Математические методы исследования

УДК 519.24

ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТА

© Н. В. Скибицкий[1]

Статья поступила 29 апреля 2016 г.

Рассмотрена задача нахождения прямых и обратных статических характеристик объекта при наличии помех. Показано, что при решении задачи в рамках статистического подхода часто игнорируется факт наличия различных источников и порождающих факторов моделей помех, что ведёт к существенному искажению оценок ошибок и формированию неадекватной характеристики преобразования. Определены типы и источники ошибок в определении статической характеристики и условия, при которых применение статистического подхода к ее построению является правомерным.

Ключевые слова: статическая характеристика; эксперимент; закон распределения; ошибки в переменных.

Модели, позволяющие получить аналитическое описание явления путем сглаживания неточных экспериментальных данных, применяются для решения широкого класса прикладных задач. В этом случае часто полагают, что статическая характеристика системы может быть адекватно описана линейной по параметрам моделью

$$y = f(x) = b_1\varphi_1(x) + \ldots + b_m\varphi_m(x), \qquad (1)$$

где $\varphi_i(x)$ — известные базисные функции; b_i — неизвестные параметры; x и y — входная и выходная переменные.

При этом обычно предпочитают иметь функцию, заданную формулой по возможности более простого вида, например: линейную $y = b_1 + b_2x$; квадратичную $y = b_1 + b_2x + b_3x^2$; степенную $y = b_1 + b_2x^m$; логарифмическую $y = b_1 + b_2\log(x)$. Нелинейные функции обычно сводят к линейным с помощью замены переменных.

Статическая характеристика преобразователя (1) позволяет решать так называемые «прямые» задачи, связанные с оценкой значения y при заданном значении x. Однако при исследовании систем автоматического управления, следящих систем, в метрологии и т.д., кроме прямой задачи необходимо решать и обратную, а именно находить оценку x при заданном значении y:

$$x = f^{-1}(y) = \psi(a_1, \ldots, a_m, y), \qquad (2)$$

где a_i — неизвестные параметры, выражаемые через параметры b_i. Очевидно, что в обратной функции (2) зависимая и независимая переменные меняются местами и задача имеет смысл, если только функция $f(x)$ зависит от единственной входной переменной x и является однозначной и монотонной.

Задача построения прямой и обратной функций играет важную роль в метрологии. В этом случае в измерительном преобразователе реализуется функция преобразования, называемая градуировочной характеристикой, являющаяся оценкой обратной функции $x = f^{-1}(y)$ и относящаяся к числу нормируемых метрологических характеристик средств измерений. Определение оценок коэффициентов обратной зависимости (2) и ее погрешности рассматривется как задача градуировки.

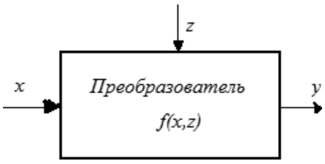
Сложность решения задачи построения обратной статической характеристики обусловливается наличием ошибок в экспериментальных данных и необходимостью обращения функции преобразования.

В настоящее время не существует общепринятой универсальной процедуры построения обратной статической характеристики, но наиболее детально она разработана в рамках статистического подхода [1, 2]. Для этого обычно первоначально по экспериментальным данным строят прямую функцию, которую затем используют для нахождения входной величины x по результату измерения выходной величины y в соответствии с соотношением (2).

Статистический подход к построению прямой характеристики объекта

Для выяснения наиболее существенных особенностей этого подхода рассмотрим его применительно к системам с одним входом и одним выходом, когда

[1] Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия; e-mail: SkibitskyNV@mpei.ru



Блок-схема «черного ящика»

функция преобразования объекта является линейной по параметрам.

Задача построения прямых статических характеристик объектов основана на концепции «черного ящика» (см. рисунок), где x — входная переменная; y — выходная переменная объекта; z — шум, порождающий ошибки в выходной переменной; $f(x, z)$ — статическая характеристика объекта (преобразователя). В ходе исследования измерению доступны только значения x и y.

Основой для решения задачи построения сглаживающей функции являются данные эксперимента, которые можно представить в виде множества $\{x_i, y_i, i = 1 \ldots N\}$, содержащего N пар значений измеренных величин x_i и y_i.

При использовании статистических методов оценивание погрешности прямой характеристики предусматривает построение доверительных интервалов для заданной доверительной вероятности.

Общая последовательность действий при построении прямой характеристики включает следующие этапы.

1. *Выбор модели описания неопределенности и неточности измерений эксперимента.* Источниками ошибок могут быть:

неправильная установка уровней факторов в ходе проведения эксперимента;

вариабельность переменных в ходе проведения эксперимента;

погрешность измерительного устройства или метода измерения;

округление данных при их регистрации;

неправильный выбор формы сглаживающей функции и т.п.

