклады РАН. 2008. Т. 420. № 1. С. 24 – 26.
63. **Михайлов Г. А., Аверина Т. А.** Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло / Доклады РАН. 2009. Т. 428. № 2. С. 163 – 165.
64. **Михайлов Г. А., Войтишек А. В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: учеб. пособие для студ. вузов. — М.: Изд. центр «Академия», 2006. — 368 с.
65. **Михайлов Г. А., Медведев И. Н.** Использование сопряженных уравнений в методе Монте-Карло. — Новосибирск: ИВМ и МГ, 2009. — 168 с.
66. **Михайлов Г. А., Медведев И. Н.** Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования. — Новосибирск: Омега Принт, 2011. — 302 с.
67. **Михайлов Г. А., Ухинов С. А., Чимаева А. С.** Алгоритмы метода Монте-Карло для восстановления индикатрисы рассеяния с учетом поляризации / Доклады РАН. 2008. Т. 423. № 2. С. 161 – 164.
68. **Никулина И. В.** Имитационное моделирование. Теория и практика. ИММОД-2013 / Информационные технологии и вычислительные системы. 2014. Вып. 1. С. 78 – 82.
69. **Огородников В. А.** Кусочно-линейная аппроксимация дискретной корреляционной функции / Труды ВЦ СО РАН. Сер. Вычислительная математика. — Новосибирск, 1993. Вып. 1. С. 25 – 30.

70. **Орлов А. И.** Комментарий к статье С. М. Ермакова «О датчиках случайных чисел» / Заводская лаборатория. 1993. Т. 59. № 7. С. 51 – 51.
71. **Орлов А. И.** Организационно-экономическое моделирование: учебник. В 3 ч. Ч. 1. Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. — 671 с.
72. **Пригарин С. М.** Введение в численное моделирование случайных процессов и полей. — Новосибирск: НГУ, 1999.
73. **Пригарин С. М.** Методы численного моделирования случайных процессов и полей. — Новосибирск: Изд-во ИВМ и МГ СО РАН, 2005. — 258 с.
74. **Пригарин С. М.** Программирование мультипликативных генераторов псевдослучайных чисел / [73, Приложение Г. С. 222 – 238].
75. **Пронин Л. Н.** Метод статистических испытаний: учеб.-метод. пособие. — СПб.: СПбГИЭА, 1999. — 137 с.
76. **Расулов А. С.** Метод Монте-Карло для решения нелинейных задач. — Ташкент: ФАН, 1992. — 104 с.
77. Руководство пользователя по GPSS World / Пер. с англ. — Казань: Мастер-Лайн, 2002. — 384 с.
78. **Рыжиков Ю. И.** Имитационное моделирование. Теория и технологии. — СПб.: КОРОНА принт; М.: Альтекс-А, 2004. — 384 с.
79. **Сабельфельд К. К.** Методы Монте-Карло в краевых задачах. — М.: Наука, 1989. — 280 с.
80. **Сабельфельд К. К.** Статистическое моделирование в задачах математической физики: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 1992. — 231 с.
81. **Селезнев В. Д., Денисов К. С.** Исследование свойств критериев согласия функции распределения данных с гауссовой методом Монте-Карло для малых выборок / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2005. Т. 71. № 1. С. 68 – 72.
82. **Соболь И. М., Статников Р. Б.** Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. — М.: Дрофа, 2006. — 226 с.
83. Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования: Сб. статей в 2 т. / Ред. Г. А. Михайлов. — Новосибирск: ИВМ и МГ, 2009. — 168 с.
84. **Таланов В. В.** Использование баз данных для описания геометрии в задачах моделирования переноса излучения. — Протвино: ИФВЭ, 1994. — 6 с.
85. **Тимофеев К. А.** Об одном классе методов Монте-Карло для решения уравнений с квадратичной нелинейностью уравнений / Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. Вып. 3. С. 23 – 28.
86. **Томашевский В. Н., Жданова Е. Г.** Имитационное моделирование в среде GPSS. — М.: Бестселлер, 2003. — 416 с.
87. Учебное пособие по GPSS World / Пер. с англ. — Казань: Мастер-Лайн, 2002. — 270 с.
88. **Чэнь Хайлун**. Метод моделирования устойчивых случайных величин / Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения. Материалы Междунар. конф., посвященной 75-летию проф. Г. И. Медведева. — Минск: РИВШ, 2010. С. 362 – 367.
89. **Шейкин Е. Г.** Модельное дифференциальное сечение упругого рассеяния электронов на атомах для моделирования прохождения электронов в веществе методом Монте-Карло / Журнал технической физики. 2010. Т. 80. Вып. 1. С. 3 – 11.
90. **Шрайбер Т. Дж.** Моделирование на GPSS / Пер. с англ. В. И. Гергера, И. Л. Шмуйловича; Под ред. М. А. Файнберг. — М.: Машиностроение, 1980. — 592 с.
91. **Этенко А. В.** Моделирование методом Монте-Карло процесса регистрации нейтронов в жидких сцинтилляторах, содержащих гадолиний. — М.: РНЦ КИ, 2007. — 8 с.
92. **Ambos A. Ju., Mikhailov G. A.** Statistical Modeling of the exponentially correlated multivariate random field / Rus. J. Numer. Analys. Math. Modelling. 2011. Vol. 26. N 3. P. 213 – 232.
93. Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference / AMSA'2011. Proc. Int. Workshop. Novosibirsk, Russia, 20 – 22 September, 2011.
94. Applied Methods of Statistical Analysis. Application in Survival Analysis, Reliability and Quality Control / AMSA'2013. Proc. Int. Workshop. Novosibirsk, Russia, 25 – 27 September, 2013.
95. Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach / AMSA'2015. Proc. Int. Workshop. Novosibirsk: NSTU publisher, Russia. September, 2015. P. 14 – 19 [http://amsa.conf.nstu.ru/amsa2015/about-workshop/AMSA2015-proceedings.pdf].
96. **Antipov M. V., Mikhailov G. A.** On the improvement in random number generators by using a modulo 1 sum / Rus. J. Numer. Analys. Math. Modelling. 1996. Vol. 1, 2. P. 93 – 111.
97. **Bailey D. H., Borwein P. B., Ploujje S.** On the rapid computation of various polylogarithmic constants / Math. Comput. 1997. Vol. 66. N 218. P. 903 – 913.
98. **Bjorkman J. E., Wood K.** Radiative equilibrium and temperature correction in Monte Carlo radiation transfer / Astrophys. J. 2001. Vol. 554. P. 282 – 288.
