УДК 519.2

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КАЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В УСЛОВИЯХ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ШУМОВ НАБЛЮДЕНИЯ

© **А. В. Овсянников**[1]

Статья поступила 29 декабря 2015 г.

Определен обобщенный энергетический критерий, позволяющий оценить потенциальное качество измерительного эксперимента и связать его точность (нижнюю границу дисперсии ошибок оценок) со временем ее достижения в условиях определенного класса распределений коррелированных шумов наблюдения. Рассмотрено применение энергетического критерия для измерительного эксперимента, проводимого в дискретном или непрерывном времени наблюдения. Показано, что независимо от того, в каком времени проводится измерительный эксперимент, полученные выражения обладают внутренним единством. Приведены выражения энергетического критерия, которые позволяют установить связь между параметрами измерительного эксперимента: длительностью процесса измерения; постоянной времени коррелированного шума наблюдения; условным отношением сигнал – шум и требуемой точностью измерения. Полученные соотношения могут быть использованы в теоретических и практических расчетах, когда корреляционная функция шума наблюдения имеет экспоненциальный или близкий к экспоненциальному виду характер.

Ключевые слова: измерительный эксперимент; энергетический критерий; корреляционная функция; интервал корреляции; потенциальное качество.

Актуальной задачей любого измерительного эксперимента (ИЭ) является получение необходимой точности обработки результатов наблюдений за возможно минимальное время. Особенную важность эта задача приобретает в случае ресурсоемких и дорогостоящих исследований. В некоторых случаях ценным ресурсом оказывается время, отведенное на проведение измерений.

[1] Белорусский государственный университет, Минск, Белоруссия; e-mail: andovs@mail.ru

В работе рассмотрен регулярный статистический ИЭ [1], для которого оценки неизвестных параметров по результатам измерений обладают свойствами регулярности. Ход проведения ИЭ предполагает: последовательную или с учетом накопления (одношаговую) обработку результатов наблюдений [2, 3]; наличие существенной стохастичности и коррелированности шума измерения [4, 5], обусловливающих применение соответствующих статистических методов и алгоритмов в реальном масштабе времени [2, 3, 6 – 9].

При этом желательно обеспечение высокой точности оценок (минимизации дисперсии их ошибок — $D \to \min$) и минимальных затрат времени T на их получение ($T \to \min$).

Обычно решается одна из указанных оптимизационных задач ($D \to \min$ или $T \to \min$) с фиксацией другого критерия на некотором гарантированном уровне. Возникает вопрос, можно ли решать обе эти задачи одновременно, сводя их к совместной однокритериальной задаче в виде энергетического критерия $TD \to \min$, и каково в этом случае должно быть оптимальное соотношение между D и T, обеспечивающее нижнюю границу обобщенного критерия, не сводимого к тривиальному не имеющему смысла случаю $T = 0$?

Еще одной возможной проблемой, требующей внимания при обработке результатов ИЭ, может оказаться неверное предположение о статистической независимости шума наблюдения [4, 5, 10], так как корреляции шума в условиях реальных статистических экспериментов существенно влияют на достижение нижних границ дисперсии ошибок оценок (неравенства Крамера – Рао [11], Крамера – Рао – Вольфовитца [8]). Кроме того, при дискретном процессе наблюдений и коррелированных шумах временной интервал между соседними измерительными отсчетами, очевидно, не может быть выбран произвольно малым [4]. То же характерно и для непрерывного процесса наблюдения. В этом случае время, отведенное на проведение ИЭ, должно соотноситься с интервалом корреляции шума [10].

В связи с отмеченными обстоятельствами цель данной работы — определение и анализ обобщенного энергетического критерия, связывающего потенциальную точность ИЭ (нижнюю границу дисперсии ошибок оценок) и время ее достижения в условиях определенного класса распределений коррелированных шумов наблюдения.

Указанная задача решена для дискретной и непрерывной модели наблюдения отдельно с целью установления внутреннего единства получаемых результатов.