Для описания механизма действия ошибок чаще всего используют модель аддитивной помехи

$$y = y_0 + e_y, \; x = x_0 + e_x, \tag{3}$$

где y_0, x_0 — точные значения переменных. При этом выделяют три случая:

аддитивная модель ошибки определения y с постоянной дисперсией —

$$e_x \equiv 0, \; e_y \neq 0, \; \sigma_y^2 = \mathrm{const}; \tag{4а}$$

аддитивная модель ошибки определения y, когда дисперсия ошибки y зависит от x —

$$e_x \equiv 0, \; e_y \neq 0; \; \sigma_y^2 = \mathrm{var}; \tag{4б}$$

аддитивная ошибка в обеих переменных x и y —

$$e_y \neq 0, \; e_x \neq 0. \tag{4в}$$

Случай (4а) обычно принимается при контролируемом эксперименте, когда считается, что значения измеряемой величины x устанавливаются с достаточно высокой точностью на заранее заданных уровнях. Случай (4б) возникает, если имеет место неоднородность дисперсии в опытах, т.е. дисперсии ошибок измерения зависят от значения x. Случай (4в) типичен для неконтролируемого эксперимента, когда ошибки присутствуют как во входной, так и в выходной переменных. Каждый из этих случаев вносит свою специфику в процедуру обработки данных. На практике обычно постулируется нормальное распределение ошибки с нулевым математическим ожиданием и постоянной дисперсией σ_e^2.

В действительности при любом типе эксперимента переменные x и y определяются с ошибками e_x и e_y соответственно, которые могут иметь различную природу;

ошибки более сложным образом зависят от значений переменных, в частности, могут иметь место случай мультипликативной помехи

$$y = y_0 e_y, \; x = x_0 e_x, \tag{5}$$

а также комбинированная модель воздействия ошибок.

2. *Выбор вида функции.* При выборе вида функции стараются подобрать простую, желательно линейную по параметрам функцию, наиболее адекватно описывающую экспериментальные данные. Поэтому часто используют функции, представленные после формулы (1). Все они являются линейными по параметрам, т.е. могут быть записаны в виде (1), где коэффициенты b_i, $i = 1, \ldots, n$, подлежат оцениванию.

Для выбора вида функции применяют хорошо разработанные в статистической литературе приемы, включающие предварительный визуальный, а затем численный анализ экспериментальных данных с последующим сравнением возможных сглаживающих кривых. В качестве меры точности предсказания, как правило, используется коэффициент множественной корреляции.

3. *Проведение эксперимента.* Повысить качество полученных оценок позволяют методы теории планирования эксперимента [3, 4], которые наиболее детально разработаны для случая (4а), соответствующего классической модели регрессионного анализа

$$y = b_1\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x) + \ldots + b_m\varphi_m(x) + e_y. \tag{6}$$

В зависимости от специфики проведения эксперимента различают неконтролируемый (пассивный) и контролируемый (активный) эксперименты. Считается, что при проведении пассивного эксперимента ошибки присутствуют как во входной, так и в выходной переменных, т.е. ошибки измерения входной и выходной переменных сравнимы;

исследователь не имеет возможности реализовать заранее выбранный план и вынужден ограничиться результатами доступных ему наблюдений.

При планировании активного эксперимента

ошибками в значениях входной переменной можно пренебречь, так как полагают, что они устанавливаются с достаточно высокой точностью;

измеряемые величины x назначаются по желанию экспериментатора в соответствии с заранее выбранным планом эксперимента.

Непрерывный план эксперимента может быть представлен в виде

$$P = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_l \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_l \end{Bmatrix}, \tag{7}$$

где множество $\{x_1, x_2, ..., x_l\}$ обозначает спектр плана, задаваемый конечным числом точек эксперимента, а множество $\{p_1, p_2, ..., p_l\}$ определяет частоты плана, причем $\sum_{i=1}^{l} p_i = 1.$

План эксперимента (7) позволяет для модели (6) записать $(N \times m)$ матрицу значений базисных функций $\varphi_j(x_i)$ от независимой переменной в эксперименте

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \varphi(x_1) & \ldots & \varphi_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(x_N) & \ldots & \varphi_m(x_N) \end{pmatrix} \tag{8}$$

и получить информационную матрицу ($\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$).

В теории планирования оптимального эксперимента разработаны критерии оптимальности, основанные на минимизации различных показателей информационной матрицы и позволяющие минимизировать дисперсии оценок.

При любом типе эксперимента точность оценок и достоверность результатов тем выше, чем больше число опытов, поэтому при определении числа N играют роль в основном экономические и временны́е факторы.

В ходе проведения эксперимента переменные x и y определяются с ошибками, которые могут иметь различную природу. Возможные источники и модели ошибок перечислены выше. Кроме того, как уже отмечалось, для описания механизма действия ошибок чаще всего используют аддитивные, реже мультипликативные модели. Вместе с тем на практике ошибки могут сложным образом зависеть от значений переменных.

4. *Оценка коэффициентов статической характеристики.* Цель этапа состоит в нахождении оценок $\hat{b}_i$ неизвестных коэффициентов b_i выбранной линейно параметризованной функции вида (1).