99. **Borak S., Hardle W., Weron R.** Stable Distributions / SFB 649. Discussion Paper. Humboldt-Universität zu Berlin. — Berlin, 2005.
100. **Brednikhin S., Kargin B.** Monte Carlo Modelling the Radiation Heat Transfer with Temperature Correction / AMSA-2011. P. 426 – 431.
101. **Dyadkin I. G., Hamilton K. G.** A study of 128-bit multipliers for congruential pseudorandom number generators / Comptuter Physics Communications. 2000. Vol. 125. P. 239 – 258.
102. **Chambers J. M., Mallows C. L., Stuck B. W.** A method for simulating stable random variables / J. Am. Assoc. 1976. N 71. P. 340 – 344.
103. **Ermakov S. M.** Stochastical stability, Neumann – Ulam scheme and particle methods / IVth IMACS Seminar on Monte Carlo Methods, September 15 – 19, 2003, Berlin. P. 55.
104. **Ermakov S. M., Kaloshin I.** Solving the nonlinear algebraic equations with Monte Carlo method / Advan. Stochast. Simul. Meth. — Boston – Basel – Berlin: Birkhauser, 2000. P. 3 – 15.
105. **Ermakov S. M., Schwabe R.** On randomizing estimators in linear regression models / Freie Universität Berlin Verlag. Series A. Mathematik. 1999. N 4. P. 7 – 10.
106. **Ermakov S. M., Wagner W.** Monte Carlo difference schemes for the wave equations / Monte Carlo Meth. Appl. 2002. Vol. 8. N 1. P. 1 – 29.
107. **Fishman G. S.** Monte Carlo Concept, Algorithms and Applications. — New York: Springer, 1996. — 698 p.
108. **Gail M. H., Gastwirth J. L.** A scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Gini statistic / JRSS. 1978. Vol. B40. N 3. P. 350 – 357.
109. **Gerlovina V., Nekrutkin V.** Asymptotical behaviour of linear congruent generators / Monte Carlo Meth. Appl. 2005. Vol. 11. N 2. P. 135 – 162.
110. **Glasserman P.** Monte Carlo methods in Financial Engineering. — Springer-Verlag, 2003. — 596 p.
111. **Halton J. H.** Sequential Monte Carlo techniques for solving non-linear systems / Monte Carlo Meth. Appl. 2006. Vol. 12. N 2. P. 113 – 141.
112. Int. Siberian Conf. on Control and Communication. — SIBCON-2015, May 21 – 23, 2015. Omsk, Russia.
113. **Kargapolova N., Ogorodnikov V.** Stochastic models of periodically correlated non-gaussian processes, 2013. P. 101 – 106. In: [94].
114. **Kargapolova N., Ogorodnikov V.** An algorithm for numerical simulation of isotropic random fields and its meteorological application, 2015. P. 392 – 399. In: [95].
115. **Kargapolova N., Saveliev L., Ogorodnikov V.** Modeling of nonstationary processes with periodic properties on basis of Markov Chains. 2011. P. 323 – 330. In: [93].
116. **Kargin B.** Monte Carlo Modelling of the Optical Radiation Transfer in Stochastic scattering media. 2011. P. 350 – 354. In: [93].
117. **Kargin B., Kargin A., Lavrov M.** Monte Carlo Modelling in Problems of Lidar Remote Sensing of Crystal Clouds from Satellites. 2011. P. 355 – 357. In: [93].
118. **Kendall W. S., Liang F., Wang J. S.** Markov Chain Monte Carlo: Innovations and Applications. — World Scientific Publishing Company, 2005. — 239 p.
119. **Litvenko K., Prigarin S., Sagoyakova E.** The accuracy of spectral models for the sea surface simulation. — In: Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach — AMSA'2015 / Proc. Int. Workshop, Novosibirsk, Russia, 14 – 19 September, 2015. P. 400 – 407.
120. **Liu J. S.** Monte Carlo Strategies in Scientific Computing. — Springer, 2003. — 359 p.
121. **Luby M.** Pseudorandomness and Cryptographic Applications. — Princeton, 1996, — 248 p.
122. **Lucy L. G.** Computing radiative equilibria with Monte Carlo technique / Astronomy and Astrophysics. 1999. Vol. 344. P. 282 – 288.
123. **Marsaglia G., Tsang W. W.** A simple method for generating gamma variables / ACM Trans. Math. Software. 2000. Vol. 26. N 3. P. 363 – 372.
124. **Matsumoto M., Nishimura T.** Mersenne Twister A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator / ACM Trans. Modelling Computer Simulation. 1998. N 8. P. 3 – 30.
125. **Mehlig B., Heermann D. W., Forrest B. M.** A global-update simulation algorithm. — Heidelberg, 1991. — 8 p.
126. **Mikhailov G. A.** Parametric estimates by the Monte Carlo method. — Utrecht: VSP, 1995.

127. **Niederreiter H.** Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods / CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). — Philadelphia, 1992. — 244 p.
128. **Nolan J. P.** Parameterizations and modes of stable distributions / Stat. Probab. Lett. 1998. Vol. 38. Issue 2. June 1. P. 187 – 195.
129. **Ogorodnikov V. A., Prigarin S. M.** Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. — Utrecht: VSP, 1996. — 240 p.
130. **Panneton F., L'Ecuyer P.** Improved long — Period Generators Based on Linear Recurrences Modulo 2 / ACM Trans. Math. Software. 2006. Vol. 32. N 1. P. 1 – 16.
131. **Prigarin S. M.** Spectral Models of random fields in Monte Carlo methods. — Utrect: VSP, 2001. — 198 p.
132. **Rjasanow S., Wagner W.** Stochastic numerics for the Boltzmann equation. — Berlin – Heidelberg: Springer Verlag, 2005. — 256 p.
133. **Samorodnitsky G., Taqqu M.** Stable non-gaussian random processes: Stochastic Models with Infinite Variance. — New York – London: Chapman and Hall. 1994.
134. **Sasa S.-I., Hayashi K.** Computation of the Kolmogorov – Sinai entropy using statistical mechanics: Application of an exchange Monte Carlo method / Europhys. Lett. 2006. Vol. 74. N 1. P. 156 – 162.
135. Seventh International Workshop on Simulation May 21 – 25, 2013. Department of Statistical Sciences, Unit of Rimini Alma Mater Studiorum University of Bologna, Italy [http://www2.stat.unibo.it/iws].