Энергетический критерий в условиях коррелированных шумов наблюдения в дискретном времени

Известно [1], что нижняя граница дисперсий ошибок оценок неизвестных параметров $D_{\min}$ при использовании любых оценок $\boldsymbol{\theta}_n^*$ векторного параметра $\boldsymbol{\theta} \in \Xi \subset R^k$ (Ξ — k-мерная действительная область значений $\boldsymbol{\theta}$) по результатам n статистических регулярных экспериментов определяется неравенством Крамера – Рао

$$D(\boldsymbol{\theta}_n^*) = E(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_n^*)(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_n^*)^{\mathrm{т}} \geq D_{\min} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}[\boldsymbol{\theta} + B_n(\boldsymbol{\theta})]\mathbf{I}_n^{-1} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}[\boldsymbol{\theta} + B_n(\boldsymbol{\theta})]^{\mathrm{т}}, \qquad (1)$$

где E — символ математического ожидания; $B_n(\boldsymbol{\theta}) = E\boldsymbol{\theta}_n^* - \boldsymbol{\theta}$ — k-мерный вектор ошибок оценки (смещение); $\mathbf{I}_n = E(\partial \ln p/\partial \boldsymbol{\theta})(\partial \ln p/\partial \boldsymbol{\theta})^{\mathrm{т}}$ — информационная матрица Фишера размерностью $k \times k$, определяющая количество информации об оцениваемом векторе $\boldsymbol{\theta}$, содержащееся в выборке наблюдаемых данных с многомерной плотностью p. Если априорные сведения об оцениваемых параметрах отсутствуют ($p(\boldsymbol{\theta})$ неизвестна), то в (1) используется функция правдоподобия.

Далее рассмотрим ИЭ с аддитивной моделью наблюдения $\mathbf{y} = \mathbf{H} + \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\mathbf{y}$ — n-мерный вектор наблюдений; $\mathbf{H} = [h_i(\mathbf{M})]$ $(i = \overline{1, n})$ — известный n-мерный модулирующий вектор; $\mathbf{M} = [m_k]$ — k-мерный вектор неизвестных, не зависимых друг от друга постоянных параметров, подлежащих оценке; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — n-мерный вектор шума наблюдений с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $\mathbf{R} = E\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{т}} = [R_{ij}]$.

Следует отметить, что реализация современных алгоритмов обработки результатов ИЭ должна ориентироваться на: существенном разнообразии аналитических моделей распределений шумов наблюдений [12, 13]; продвижении идей устойчивых и непараметрических методов в прикладной статистике [3, 14, 15]. В этой связи развиваемый далее подход позволяет учитывать эти обстоятельства. Так, входящая в неравенство (1) информация Фишера $\mathbf{I}_n(p)$ может быть определена на классе распределений P [15], для которого ее минимум достигается на некотором «наихудшем» в классе распределении p^*, гарантируя выполнение условия $D_{\min}(p, P) \geq D_{\min}(p^*, P)$ для любых $p \in P$.

В целях наглядности и возможности получения результатов в явном виде ограничимся рассмотрением класса распределений шумов с ограниченной дисперсией $P = \left\{ p_\varepsilon : \int \varepsilon^2 p_\varepsilon d\varepsilon \leq \sigma_\varepsilon^2 \right\}$. Тогда функция правдоподобия, определяемая плотностью шума, будет гауссовской:

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) =$$

$$= [(2\pi)^n \det(\mathbf{R})]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{H})^{\mathrm{т}} \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H})\right]. \qquad (2)$$

Любая оценка вектора $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}$, построенная с использованием $\mathbf{I}_n$ в предположении непрерывности функции $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ на $\boldsymbol{\theta} \in \Xi$, существования и непрерывности производных $\partial \ln p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\theta}$, конечности величины $\mathbf{I}_n < \infty$ (к их числу относятся оценки максимального правдоподобия, одношаговые оценки [3], и др.), приводит к неравенству, определяющему нижнюю границу ее дисперсий ошибок:

$$D(\boldsymbol{\theta}_n^*) \geq D_{\min} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}[\boldsymbol{\theta} + B_n(\boldsymbol{\theta})][(\nabla \mathbf{H})^{\mathrm{T}} \mathbf{R}^{-1} (\nabla \mathbf{H})]^{-1} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}[\boldsymbol{\theta} + B_n(\boldsymbol{\theta})]^{\mathrm{T}}, \quad (3)$$

где $\nabla \mathbf{H} = \partial \mathbf{H}/\partial \boldsymbol{\theta}$ — матрица размером $n \times k$.