Несмотря на наличие различных методов оценивания все они основаны на минимизации некоторой нормы отклонений предсказанных значений от полученных в эксперименте $|\hat{y}_i - y_i|$, где y_i — опытное значение; $\hat{y}_i$ — предсказанное значение, определяемое при фиксированной измеряемой величине x_i как

$$\hat{y}_i = \hat{b}_1\varphi_1(x_i) + \hat{b}_2\varphi_2(x_i) + \ldots + \hat{b}_m\varphi_m(x_i). \tag{9}$$

Все этапы процедуры оценивания, включая теорию оптимального планирования эксперимента, для модели (9) детально изучены и описаны в литературе [2, 4].

Наиболее часто в качестве нормы используется сумма квадратов отклонений, когда неизвестные оценки $\hat{b}_j$ коэффициентов модели (6) определяются методом наименьших квадратов (МНК) по известной формуле

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}, \tag{10}$$

где $\mathbf{y}$ — вектор значений зависимой переменной y_i в N опытах, $\hat{\mathbf{b}}$ — вектор искомых МНК-оценок. Доказано, что при сделанных относительно ошибок допущениях МНК-оценки (10) распределены нормально, являются состоятельными, несмещенными и эффективными.

В случае (4б) для нахождения оценок параметров используют взвешенный метод наименьших квадратов, когда оценки рассчитывают по формуле

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{y}, \tag{11}$$

где весовая матрица $\mathbf{W}$ размерности $(N \times N)$ обычно задается диагональной матрицей вида

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_N^2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где σ_i^2 $(i = 1, 2, ..., N)$ — дисперсии ошибок зависимой переменной в соответствующем опыте, которые должны быть известны априори или определены в результате параллельных опытов.

Доверительный интервал предсказания зависит от ковариационной матрицы оценок параметров, которая для случаев (4а) и (4б) имеет соответственно вид

$$\mathbf{D} = s^2(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})^{-1}, \tag{13а}$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{F})^{-1}, \tag{13б}$$

где

$$s^2 = \frac{1}{N - m - 1}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2 \text{ —} \tag{14}$$

выборочная оценка дисперсии ошибки e_y.

Диагональные элементы матрицы **D** определяют дисперсии $\sigma^2(\hat{b}_j)$ оценок коэффициентов $\hat{b}_j$, а недиагональные элементы — ковариации между ними. Как следует из формулы (13), величина дисперсии коэффициентов зависит как от плана эксперимента F, так и от дисперсии внешнего шума. Дисперсии $\sigma^2(\hat{b}_j)$ коэффициентов $\hat{b}_j$ находят по формуле

$$\sigma^2(\hat{b}_j) = s^2 d_{jj},$$

где d_{jj} — диагональные элементы обратной матрицы эксперимента $(\mathbf{F}^{\mathrm{т}}\mathbf{F})^{-1}$.

Стандартная процедура регрессионного анализа предусматривает проверку значимости полученных коэффициентов. Если отношение оценки $\hat{b}_j$ к ее среднеквадратической ошибке оказывается меньше критического значения t-критерия Стьюдента, то соответствующий член исключается из модели (9).

При наличии точечной оценки $\hat{b}_j$ и ее дисперсии $\sigma^2(\hat{b}_j)$ можно определить, например, 95 %-й доверительный интервал для неизвестного коэффициента b_j:

$$P\{\hat{b}_j - 1{,}96\sigma(\hat{b}_j) \le b_j \le \hat{b}_j + 1{,}96\sigma(\hat{b}_j)\} = 0{,}95.$$

Знание ковариационной матрицы позволяет записать дисперсию $\sigma^2(\hat{y}(x))$ ошибки предсказания по модели (9) в виде квадратичной формы

$$\sigma^2(\hat{y}(x)) = \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{т}}(x)\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}(x), \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(x)$ — вектор базисных функций модели (10).

Если распределение ошибки подчиняется нормальному распределению, то для заданной доверительной вероятности $(1 - \alpha)$ определяют коридор ошибок для предсказанного значения выходной переменной по модели (9) в виде доверительного интервала

$$P\{\hat{y}(x) - t_{\alpha,N-m}\sigma(\hat{y}(x)) \le y(x) \le$$

$$\le \hat{y}(x) + t_{\alpha,N-m}\sigma(\hat{y}(x))\} \le (1-\alpha), \qquad (16)$$

где $t_{\alpha,N-m}$ — квантиль распределения Стьюдента, определяемый по таблицам для заданной доверительной вероятности и числа степеней свободы $N - m$.

Несомненным достоинством регрессионного анализа при нулевых ошибках во входной переменной, т.е. для случаев (4а) и (4б), является не только глубокая теоретическая проработка и обоснование результатов, но и наличие универсальных пакетов программ статистического анализа. Все это обусловило широкое применение регрессионного анализа при построении математических моделей.