136. Simulation. The Theory and Practice / The Seven All-Russia Scientific-Practical Conference on Simulation and its Application in Science and Industry (IMMOD-2015), October 21 – 23, Moscow.
137. Topics in Statistical Simulation / Melas V. B., Mignani St., Monari P., Salmasso L. (eds.). Papers from the 7th Int. Workshop On Statist. Simulation. — New York: Springer Science+Business Media, 2014.
138. **Tsakalides P., Trinic F., Nikias C. L.** Performance Assessment of CFAR processors in Pearson-distributed clutter. Aerospace and Electronic Systems / IEEE Trans. Vol. 36. Issue 4. Oct. 2000. P. 1377 – 1386.
139. **Tsybakov A.** Adaptive estimation of the mode of a multivariate density / J. Nonparam. Statist. 2009. Vol. 17. N 1. P. 83 – 105.
140. **Weron R.** On the Chambers — Mallows — Stuck method for simulating skewed stable random variables / Stat. Probab. Lett. 1996. N 28. P. 165 – 171.
141. **Zadorozhnyi V. N.** Simulation modelling of fractal queues / Proc. Conf. Dynamics of Systems. Mechanisms and Machines. Dynamics, 2014. Art. N 7005703. DOI: 10.11.09/Dynamics.2014.7005703.
142. **Zadorozhnyi V. N.** Cascade Method of Realization of Heavy-Tailed Distributions in Data Network Modelling / Int. Siberian Conf. Control and Communication. SIBCON-2015, May 21 – 23. Sec. Control of the Large-Scale Systems. Omsk, Russia, 2015.
143. **Zadorozhnyi V. N.** Fractal Queues Simulation Peculiarities communications in Computer and Information Science: Springer, 2015. In: [52].

REFERENCES

1. **Antipov M. V.** Granitsy sluchainosti [Borders of randomness] / Preprint N 928. — Novosibirsk: Izd. VTs SO RAN, 1991. — 27 p. [in Russian].
2. **Antipova T. I., Antipov M. V.** Ékspertnaya sistema generatorov statisticheskikh raspredelenii [Expert system of generators of statistical distributions] / Preprint N 1038. — Novosibirsk: Izd. VTs SO RAN, 1995. — 112 p. [in Russian].
3. **Antipov M. V., Lobanov P. V.** Generatory psevdosluchainykh chisel na personal'nykh komp'yuterakh [Generators of pseudo-random numbers on personal computers] / Preprint N 1002. — Novosibirsk: Izd. VTs SO RAN, 1993. — 47 p. [in Russian].
4. **Antipov M. V., Mikhailov G. A.** Ob uluchshenii generatorov sluchainykh chisel s pomoshch'yu summirovaniya po modulyu edinitsa [About improvement of generators of random numbers by means of summation on the module unit] / Preprint N 1059. — Novosibirsk Izd. VTs SO RAN, 1996. — 31 p. [in Russian].
5. **Antonov A. A., Ermakov S. M.** Émpiricheskaya otsenka pogreshnosti kvazi Monte-Karlo vychislenii [Empirical estimation of error of quasi Monte Carlo calculations] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. 1. 2014. N 1. P. 3 – 11 [in Russian].
6. **Artem'ev S. S., Mikhailichenko I. G., Sinitsyn I. N.** Statisticheskoe modelirovanie srochnykh finansovykh operatsii: monografiya [Statistical modelling of urgent financial operations: monograph]. — Novosibirsk: Izd. VTs SO RAN, 1996. — 202 p. [in Russian].
7. **Boev V. D.** Modelirovanie sistem. Instrumental'nye sredstva GPSS World: ucheb. posobie [Simulation of systems. Tool means GPSS World: tutorial]. — St. Petersburg: BHV-Peterburg, 2004. — 368 p. [in Russian].
8. **Bol'shev L. N., Smirnov N. V.** Tablitsy matematicheskoi statistiki [Tables of mathematical statistics]. — Moscow: Nauka, 1983. — 416 p. [in Russian].
9. **Borshchev A. V.** Prakticheskoe agentnoe modelirovanie i ego mesto v arsenale analitika [Practical agent modeling and its place in an arsenal of an analyst] / Exponenta Pro. 2004. N 3 – 4 (http://www.gpss.ru/index-h.html) [in Russian].
10. **Dmitriev A. V., Ermakov S. M., Ermakov K. S.** Parallel'nyi Monte-Karlo metod otsenki amerikanskikh optsionov [The parallel Monte Carlo method of the american options estimation] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. 1. 2013. N 1. P. 72 – 81 [in Russian].
11. **Vagner V., Ermakov S. M.** Stokhasticheskaya ustoichivost' i parallelizm metoda Monte-Karlo [Stochastic stability and parallelism of a Monte-Carlo method] / Dokl. RAN. 2001. Vol. 379. N 4. P. 439 – 441 [in Russian].
12. **Vidyaeva K. O., Ermakov S. M.** K obobshcheniyu metoda Krylova vychisleniya koéffitsientov minimal'nogo mnogochlena [To generalization of a Krylov method for calculation of the minimal polynomial coefficients] / Zh. Matem. Fiz. Vychisl. Matem. 2013. Vol. 53. N 5. P. 1 – 9 [in Russian].
13. **Vinkler G.** Analiz izobrazhenii, sluchainye polya i metody Monte-Karlo na tsepyakh Markova: mat. osnovy [Analysis of images, random fields and methods of Monte Carlo chains: mathematical principles] — Novosibirsk: Geo, 2008. — 440 p. [Russian translation].
14. **Voitishek A. V.** Osnovy metoda Monte-Karlo v algoritmakh i zadachakh [Foundations of a Monte-Carlo method in algorithms and problems]: in 6 parts. — Novosibirsk: Izd-vo NGU, 1997 – 2004 [in Russian].
15. **Voitishek A. V.** Dopolnitel'nye svedeniya o chislennom modelirovanii sluchainykh élementov: ucheb. posobie [Additional information on numerical modelling of stochastic elements: tutorial]. — Novosibirsk: Izd-vo NGU, 2007. — 92 p. [in Russian].
16. **Voitishek A. V., Prigarin S. M.** O funktsional'noi skhodimosti otsenok i modelei v metode Monte-Karlo [About functional convergence of estimations and models in a Monte-Carlo method] / Zh. Matem. Fiz. Vychisl. Matem. 1992. Vol. 32. N 10. P. 1641 – 1651 [in Russian].