В простейшем случае, когда $\mathbf{H} = [\mathbf{H}_k m_k]$, $\mathbf{H}_k = [h_{ki}]$ — n-мерный модулирующий вектор, соответствующий оцениваемому параметру m_k и $R_{ij} = d\delta(i - j)$ («белый» гауссовский шум), $i, j = \overline{1, n}$, $\delta(i - j) = \{1,\ i = j;\ 0,\ i \neq j\}$ — символ Кронекера, $d = \sigma^2$ — дисперсия однократного наблюдения, получаем

$$D_{\min} = \mathrm{diag}\left[d \Big/ \sum_{i=1}^{n} h_{ki}^2 \right] \text{ —} \quad (4)$$

матрицу $k \times k$ с ненулевыми элементами только на главной диагонали. В формуле (4) учтено, что в этом случае смещение $B_n(\boldsymbol{\theta})$ равно нулю.

Результат (4) получен в предположении независимости временных отсчетов шума наблюдения, что следует из условия $R_{ij} = d\delta(i - j)$. Поэтому нижняя граница дисперсий ошибок оценок неизвестных параметров $D_{\min}$ не зависит от величины временного интервала между соседними измерительными отсчетами.

Однако ситуация изменяется, когда корреляционная матрица шума содержит элементы, зависящие от разности между двумя временными отсчетами $\Delta = t_n - t_{n-1}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(|t_i - t_j|)$. Избегая громоздкости получаемых выражений, далее ограничимся скалярным случаем $k = 1$.

Проанализируем ситуацию в случае аддитивного экспоненциально коррелированного шума наблюдения, когда элементы корреляционной матрицы заданы функцией $R_{ij} = d\exp(-\mu\Delta|i - j|)$, $\mu = \mathrm{const} > 0$. Эта ситуация характерна при наличии в канале измерения низкочастотного шума, например, фликкер-шума электронной аппаратуры, «окрашенного» низкочастотного шума. Введя обозначение $r = \exp(-\mu\Delta) > 0$, получим корреляционную матрицу и обратную ей матрицу:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ r & 1 & r & \dots & r^{n-2} \\ r^2 & r & 1 & \dots & r^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^{n-1} & r^{n-2} & r^{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{d(1 - r^2)} \begin{bmatrix} 1 & -r & 0 & \dots & 0 \\ -r & 1 + r^2 & -r & \dots & \vdots \\ 0 & -r & 1 + r^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -r \\ 0 & \dots & 0 & -r & 1 \end{bmatrix}.$$

Если далее положить $\mathbf{y} = \mathbf{H}m + \boldsymbol{\varepsilon}$, $h_i = h$, $i = \overline{1, n}$ и обозначить $\delta^2 = d/h^2$ (отношение, обратное условной величине сигнал-шум), то для нижней границы дисперсии ошибки оценки среднего из (3) можно получить аналитическое выражение

$$D \geq D_{\min} = I_n^{-1} = [\mathbf{H}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} = \frac{\delta^2 (1 + r)}{n(1 - r) + 2r}. \quad (5)$$

Полученная точная формула показывает значительное увеличение нижней границы дисперсии ошибок оценок по сравнению с некоррелированным шумом, для которого $D_{\min} = \delta^2/n$. Причем возрастание $D_{\min}$ в (5) связано с уменьшением интервала Δ. В предельном случае имеем результат $\lim\limits_{\Delta \to 0} D_{\min} = \delta^2$, при котором никакое накопление данных не приводит к увеличению точности оценок неизвестных параметров.