Вместе с тем в случае (4в), когда ошибки присутствуют в обеих переменных x и y, применение формулы (10) для нахождения вектора оценок прямой регрессионной модели (9) приводит к смещенным и несостоятельным оценкам коэффициентов $\hat{b}_j$. Действительно, если в линейной по параметрам модели элементы матрицы **F** и вектора **y** в формуле (10) заданы с аддитивными ошибками, т.е. выполняется условие

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \Delta\mathbf{F}, \ \ \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y} \qquad (17)$$

($\Delta\mathbf{F}$ — матрица ошибок в элементах истинной матрицы эксперимента $\mathbf{F}_0$, $\Delta\mathbf{y}$ — вектор ошибок зависимой переменной), то, подставляя (17) в (10), получим

$$\hat{\mathbf{b}} = \{(\mathbf{F}_0 + \Delta\mathbf{F})^{\mathrm{т}}(\mathbf{F}_0 + \Delta\mathbf{F})\}^{-1}(\mathbf{F}_0 + \Delta\mathbf{F})^{\mathrm{т}}(\mathbf{y}_0 + \Delta\mathbf{y}). \qquad (18)$$

Если математические ожидания ошибок равны нулю, т.е. $M[\Delta\mathbf{F}] = 0$, $M[\Delta\mathbf{y}] = 0$, то предел выражения (18) на множестве выборок стремится к математическому ожиданию вектора оценок. С учетом этого факта можно записать

$$\mathbf{M}(\mathbf{b}) = (\mathbf{F}_0^{\mathrm{т}}\mathbf{F}_0 + \boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\mathbf{F}_0^{\mathrm{т}}\mathbf{F}_0)\mathbf{b}, \qquad (19)$$

где $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{M}\{\Delta\mathbf{F}^{\mathrm{т}}\Delta\mathbf{F}\}$ — ковариационная матрица ошибок независимых переменных в N опытах; $\hat{\mathbf{b}}$ — вектор истинных значений коэффициентов. Из выражения (19) очевидно, что оценки являются несмещенными и состоятельными, если матрица $\boldsymbol{\Sigma} = 0$, что возможно лишь при отсутствии ошибок в независимых переменных. Таким образом, в случае (5в) МНК-оценки коэффициентов оказываются несостоятельными и смещенными.

Для нахождения вектора оценок при ошибках как во входной, так и в выходных переменных в математической статистике рекомендуется применение методов конфлюэнтного анализа [5], но для них редко удается получить теоретически обоснованные результаты в случае моделей общего вида. Кроме того, используют подходы и результаты статистики интервальных данных [6].

Статистический подход к построению обратной характеристики объекта

В технических приложениях задача обратного преобразования обычно решается для однофакторных монотонных функций, обеспечивающих однозначность преобразования.

В рамках статистического подхода в настоящее время, как правило, построение обратной зависимости по неточным данным осуществляют следующим образом: сначала по экспериментальным данным находят оценки $\hat{b}_j$ коэффициентов прямой модели

$$\hat{y}(x) = \omega(\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_m, x), \qquad (20)$$

а затем, например, с помощью формул, приведенных в таблице, рассчитывают оценки $\hat{a}_j$ параметров обратной функции, что позволяет записать искомую обратную зависимость в виде

$$\hat{x}(y) = \psi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}m, y) = \omega^{-1}(\hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_m, x). \qquad (21)$$

Сравнение прямых и обратных функций в таблице позволяет сделать выводы:

для линейной модели обратное преобразование не меняет вид функции, т.е. как прямая, так и обратная функции являются линейными — этот наиболее простой в математическом смысле случай является предпочтительным;

в случаях квадратичной, степенной и логарифмической функций структура прямой и обратной функций не совпадает, причем если прямые функции линейны относительно коэффициентов b_j, то их обратные модели оказываются нелинейными как относительно аргумента x, так и относительно коэффициентов a_i, а свободные члены в прямой и обратной функциях могут иметь разные знаки;

обратное преобразование становится некорректным, если коэффициент b_2 в прямых функциях стремится к нулю;

в любой фиксированной точке производные моделей связаны обратным соотношением $y(x) = 1/x(y)$, т.е. участку с малым наклоном на прямой зависимости будет соответствовать участок с большим наклоном на обратной кривой, и наоборот, поэтому на этих участках даже незначительные ошибки в переменной y приводят к существенным ошибкам в переменной x.

Очевидно, что оценки $\hat{a}_j$ параметров обратной зависимости (21) являются функциями неточных оценок $\hat{b}_j$ модели (20) и, следовательно, не совпадают с истинными параметрами. В силу этого предсказанное по обратной функции (21) значение $\hat{x}(y)$ будет содержать неизбежные ошибки.

Даже для простейшего линейного случая переход от прямой модели (20) к обратной модели (21) и оценка ее точности в рамках статистического подхода является нетривиальной задачей. Действительно, пусть с помощью регрессионного анализа при нормально распределенных аддитивных ошибках с нулевым математическим ожиданием найдены несмещенные оценки параметров и записана прямая регрессионная модель

$$\hat{y} = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 x. \qquad (22)$$

Допустим для простоты, что ковариационная матрица оценок $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ диагональная и оценки можно рассматривать как две независимые случайные величины, которые подчиняются нормальному распределению с известными дисперсиями $\sigma^2(\hat{b}_1)$, $\sigma^2(\hat{b}_2)$. Очевидно, что в этих условиях оценка предсказанного значения $\hat{y}$ также нормально распределена.