17. **Golovanov O. V.** Modelirovanie slozhnykh diskretnykh sistem na ÉVM tret'ego pokoleniya. Opyt primeneniya GPSS [Modeling of difficult discrete systems on the computers of the third generation. Experience of GPSS application]. — Moscow: Énergiya, 1978. — 178 p. [in Russian].
18. **Gladkova L. A., Ermakov S. M.** Rekurrentnye algoritmy Monte-Karlo dlya resheniya kineticheskikh uravnenii [Monte-Carlo recurrent algorithms for the decision of the kinetic equations] / Statisticheskie modeli s prilozheniyami v ékonometrike i smezhnykh oblastyakh [Statistical models with applications in econometrics and related fields]. — St. Petersburg: Izd-vo NIIKh SPbGU, 1999. P. 50 – 75 [in Russian].
19. **Grigor'ev Yu. D.** Gipoteza éksponentsial'nosti: metodologicheskii aspekt [Hypothesis of exponentiality: methodological aspect] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2016. Vol. 82. N 1. P. 69 – 80 [in Russian].
20. Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin [Dynamics of systems, mechanisms and machinery] / IX Int. IEEE Sci.-Tech. Conf. November, 11 – 13, 2014, Omsk, Russia [in Russian].
21. **Ermakov S. M.** O mul'tiplikativnom datchike sluchainykh chisel [About the multiplicative random-number generator] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. 1. 2003. Issue 3. P. 23 – 30 [in Russian].
22. **Ermakov S. M.** Metod Monte-Karlo v vychislitel'noi matematike. Vvodnyi kurs [Monte-Carlo method in calculus mathematics. An introduction course]. — St. Petersburg: Neva Dialekt; Moscow: Binom, 2009. — 192 p. [in Russian].
23. **Ermakov S. M.** Parametricheski razdelimye algoritmy [Parametric separable algorithms] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. 1. 2010. N 4. P. 25 – 31 [in Russian].
24. **Ermakov S. M., Adamov A. V.** O stokhasticheskoi ustoichivosti metoda Monte-Karlo (sluchai operatorov) [About stochastic stability of a Monte-Carlo method (a case of operators] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. 1. 2004. N 2. P. 3 – 8 [in Russian].
25. **Ermakov S. M., Belyaeva A. A.** O metode Monte-Karlo s zapominaniem promezhutochnykh rezul'tatov [About a Monte-Carlo method with storage of intermediate results] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. Matem. Mekh. Astron. 1996. Issue 29. N 3. P. 5 – 8 [in Russian].
26. **Ermakov S. M., Vidyaeva K. O.** Ob otsenke spektra lineinogo operatora [About an estimation of the linear operator spectrum] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. 1. 2012. N 1. P. 11 – 17 [in Russian].

27. **Ermakov S. M., Ivanova A. V.** O stokhasticheskoi ustoichivosti raznostnykh skhem [About stochastic stability of the difference schemes] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. Matem. Mekh. Astron. 1991. Issue 1. N 1. P. 30 – 34 [in Russian].
28. **Ermakov S. M., Kaloshin I. V.** Metod Monte-Karlo dlya resheniya sistem uravnenii s kvadratichnoi nelineinost'yu [Monte-Carlo method for the decision of systems of the equations with square-law non-linearity] / Leonov G. A. (ed.). Nelineinye dinamicheskie sistemy [Non-linear Dynamical Systems]. N 5. — St. Petersburg: Izd-vo SPbGU, 2003 [in Russian].
29. **Ermakov S. M., Kaloshin I. V., Timofeev K. A.** Metod iskusstvennogo khaosa dlya resheniya metodom Monte-Karlo uravnenii s kvadratichnoi nelineinost'yu [Artificial chaos method for the decision by Monte-Carlo method of the equations with square-law nonlinearity] / Matematicheskie modeli. Teoriya i prilozheniya [Mathematical models. Theory and Applications]. N 7. — St. Petersburg: Izd-vo SPbGU, 2006. P. 3 – 20 [in Russian].
30. **Ermakov S. M., Leora S. N.** Metod Metropolisa v zadachakh poiska ékstremuma [The Metropolis method in problems of search of an extremum / Matematicheskie modeli. Teoriya i prilozheniya [Mathematical models. Theory and Applications]. N 11. P. 72 – 82. — St. Petersburg: Izd-vo SPbGU, 2010 [in Russian].
31. **Ermakov S. M., Likinova O. M., Kaloshin I. V.** Ob odnoi iteratsionnoi skheme resheniya zadach s kvadratichnoi nelineinost'yu [About one iterative scheme for the decision of problems with square-law non-linearity] / Matematicheskie modeli. Teoriya i prilozheniya [Mathematical models. Theory and Applications]. N 6. — St. Petersburg: Izd-vo NIIMM, 2005. P. 26 – 33 [in Russian].
32. **Ermakov S. M., Melas V. B.** Matematicheskii éksperiment s modelyami slozhnykh stokhasticheskikh sistem [Mathematical experiment with models of difficult stochastic systems]. — St. Petersburg: Izd-vo SPbGU, 1993. — 270 p. [in Russian].
33. **Ermakov S. M., Misov T.** Modelirovanie σ^2-raspredeleniya [Modelling of σ^2- distributions] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. 1. 2005. N 4. P. 53 – 60 [in Russian].
34. **Ermakov S. M., Mikhailov G. A.** Kurs statisticheskogo modelirovaniya [A course of statistical modelling]. — Moscow: Nauka, 1976. — 320 p. [in Russian].
35. **Ermakov S. M., Mikhailov G. A.** Statisticheskoe modelirovanie [Statistical modelling]. — Moscow: Nauka, 1982. — 296 p. [in Russian].
36. **Ermakov S. M., Rasulov A. S., Bakaev M. T., Veselovskaya A. Z.** Izbrannye algoritmy metoda Monte-Karlo [The selected algorithms of a Monte Carlo method]. — Tashkent: Izd-vo TashGU, 1992. 132 p. [in Russian].
37. **Ermakov S. M., Rukavishnikova A. I.** Kvazi Monte-Karlo algoritmy resheniya sistem lineinykh algebraicheskikh uravnenii [Quasi Monte Carlo algorithms for the decision of the linear algebraic equations systems] / Matematicheskie modeli. Teoriya i prilozheniya [Mathematical models. Theory and Applications]. N 6. — St. Petersburg: Izd-vo VVM, 2005. P. 3 – 26 [in Russian].
38. **Ermakov S. M., Rukavishnikova A. P., Timofeev K. A.** O nekotorykh stokhasticheskikh i kvazistokhasticheskikh metodakh resheniya uravnenii [About some stochastic and quasistochastic methods of the decision of the equations] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. 1. 2008. N 4. P. 43 – 51 [in Russian].
39. **Ermakov S. M., Sipin A. S.** Metod Monte-Karlo i parametricheskaya razdelimost' algoritmov [A Monte Carlo method and parametrical separability of algorithms]. — St. Petersburg: Izd-vo SPbGU, 2014. — 248 p. [in Russian].
40. **Zadorozhnyi V. N.** K diskussii o kachestve datchikov sluchainykh chisel [On Discussion about quality of random number generators] / Imitatsionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika [Simulation. Theory and practice] (IMMOD 2009). Proc. 3rd All-Russia Conf. Vol. 1. — St. Petersburg: TsT SS, 2009. P. 128 – 134 [in Russian].
41. **Zadorozhnyi V. N.** Osnovnaya zadacha fraktal'noi teorii massovogo obsluzhivaniya [Main task of fractal queues theory] / Omsk. Nauch. Vestnik. 2013. N 3(123). P. 9 – 13 [in Russian].
42. **Zadorozhnyi V. N.** Imitatsionnoe i statisticheskoe modelirovanie: ucheb. posobie [Simulation and statistical modelling: a tutorial]. 2nd Edition. — Omsk: Izd-vo OmGTU, 2013. — 136 p. [in Russian].
43. **Zadorozhnyi V. N.** Imitatsionnoe modelirovanie: ucheb. posobie [Introduction to the simulation: a tutorial]. — Omsk: Izd-vo OmGTU, 2014. — 196 p. [in Russian].
44. **Zadorozhnyi V. N.** Vvedenie v statisticheskoe modelirovanie: ucheb. posobie [Introduction to statistical modelling: a tutorial]. — Omsk: Izd-vo OmGTU, 2014. — 108 p. [in Russian].
45. **Zadorozhnyi V. N.** Osobennosti modelirovaniya sistem massovogo obsluzhivaniya s tyazhelymi khvostami raspredelenii na GPSS World. Metod ARAND [Fractal queues simulation peculiarities using GPSS World. Method ARAND] / Omsk. Nauch. Vestnik. 2015. N 3(143). P. 307 – 311 [in Russian].
46. **Zadorozhnyi V. N.** Realizatsiya bol'shikh vyborok pri modelirovanii sistem massovogo obsluzhivaniya na GPSS World [Realization of Large Samples at Modeling Queuing Systems in GPSS World] / Imitatsionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika [Simulation. Theory and practice] (IMMOD 2015). Proc. 7th All-Russia Conf. October 21 – 23, 2015. Vol. 1. — Moscow: Izd. IPU im. V. A. Trapeznikova RAN. P. 225 – 230 [in Russian].
47. **Zadorozhnyi V. N.** Metod ARAND [Method ARAND] / Imitatsionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika [Simulation. Theory and practice] (IMMOD 2015). Proc. 7th All-Russia Conf. October 21 – 23, 2015. Vol. 1. — Moscow: Izd. IPU im. V. A. Trapeznikova RAN. P. 239 – 244 [in Russian].
48. **Zadorozhnyi V. N., Kutuzov O. I.** Metody modelirovaniya ocheredei v usloviyakh fraktal'nogo trafika v setyakh s kommutatsiei paketov: Ucheb. posobie [Simulation methods queues in a fractal traffic in post packet switched networks: textbook, allowance]. — Omsk: Izd-vo OmGTU, 2013. — 104 p. [in Russian].
49. **Zadorozhnyi V. N., Kutuzov O. I.** Problemy i tekhnika modelirovaniya fraktal'nykh ocheredei [Problems and technology of modelling fractal queues] / Imitatsionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika [Simulation. Theory and practice] (IMMOD 2013). Proc. 6th All-Russia Conf. Vol. 1. — Kazan, 2013. P. 143 – 148 [in Russian].
50. **Zadorozhnyi V. N., Sem¸nova I. I.** Upravlenie slozhnymi tekhnicheskimi ob''ektami i paradigmy imitatsionnogo modelirovaniya [Controlling of complex technical objects and paradigms of simulation] / Omsk. Nauch. Vestnik. 2006. N 6(41). P. 102 – 108 [in Russian].
51. **Zolotar¸v V. M.** O predstavlenii plotnostei ustoichivykh zakonov spetsial'nymi funktsiyami [About representation of densities of stable laws by special functions] / TVP. 1994. Vol. 39. N 2. P. 429 – 437 [in Russian].
52. Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie [Information technologies and mathematical modelling (ITMM-2015)] / Proc. XIV A. F. Terpugov Int. Conf. Anzhero-Sudzhensk. Russia, November 18 – 22, 2015. Part 1. Tomsk: Izd-vo TGU. — 218 p. [in Russian].
53. **Kargin B. A., Mikhailov G. A.** Issledovanie éffektivnosti ispol'zovaniya asimptoticheskikh reshenii v raschetakh po metodu Monte-Karlo [The research of efficiency of asymptotic decisions using in calculations by Monte Carlo method] / Zh. Matem. Fiz. Vychisl. Matem. 1972. Vol. 12. N 1. P. 150 – 158 [in Russian].
54. **Karpov Yu. G.** Imitatsionnoe modelirovanie sistem. Vvedenie v modelirovanie s AnyLogic 5 [Simulation of systems. Introduction in modelling with AnyLogic 5]. — St. Petersburg: BHV Peterburg, 2005. — 400 p. [in Russian].
55. **Knuth D. E.** Iskusstvo programmirovaniya dlya ÉVM [The Art of Computer Programming]. Vol. 2. Poluchislennye algoritmy [Seminumerical algorithms]. — Moscow: Mir, 1997. — 724 p. [Russian translation].
56. **Kochubei Yu. K.** Statisticheskoe modelirovanie kineticheskikh protsessov [Statistical modelling of kinetic processes: the monography]. — Sarov: RFYaTs-VNIIÉF, 2004. — 245 p. [in Russian].
57. **Kudryavtsev E. M.** GPSS World. Osnovy imitatsionnogo modelirovaniya razlichnykh sistem. Ser. Proektirovanie [Bases of simulation of various systems. Series Designing]. — Moscow: DMK Press, 2004. — 320 p. [in Russian].