Рассмотрим модель, обратную (22). В соответствии с таблицей она определяется линейным уравнением

$$\hat{x} = \hat{a}_1 + \hat{a}_2 y = -\frac{\hat{b}_1}{\hat{b}_2} + \frac{1}{\hat{b}_2} y. \qquad (23)$$

Распределение предсказанного значения $\hat{x}$ зависит от функции распределения оценок $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$. Первая из них есть отношение двух случайных нормально распределенных величин, а вторая — величина, обратная нормальной случайной величине, которая теоретически имеет неограниченный диапазон, что связано с возможностью деления на ноль.

Заметим, что распределение отношения двух нормально распределенных центрированных случайных величин описывается распределением Коши, обладающим рядом специфических свойств. Так, дисперсия отсчетов при таком законе распределения вероятностей не может быть указана, так как определяющий ее интеграл расходится. Это означает, что оценка дисперсии неограниченно возрастает по мере увеличения объема n экспериментальных данных. Кроме того, распределение Коши не имеет определенного значения математического ожидания. Естественно, что использование такой оценки неправомерно.

Типовые сглаживающие функции

№	Прямая функция	Обратная функция	Формулы пересчета
1.	Линейная $y = b_1 + b_2 x$	Линейная $x = a_1 + a_2 y$	$a_1 = -b_1/b_2$, $a_2 = 1/b_2$
2.	Квадратичная $y = b_1 + b_2 x + b_3 x^2$	Нелинейная $x = a_1 + \sqrt{a_2 y + a_3}$	$a_1 = -\frac{b_2}{2b_3}, a_2 = \frac{1}{b_3}, a_3 = \left(\frac{b_2}{b_3}\right)^2 - \frac{b_1}{b_3}$
3.	Степенная $y = b_1 + b_2 x^m$	Нелинейная $x = (a_1 + a_2 y)^{1/m}$	$a_1 = -b_1/b_2$, $a_2 = 1/b_2$
4.	Логарифмическая $y = b_1 + b_2 \log((x)$	Показательная $x = a_1 10^{a_2 y}$	$a_1 = 10^{-b_1/b_2}, a_2 = 10^{1/b_2}$

С учетом того, что из-за наличия ошибок эксперимента оценки $\hat{b}_j$ и, следовательно, оценки $\hat{a}_j$ являются неточными, предсказанное по соотношению (21) значение $\hat{x}(y)$ будет также содержать неизбежные ошибки. При этом из-за существенной нелинейности обратного преобразования модель ошибки обратной зависимости является очень сложной и не может быть описана в терминах абсолютной или относительной ошибки функции (21).

Крайне важной характеристикой точности обратной функции является интервал ее неопределенности

$$x^{-}(y) \le x(y) \le x^{+}(y), \qquad (24)$$

где $x(y)$ — неизвестное точное значение измеряемой величины; $x^{-}(y)$ и $x^{+}(y)$ — нижняя и верхняя границы ее возможных значений.

Смысл оценки результатов измерения в этом случае при статистическом подходе заключается в определении доверительных интервалов, между границами которых с заданными вероятностями находятся истинные значения оцениваемых параметров.

Если распределение результатов наблюдений нормально и известна дисперсия σ_x^2, то вероятность принадлежности результата наблюдений интервалу находится с использованием распределения Стьюдента. Вместе с тем определение доверительного интервала для предсказанного значения переменной $\hat{x}$ при статистическом подходе теоретически не обосновано и представляется крайне затруднительным. Действительно, доверительный интервал прямой модели (20) определяется границами, рассчитываемыми по формуле

$$\hat{y}(x) \pm st(\alpha, N-m)[1 + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(x)\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}(x)]^{1/2}, \qquad (25)$$

где s^2 — оценка дисперсии ошибки эксперимента, определяемая через сумму квадратов невязок; $\boldsymbol{\varphi}(x)$ — вектор базисных функций модели (20); $(1-\alpha)$ — заданная доверительная вероятность; $t(\alpha, N-m)$ — значение t-критерия Стьюдента для уровня значимости α и числа степеней свободы $(N-m)$; $\mathbf{D} = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F})^{-1}$ — квадратная матрица. В общем случае не удается записать аналитически границы для $\hat{x}$, поскольку невозможно записать функцию, обратную (25). По этой причине в рамках статистического подхода для оценки точности обратной функции используют различные эмпирические приемы.

Когда распределение случайных погрешностей отлично от нормального, на практике все равно часто используют распределение Стьюдента с приближением, степень которого остается неизвестной. Ситуация еще больше осложняется, если в качестве статической характеристики используется не линейная функция, а например, логарифмическая или квадратичная модель. Таким образом, формальное применение регрессионного анализа к обратной модели приводит к недостоверным результатам, далеким от истинных.