58. **Kuz'mina A. V.** Modelirovanie gamma-protsessa i otsenka ego parametrov [Modeling of gamma process and an estimation of its parameters] / Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya statistika i ikh prilozheniya [Probability theory, mathematical statistics, and their applications]. Proc. Int. Conf., dedicated to the 75th anniversary of Prof. G. I. Medvedev. Minsk, February 22 – 25, 2010. — Minsk: RIVSh, 2010. P. 178 – 185 [in Russian].
59. **Mazurkin P. M.** Statisticheskoe modelirovanie: Évriko-matem. podkhod [Statistical modelling: Evriko-matematical approach]. — Joshkar-Ola: Izd. MarGTU, 2001. — 99 p. [in Russian].
60. **Mikhailov G. A.** Rekurrentnye formuly i printsip Bellmana v metode Monte-Karlo [Recurrent formulas and a Bellman principle in a Monte Carlo method] / Preprint N 1001. — Novosibirsk: Izd. VTs SO RAN, 1993. — 32 p. [in Russian].
61. **Mikhailov G. A.** Vesovye metody Monte-Karlo [The Monte Carlo weight methods]. — Novosibirsk: Nauka, 2000. — 248 p. [in Russian].
62. **Mikhailov G. A.** Vesovye algoritmy metoda Monte-Karlo s vetvleniem [Weight algorithms of a Monte Carlo method with branching] / Dokl. RAN. 2008. Vol. 420. N 1. P. 24 – 26 [in Russian].

63. **Mikhailov G. A., Averina T. A.** Algoritm «maksimal'nogo secheniya» v metode Monte-Karlo [Algorithm of the "maximum section" in a Monte Carlo method] / Dokl. RAN. 2009. Vol. 428. N 2. P. 163 – 165 [in Russian].
64. **Mikhailov G. A., Voitishek A. V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo: ucheb. posobie dlya stud. vuzov [Numerical statistical modelling. The Monte Carlo methods: tutorial]. — Moscow: Izd. Tsentr "Akademiya," 2006. — 368 p. [in Russian].
65. **Mikhailov G. A., Medvedev I. N.** Ispol'zovanie sopryazhennykh uravnenii v metode Monte-Karlo [The use of the associated equations in a Monte Carlo method]. — Novosibirsk: Izd. IVMiMG, 2009. — 168 p. [in Russian].
66. **Mikhailov G. A., Medvedev I. N.** Optimizatsiya vesovykh algoritmov statisticheskogo modelirovaniya [The optimization of weight algorithms of statistical modelling]. — Novosibirsk: Omega Print, 2011. — 302 p. [in Russian].
67. **Mikhailov G. A., Ukhinov S. A., Chimaeva A. S.** Algoritmy metoda Monte-Karlo dlya vosstanovleniya indikatrisy rasseyaniya s uchetom polyarizatsii [The algorithms of a Monte Carlo method for the renewal of dispersion indicatrix taking into account polarization] / Dokl. RAN. 2008. Vol. 423. N 2. P. 161 – 164 [in Russian].
68. **Nikulina I. V.** Imitatsionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika [Simulation. The theory and practice]. IMMOD-2013 / Inf. Tekhnol. Vychisl. Sist. 2014. N 1. P. 78 – 82 [in Russian].
69. **Ogorodnikov V. A.** Kusochno-lineinaya approksimatsiya diskretnoi korrelyatsionnoi funktsii [Piecewise linear approximation of discrete correlation function] / Trudy VTs SO RAN. Ser. Vychisl. Matem. — Novosibirsk, 1993. N 1. P. 25 – 30 [in Russian].
70. **Orlov A. I.** Kommentarii k stat'e S. M. Ermakova «O datchikakh sluchainykh chisel» [Comment to a paper "About random-number generators"] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 1993. Vol. 59. N 7. P. 51 – 51 [in Russian].
71. **Orlov A. I.** Organizatsionno-ékonomicheskoe modelirovanie: uchebnik [Economic-organizing modelling: the textbook]. In 3 parts. Part 1. Nechislovaya statistika [The non-numerical statistics]. — Moscow: Izd. MGTU im. N. É. Baumana, 2009. — 671 p. [in Russian].
72. **Prigarin S. M.** Vvedenie v chislennoe modelirovanie sluchainykh protsessov i polei [Introduction in numerical modelling of random processes and fields]. — Novosibirsk: NGU, 1999 [in Russian].
73. **Prigarin S. M.** Metody chislennogo modelirovaniya sluchainykh protsessov i polei [Methods of numerical modelling of random processes and fields]. — Novosibirsk: Izd. IVMiMG SO RAN, 2005. — 258 p. [in Russian].
74. **Prigarin S. M.** Programmirovanie mul'tiplikativnykh generatorov psevdosluchainykh chisel [Programming of multiplicative generators of pseudo-random numbers] / [73, App. G. P. 222 – 238] [in Russian].
75. **Pronin L. N.** Metod statisticheskikh ispytanii: ucheb.-metod. posobie [Method of statistical tests: tutorial]. — St. Petersburg: Izd. SPbGIEA, 1999. — 137 p. [in Russian].
76. **Rasulov A. S.** Metod Monte-Karlo dlya resheniya nelineinykh zadach [A Monte Carlo method for the decision of nonlinear problems]. — Tashkent: FAN, 1992. — 104 p. [in Russian].
77. Rukovodstvo pol'zovatelya po GPSS World [The User's guide on GPSS World]. — Kazan: Master Lain, 2002. — 384 p. [Russian translation].
78. **Ryzhikov Yu. I.** Imitatsionnoe modelirovanie. Teoriya i tekhnologii [Simulation. The theory and technologies]. — St. Petersburg: KORONA; Moscow: Alteks-A, 2004. — 384 p. [in Russian].
79. **Sabel'fel'd K. K.** Metody Monte-Karlo v kraevykh zadachakh [The Monte Carlo methods in boundary problems]. — Moscow: Nauka, 1989. — 280 p. [in Russian].
80. **Sabel'fel'd K. K.** Statisticheskoe modelirovanie v zadachakh matematicheskoi fiziki: ucheb. posobie [Statistical modelling in problems of mathematical physics: tutorial]. — Novosibirsk: Izd. NGU, 1992. — 231 p. [in Russian].
81. **Seleznev V. D., Denisov K. S.** Issledovanie svoistv kriteriev soglasiya funktsii raspredeleniya dannykh s gaussovoi metodom Monte-Karlo dlya malykh vyborok [The research of goodness of fit criteria properties of data distribution function with Gaussian function by a Monte-Carlo method for small samples] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2005. Vol. 71. N 1. P. 68 – 72 [in Russian].
82. **Sobol' I. M., Statnikov R. B.** Vybor optimal'nykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriyami [The choice of optimal parametres in problems with many criteria]. — Moscow: Drofa, 2006. — 226 p. [in Russian].
83. Sovremennye problemy vychislitel'noi matematiki i matematicheskogo modelirovaniya: Sb. statei [The modern problems of calculus mathematics and mathematical modelling: a collection of papers]. In 2 vols. — Novosibirsk: Izd. IVMiMG, 2009. — 168 p. [in Russian].
84. **Talanov V. V.** Ispol'zovanie baz dannykh dlya opisaniya geometrii v zadachakh modelirovaniya perenosa izlucheniya [The use of databases for the description of geometry in problems of radiative transport modelling]. — Protvino: Izd. IFVÉ, 1994. — 6 p. [in Russian].
85. **Timofeev K. A.** Ob odnom klasse metodov Monte-Karlo dlya resheniya uravnenii s kvadratichnoi nelineinost'yu uravnenii [About one class of Monte Carlo methods for the equations decision with square-law nonlinearity] / Vestnik S.-Peterburg. Univ. Ser. 1. 2008. N 3. P. 23 – 28 [in Russian].
86. **Tomashevskii V. N., Zhdanova E. G.** Imitatsionnoe modelirovanie v srede GPSS [Simulation in the GPSS environment]. — Moscow: Bestseller, 2003. — 416 p. [in Russian].
87. Uchebnoe posobie po GPSS World [The Manual on GPSS World]. — Kazan: Master Lain, 2002. — 270 p. [Russian translation].
88. **Chen Hayloon**. Metod modelirovaniya ustoichivykh sluchainykh velichin [A modelling method of steady random variables] / Teoriya veroyatnostei, matematicheskaya statistika i ikh prilozheniya [Probability theory, mathematical statistics, and their applications]. Proc. Int. Conf., dedicated to the 75th anniversary of Prof. G. I. Medvedev. Minsk, 22 – 25 February 2010. — Minsk: RIVSh, 2010. P. 362 – 367 [in Russian].
89. **Sheikin E. G.** Model'noe differentsial'noe sechenie uprugogo rasseyaniya élektronov na atomakh dlya modelirovaniya prokhozhdeniya élektronov v veshchestve metodom Monte-Karlo [The modelling differential section of electron elastic dispersion on atoms for modelling of electron passing in substance by the Monte-Carlo method] / Zh. Tekhn. Fiz. 2010. Vol. 80. N 1. P. 3 – 11 [in Russian].
90. **Shryber T. J.** Modelirovanie na GPSS [The modelling in GPSS environment]. — Moscow: Mashinostroenie, 1980. — 592 p. [Russian translation].
91. **Étenko A. V.** Modelirovanie metodom Monte-Karlo protsessa registratsii neitronov v zhidkikh stsintillyatorakh, soderzhashchikh gadolinii [The modelling by a Monte-Carlo method of neutrons registration process in liquid scintillators, containing the gadolinium]. — Moscow: Izd. RNTs KI, 2007. — 8 p. [in Russian].
92. **Ambos A. Ju., Mikhailov G. A.** Statistical Modeling of the exponentially correlated multivariate random field / Rus. J. Numer. Analys. Math. Modelling. 2011. Vol. 26. N 3. P. 213 – 232.
93. Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference / AMSA'2011. Proc. Int. Workshop. Novosibirsk, Russia, 20 – 22 September, 2011.
94. Applied Methods of Statistical Analysis. Application in Survival Analysis, Reliability and Quality Control / AMSA'2013. Proc. Int. Workshop. Novosibirsk, Russia, 25 – 27 September, 2013.
95. Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach / AMSA'2015. Proc. Int. Workshop. Novosibirsk: NSTU publisher, Russia. September, 2015. P. 14 – 19 [http://amsa.conf.nstu.ru/amsa2015/about-workshop/AMSA2015-proceedings.pdf].
96. **Antipov M. V., Mikhailov G. A.** On the improvement in random number generators by using a modulo 1 sum / Rus. J. Numer. Analys. Math. Modelling. 1996. Vol. 1, 2. P. 93 – 111.
97. **Bailey D. H., Borwein P. B., Ploujje S.** On the rapid computation of various polylogarithmic constants / Math. Comput. 1997. Vol. 66. N 218. P. 903 – 913.
98. **Bjorkman J. E., Wood K.** Radiative equilibrium and temperature correction in Monte Carlo radiation transfer / Astrophys. J. 2001. Vol. 554. P. 282 – 288.
99. **Borak S., Hardle W., Weron R.** Stable Distributions / SFB 649. Discussion Paper. Humboldt-Universität zu Berlin. — Berlin, 2005.
100. **Brednikhin S., Kargin B.** Monte Carlo Modelling the Radiation Heat Transfer with Temperature Correction / AMSA-2011. P. 426 – 431.
101. **Dyadkin I. G., Hamilton K. G.** A study of 128-bit multipliers for congruential pseudorandom number generators / Comptuter Physics Communications. 2000. Vol. 125. P. 239 – 258.
102. **Chambers J. M., Mallows C. L., Stuck B. W.** A method for simulating stable random variables / J. Am. Assoc. 1976. N 71. P. 340 – 344.
103. **Ermakov S. M.** Stochastical stability, Neumann – Ulam scheme and particle methods / IVth IMACS Seminar on Monte Carlo Methods, September 15 – 19,2003, Berlin. P. 55.
104. **Ermakov S. M., Kaloshin I.** Solving the nonlinear algebraic equations with Monte Carlo method / Advan. Stochast. Simul. Meth. — Boston – Basel – Berlin: Birkhauser, 2000. P. 3 – 15.

105. **Ermakov S. M., Schwabe R.** On randomizing estimators in linear regression models / Freie Universität Berlin Verlag. Series A. Mathematik. 1999. N 4. P. 7 – 10.
106. **Ermakov S. M., Wagner W.** Monte Carlo difference schemes for the wave equations / Monte Carlo Meth. Appl. 2002. Vol. 8. N 1. P. 1 – 29.
107. **Fishman G. S.** Monte Carlo Concept, Algorithms and Applications. — New York: Springer, 1996. — 698 p.