Необходимо также отметить, что, например, в метрологии выделяют следующие типы погрешности измерений.

1. *Случайная погрешность*, обусловленная случайными погрешностями используемых средств измерений и незначительными колебаниями влияющих величин, при обработке которых используют методы математической статистики. Наиболее полно разработаны статистические методы обработки результатов наблюдений с нормальными распределениями. Измеряемую величину в этом случае представляют как математическое ожидание принятого распределения, а результат измерения — как статистическую оценку, построенную по такой выборке, которая бы обладала свойствами несмещенности, состоятельности, эффективности. Оцениваемыми параметрами являются математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

2. *Систематическая погрешность*. Задача оценивания границ систематических погрешностей не имеет строгого решения. Методы борьбы с систематическими погрешностями заключаются в их обнаружении и последующем исключении путем полной или частичной компенсации. Основные часто непреодолимые трудности состоят именно в обнаружении систематических погрешностей, поэтому иногда приходится довольствоваться их приближенным анализом. Кроме того, в отличие от случайных погрешностей, в обработке которых применяют статистические методы, систематические погрешности невозможно выразить в терминах доверительного интервала. Систематическую погрешность результата измерения обычно представляют в виде суммы элементарных составляющих, характеризующихся своими границами и отвечающих различным источникам погрешностей.

3. *Суммарная погрешность*. Кроме оценивания в отдельности границ систематической и случайной составляющих погрешностей, часто ищется граница суммарной погрешности. Это связано с тем, что в процессе измерения систематическая и случайная погрешности проявляются одновременно. Поскольку погрешность измерения является суммой систематической и случайной составляющих, которые оцениваются границами при выбранной доверительной вероятности, то границу суммарной погрешности принимают равной сумме границ составляющих. Однако такая граница обычно сильно завышена; ее используют лишь при строго постоянных систематических погрешностях, когда нет дополнительных априорных сведений.

Реальные свойства ошибок измерения и жесткость постулатов регрессионного анализа

В 70-е годы прошлого века появился ряд статей, в которых утверждалось, что исходные предпосылки регрессионного анализа далеки от реальности и редко выполняются на практике. В работе [7] утверждается, что невозможно проверить на практике достоверность полученных с помощью математической статистики результатов. В качестве примера «неверифицируемых» характеристик приводились понятия генеральной совокупности, доверительного интервала на неизвестное среднее случайной величины, ошибки первого и второго рода при проверке гипотез и др.

Действительно, практические приложения регрессионного анализа выявили ограничения слишком жесткой системы его исходных допущений. Так, широкое распространение нормального распределения погрешностей в практике измерений объясняется центральной предельной теоремой теории вероятностей, которая утверждает, что распределение случайных погрешностей будет близко в нормальному всякий раз, когда результаты наблюдения формируются под влиянием большого числа независимо действующих факторов, каждый из которых оказывает лишь незначительное действие по сравнению с суммарным действием всех остальных. Результирующая погрешность измерений складывается из ряда составляющих. Если эти составляющие рассматривать как случайные величины, то суммирование погрешностей сводится к суммированию случайных величин. Но при суммировании случайных величин законы их распределения резко изменяют свою форму [8]. Кроме того, нельзя забывать о том, что вклад отдельных составляющих в результат существенно различается, а сама возможность идентификации формы распределения экспериментальных данных ограничена, прежде всего малостью объема выборки.

При этом оказывается необходимым учитывать, что, во-первых, отдельные составляющие погрешности могут быть коррелированы между собой, во-вторых, при суммировании случайных величин законы их распределения существенно деформируются, т.е. форма закона распределения суммы может резко отличаться от формы распределения составляющих.

Вместе с тем основное воздействие на ошибку оказывают погрешности приборов и результатов измерений, особенность которых состоит в их большом разнообразии.

В работе [9] приведены результаты исследования распределения погрешности градуировки шкал аналоговых электроизмерительных приборов. Закон распределения этих погрешностей оказался одним и тем же с описанием вида

$$f_x(x) = 0{,}534\,\exp(-|x|^7).$$

Рассмотрены также законы распределения погрешностей магнитоэлектрических приборов. Полученные 34 распределения оказались сходны между собой, но существенно отличны от нормального и их было рекомендовано рассматривать как трапецеидальные.

В работе [10] собраны данные о параметрах фактических распределений погрешностей при измерении как электрических, так и неэлектрических величин разнообразными приборами. В результате исследования оказалось, что примерно 50 % принадлежат классу экспоненциальных распределений, 30 % имеют вид распределений с плоской вершиной и пологими длинными спадами и не могут быть описаны как экспоненциальные, а оставшиеся 20 % оказались двухмодальными, т.е. также не относящимися к классу экспоненциальных распределений.

Была подробно исследована [11] форма распределения погрешностей 25 экземпляров цифровых вольтметров в 10 точках диапазона измерений. Все 250 распределений оказались двухмодальными с кривой плотности, имеющей два симметричных относительно центра максимума, т.е. по своим параметрам очень далекими от нормального.

Сотрудники ВНИИМ им. Д. И. Менделеева исследовали форму распределений погрешностей средств измерений 16 типов (по 100 – 200 экземпляров каждого типа). Распределения оказались в пределах от равномерного до распределения Лапласа, имеющего функцию плотности

$$f_x(x) = 0{,}5e^{-|x|}.$$

В итоге этих работ факт разнообразия законов распределения был признан законодательно и еще в 1974 г. был введен в действие ГОСТ 8.011–72, устанавливающий, что при сообщении результата измерения целесообразно указывать вид распределения, и были стандартизованы модели равномерного, трапецеидального, треугольного, нормального и двухмодального распределений. Кроме того, для характеристики точности результатов измерений данный стандарт требует указания или границ интервала, в котором эта погрешность находится с заданной вероятностью, или самой функции распределения погрешности. Для этих целей широко используют квантильные оценки случайной погрешности. До тех пор, пока считали, что случайные погрешности приборов или результатов измерения распределены нормально, рекомендовалось пользоваться таблицей квантилей стандартного нормального распределения. Однако по мере накопления данных о фактических распределениях погрешностей стало очевидным, что они весьма разнообразны и часто далеки от нормального [12]. В монографии [13] отмечается, что по ограниченным экспериментальным данным получают не точные, а лишь приближенные доверительные значения, хотя очень часто доверительные погрешности рассчитывают, вводя ничем не обоснованное предположение о том, что вид закона распределения погрешностей будто бы точно известен. Из приведенного выше анализа ясно, что такой прием является некорректным.

Поэтому следует иметь в виду, что:

реальные законы распределения погрешностей приборов весьма разнообразны и часто очень далеки от нормального;

для установления действительного вида функции распределения необходимо проведение испытаний, число которых должно быть тем больше, чем большим выбирается значение доверительной вероятности, при малом числе отсчетов выводы о виде функции распределения лишены каких-либо оснований;

недостатком доверительного значения погрешности является невозможность суммирования доверительных интервалов ее отдельных случайных составляющих.

При статистическом подходе к решению задачи построения прямой и обратной статических характеристик системы приоритетной является аддитивная модель случайной помехи, распределенной по нормальному закону и приложенной к выходу системы. В этом случае применение аппарата регрессионного анализа для моделей с нулевыми ошибками во входной переменной отличается глубокой теоретической проработкой и обоснованием результатов, что обусловливает его широкое применение.

Вместе с тем практика показывает:

ошибка измерения и/или установки факторов может описываться не только аддитивной моделью, но и мультипликативной или смешанной аддитивно-мультипликативной;

законы распределения случайной помехи часто отличны от нормального, реальные законы распределения погрешностей приборов, вносящих существенный вклад в величину помехи, весьма разнообразны;

для установления действительного вида функции распределения помехи необходимо проведение большого числа испытаний, в противном случае выводы о виде ее функции распределения лишены каких-либо оснований;

погрешности измерений содержат как случайные, так и систематические составляющие и как результат — суммарные погрешности, причем наибольшую сложность обычно вызывают систематические и суммарные погрешности, для которых не удается разработать строгие формализованные методы и приходится использовать практические полуэмпирические подходы;

погрешности измерений входных величин часто существенны;

оптимальные свойства МНК-оценок параметров статической характеристики справедливы только для прямой модели при выполнении предпосылок регрессионного анализа. Если ошибки присутствуют как в выходных, так и в входных переменных, применение метода наименьших квадратов приводит к смещенным и несостоятельным оценкам коэффициентов статической характеристики;

из-за существенной нелинейности обратного преобразования модель ошибки обратной статической характеристики является очень сложной, а распределение ошибки — далеким от нормального;

крайне важной характеристикой точности определения статической характеристики является интервал ее неопределенности, смысл которого при статистическом подходе заключается в определении интервалов, между границами которых с заданными доверительными вероятностями находятся истинные значения оцениваемой величины. Вместе с тем определение доверительного интервала для предсказанного значения входной переменной при статистическом подходе теоретически не обосновано и представляется крайне затруднительным. Задача построения коридора ошибок обратной функции является одной из наиболее трудных и для нее не существует универсального теоретического решения.