108. **Gail M. H., Gastwirth J. L.** A scale-free goodness-of-fit test for the exponential distribution based on the Gini statistic / JRSS. 1978. Vol. B40. N 3. P. 350 – 357.
109. **Gerlovina V., Nekrutkin V.** Asymptotical behaviour of linear congruent generators / Monte Carlo Meth. Appl. 2005. Vol. 11. N 2. P. 135 – 162.
110. **Glasserman P.** Monte Carlo methods in Financial Engineering. — Springer-Verlag, 2003. — 596 p.
111. **Halton J. H.** Sequential Monte Carlo techniques for solving non-linear systems / Monte Carlo Meth. Appl. 2006. Vol. 12. N 2. P. 113 – 141.
112. Int. Siberian Conf. on Control and Communication. — SIBCON-2015, May 21 – 23, 2015. Omsk, Russia.
113. **Kargapolova N., Ogorodnikov V.** Stochastic models of periodically correlated non-gaussian processes, 2013. P. 101 – 106. In: [94].
114. **Kargapolova N., Ogorodnikov V.** An algorithm for numerical simulation of isotropic random fields and its meteorological application, 2015. P. 392 – 399. In: [95].
115. **Kargapolova N., Saveliev L., Ogorodnikov V.** Modeling of nonstationary processes with periodic properties on basis of Markov Chains. 2011. P. 323 – 330. In: [93].
116. **Kargin B.** Monte Carlo Modelling of the Optical Radiation Transfer in Stochastic scattering media. 2011. P. 350 – 354. In: [93].
117. **Kargin B., Kargin A., Lavrov M.** Monte Carlo Modelling in Problems of Lidar Remote Sensing of Crystal Clouds from Satellites. 2011. P. 355 – 357. In: [93].
118. **Kendall W. S., Liang F., Wang J. S.** Markov Chain Monte Carlo: Innovations and Applications. — World Scientific Publishing Company, 2005. — 239 p.
119. **Litvenko K., Prigarin S., Sagoyakova E.** The accuracy of spectral models for the sea surface simulation. — In: Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach — AMSA'2015 / Proc. Int. Workshop, Novosibirsk, Russia, 14 – 19 September, 2015. P. 400 – 407.
120. **Liu J. S.** Monte Carlo Strategies in Scientific Computing. — Springer, 2003. — 359 p.
121. **Luby M.** Pseudorandomness and Cryptographic Applications. — Princeton, 1996, — 248 p.
122. **Lucy L. G.** Computing radiative equilibria with Monte Carlo technique / Astronomy and Astrophysics. 1999. Vol. 344. P. 282 – 288.
123. **Marsaglia G., Tsang W. W.** A simple method for generating gamma variables / ACM Trans. Math. Software. 2000. Vol. 26. N 3. P. 363 – 372.
124. **Matsumoto M., Nishimura T.** Mersenne Twister A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator / ACM Trans. Modelling Computer Simulation. 1998. N 8. P. 3 – 30.
125. **Mehlig B., Heermann D. W., Forrest B. M.** A global-update simulation algorithm. — Heidelberg, 1991. — 8 p.
126. **Mikhailov G. A.** Parametric estimates by the Monte Carlo method. — Utrecht: VSP, 1995.
127. **Niederreiter H.** Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods / CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). — Philadelphia, 1992. — 244 p.
128. **Nolan J. P.** Parameterizations and modes of stable distributions / Stat. Probab. Lett. 1998. Vol. 38. Issue 2. June 1. P. 187 – 195.
129. **Ogorodnikov V. A., Prigarin S. M.** Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. — Utrecht: VSP, 1996. — 240 p.
130. **Panneton F., L'Ecuyer P.** Improved long — Period Generators Based on Linear Recurrences Modulo 2 / ACM Trans. Math. Software. 2006. Vol. 32. N 1. P. 1 – 16.
131. **Prigarin S. M.** Spectral Models of random fields in Monte Carlo methods. — Utrect: VSP, 2001. — 198 p.
132. **Rjasanow S., Wagner W.** Stochastic numerics for the Boltzmann equation. — Berlin – Heidelberg: Springer Verlag, 2005. — 256 p.
133. **Samorodnitsky G., Taqqu M.** Stable non-gaussian random processes: Stochastic Models with Infinite Variance. — New York – London: Chapman and Hall. 1994.
134. **Sasa S.-I., Hayashi K.** Computation of the Kolmogorov — Sinai entropy using statistical mechanics: Application of an exchange Monte Carlo method / Europhys. Lett. 2006. Vol. 74. N 1. P. 156 – 162.
135. Seventh International Workshop on Simulation May 21 – 25, 2013. Department of Statistical Sciences, Unit of Rimini Alma Mater Studiorum University of Bologna, Italy [http://www2.stat.unibo.it/iws].
136. Simulation. The Theory and Practice / The Seven All-Russia Scientific-Practical Conference on Simulation and its Application in Science and Industry (IMMOD-2015), October 21 – 23, Moscow.
137. Topics in Statistical Simulation / Melas V. B., Mignani St., Monari P., Salmasso L. (eds.). Papers from the 7th Int. Workshop On Statist. Simulation. — New York: Springer Science+Business Media, 2014.
138. **Tsakalides P., Trinic F., Nikias C. L.** Performance Assessment of CFAR processors in Pearson-distributed clutter. Aerospace and Electronic Systems / IEEE Trans. Vol. 36. Issue 4. Oct. 2000. P. 1377 – 1386.
139. **Tsybakov A.** Adaptive estimation of the mode of a multivariate density / J. Nonparam. Statist. 2009. Vol. 17. N 1. P. 83 – 105.
140. **Weron R.** On the Chambers — Mallows — Stuck method for simulating skewed stable random variables / Stat. Probab. Lett. 1996. N 28. P. 165 – 171.
141. **Zadorozhnyi V. N.** Simulation modelling of fractal queues / Proc. Conf. Dynamics of Systems. Mechanisms and Machines. Dynamics, 2014. Art. N 7005703. DOI: 10.11.09/Dynamics.2014.7005703.
142. **Zadorozhnyi V. N.** Cascade Method of Realization of Heavy-Tailed Distributions in Data Network Modelling / Int. Siberian Conf. Control and Communication. SIBCON-2015, May 21 – 23. Sec. Control of the Large-Scale Systems. Omsk, Russia, 2015.
143. **Zadorozhnyi V. N.** Fractal Queues Simulation Peculiarities communications in Computer and Information Science: Springer, 2015. In: [52].