Таким образом, применение вероятностной модели помехи, приводящей к статистическому подходу в описании неопределенности статической характеристики преобразования является целесообразным в случае, если неопределенность связана только со случайной вариабельностью. Описание других источников неопределенности в рамках этой модели затруднительно. Формальное применение регрессионного анализа к решению задачи построения обратной модели часто приводит к недостоверным результатам, далеким от истинных.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Химмелблау Д.** Анализ процессов статистическими методами. — М.: Мир, 1973. — 948 с.
2. **Демиденко Е. З.** Линейная и нелинейная регрессия. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 302 с.
3. **Налимов В. В., Чернова Н. А.** Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. — М.: Наука, 1965. — 340 с.
4. **Горский В. Г., Адлер Ю. П., Талалай А. М.** Планирование промышленного эксперимента. Модели статики. — М.: Металлургия, 1974. — 112 с.
5. **Грешилов А. А., Стакун В. А., Стакун А. А.** Статистические задачи принятия решений с элементами конфлюентного анализа. — М.: Радио и связь, 1998. — 212 с.
6. **Орлов А. И.** Статистика интервальных данных (обобщающая статья) / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81. № 3. С. 61 – 69.
7. **Тутубалин В. Н.** Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности). — М.: Знание, 1977. — 48 с.
8. **Вощинин А. П., Скибицкий Н. В.** Обработка неточных данных как неопределенных чисел / Вестник МЭИ. 2005. № 3. С. 95 – 107.
9. **Таушанов З., Тонева Е., Пенова Р.** Вычисление энтропийного коэффициента при малых выборках / Изобретательство, стандартизация и качество. 1973. № 5. С. 48 – 52.
10. **Алексеева И. У.** Теоретическое и экспериментальное исследование законов распределения погрешностей, их классификация и методы оценки их параметров: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Л., 1975. — 20 с.
11. **Галочкина В. Я.** Исследование энтропийных оценок случайных погрешностей измерительных устройств: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Л., 1971. — 18 с.
12. **Орлов А. И.** Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.
13. **Новицкий П. В., Зограф И. А., Лабунец В. С.** Динамика погрешности средств измерений. — Л.: Энергоатомиздат, 1990. — 192 с.

REFERENCES

1. **Himmelblau D. M.** Process Analysis by Statistical Methods. — John Wiley & Sons Inc., 1970. — 463 p.
2. **Demidenko E. Z.** Lineinaya i nelineinaya regressiya [Linear and nonlinear regression]. — Moscow: Finansy i statistika, 1981. — 302 p. [in Russian].
3. **Nalimov V. V., Chernova N. A.** Statisticheskie metody planirovaniya ékstremal'nykh éksperimentov [Statistical methods of extreme experiments planning]. — Moscow: Nauka, 1965. — 340 p. [in Russian].
4. **Gorskii V. G., Adler Yu. P., Talalai A. M.** Planirovanie promyshlennogo éksperimenta. Modeli statiki [Planning of industrial experiment. Static models]. — Moscow: Metallurgiya, 1974. — 112 p. [in Russian].
5. **Greshilov A. A., Stakun V. A., Stakun A. A.** Statisticheskie zadachi prinyatiya reshenii s élementami konflyuentnogo analiza [Statistical problems of decision-making with the elements of confluence analysis]. — Moscow: Radio i svyaz', 1998. — 212 p. [in Russian].
6. **Orlov A. I.** Statistika interval'nykh dannykh (obobshchayushchaya stat'ya) [Statistics of interval data (generalizing article)] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2015. Vol. 81. N 3. P. 61 – 69 [in Russian].
7. **Tutubalin V. N.** Granitsy primenimosti (veroyatnostno-statisticheskie metody i ikh vozmozhnosti) [The limits of applicability (probabilistic and statistical methods and their capabilities)]. — Moscow: Znanie, 1977. — 48 p. [in Russian].
8. **Voshchinin A. P., Skibitskii N. V.** Obrabotka netochnykh dannykh kak neopredelennykh chisel [Processing of inprecise data as undetermined numbers] / Vestnik MÉI. 2005. N 3. P. 95 – 107 [in Russian].
9. **Taushanov Z., Toneva E., Penova R.** Vychislenie éntropiinogo koéffitsienta pri malykh vyborkakh [The calculation of entropy coefficient in small samples] / Izobret. Standartiz. Kach. 1973. N 5. P. 48 – 52 [in Russian].
10. **Alekseeva I. U.** Teoreticheskoe i éksperimental'noe issledovanie zakonov raspredeleniya pogreshnostei, ikh klassifikatsiya i metody otsenki ikh parametrov [Theoretical and experimental investigation of the laws of error distribution, their classification and methods for evaluating their parametres]. Author's Abstract of Candidate's Thesis. — Leningrad, 1975. — 20 p. [in Russian].
11. **Galochkina V. Ya.** Issledovanie éntropiinykh otsenok sluchainykh pogreshnostei izmeritel'nykh ustroistv [Investigation of entropy estimates of measurement devices random errors: abstract of thesis for candidate of engineering sciences degree]. Author's Abstract of Candidate's Thesis. — Leningrad, 1971. — 18 p. [in Russian].
12. **Orlov A. I.** Prikladnaya statistika [Applied statistics]. — Moscow: Ékzamen, 2006. — 671 p. [in Russian].
13. **Novitskii P. V., Zograf I. A., Labunets V. S.** Dinamika pogreshnosti sredstv izmerenii [Dynamics of measuring instruments errors]. — Leningrad: Énergoatomizdat, 1990. — 192 p. [in Russian].