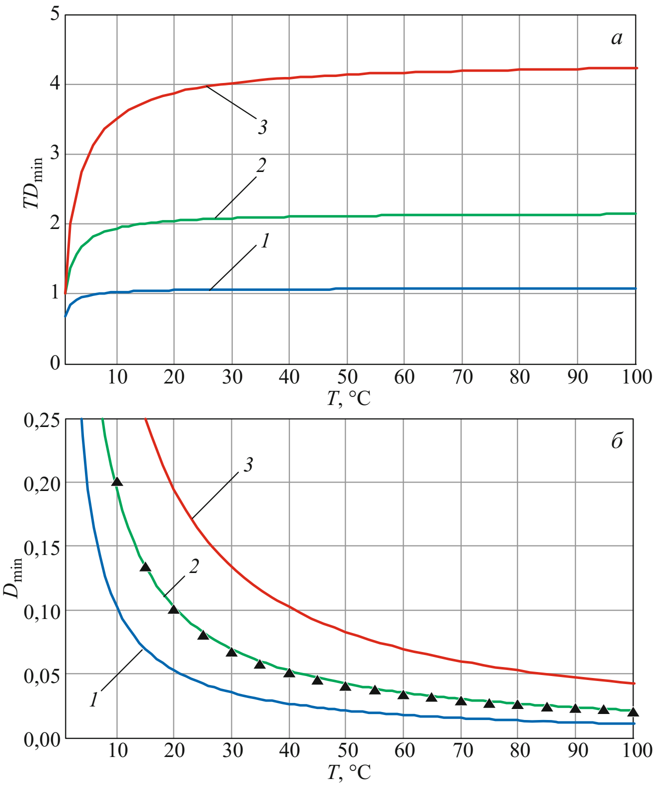
Рекуррентный оптимальный алгоритм оценки параметра m получен в [9]:

$$m_n^* = m_{n-1}^* + (n\Delta\mu)^{-1}(\varepsilon_n^* - [1 - \Delta\mu]\varepsilon_{n-1}^*), \quad (6)$$

где величины невязок $\varepsilon_n^* = y_n - hm_{n-1}^*$, $\varepsilon_{n-1}^* = y_{n-1} - hm_{n-1}^*$. Алгоритм полностью соответствует рассматриваемой ситуации экспоненциально коррелированного шума наблюдения. Анализ алгоритма показывает, что параметр Δ нельзя выбрать произвольно малым, так как это может привести к потере устойчивости алгоритма. Выбор $\Delta = 1/\mu$ превращает его в стандартный алгоритм экспоненциального сглаживания для независимых наблюдений: $m_n^* = m_{n-1}^* + (y_n - hm_{n-1}^*)/n$.

Одношаговый алгоритм в соответствии с [3] при выборе любой начальной оценки (например, выборочного среднего m) имеет вид $m^* = [\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}$, с той же информационной матрицей Фишера (5).

Неравенство (5) носит прикладной характер и позволяет установить связь между параметрами ИЭ: длительностью процесса измерения $T = n\Delta$; постоянной времени экспоненциально коррелированного шума наблюдения $\tau\varepsilon = \frac{1}{d}\int_0^{\infty} R(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\mu} \leq \Delta$, где $R(\tau) = d\exp(-\mu\tau)$; условным отношением сигнал/шум δ^{-2} и требуемой точностью измерения, выражающейся величиной D. Оптимизационная задача заключается в таком выборе указанных параметров, при котором обеспечивается $D_{\min} \to \min$, $T \to \min$. Но поскольку эти критерии для коррелированного шума наблюдения оказываются связанными через параметры n и Δ, вместо поиска решений отдельных оптимизационных задач можно решать одну совместную в виде энергетического критерия на единичную нагрузку. Целесообразность применения такого критерия заключается также и в том, что он имеет ясно выраженный физиче-



Зависимости энергетического критерия (7) (*а*) и потенциальной точности (8) (*б*) от времени наблюдения T: $\delta^2 = 1$; *1* — $\Delta_1 = 1/\mu_1 = 0{,}5$ с; *2* — $\Delta_2 = 1/\mu_2 = 1$ с; *3* — $\Delta_3 = 1/\mu_3 = 2$ с

ский смысл — изменение во времени энергии ошибки оценки. Тогда с учетом формулы (5) получим

$$TD \geq TD_{\min} = \frac{\Delta\delta^2(1+r)}{(1-r) + 2r\Delta/T} \to \min, \qquad (7)$$

или в форме взаимосвязи параметров точность – время на ее достижение —

$$D \geq D_{\min} = \frac{\Delta\delta^2(1+r)}{T(1-r) + 2r\Delta}, \qquad (8)$$

$$T \geq \left[\frac{(1+r)\delta^2}{(1-r)D} - \frac{2r}{1-r}\right]\Delta, \qquad (9)$$

с гарантированной верхней границей правой части неравенства (7) в наихудшем случае

$$TD \geq \sup_T TD_{\min} = \frac{\Delta\delta^2(1+r)}{1-r} \qquad (10)$$

и приведенной ошибкой $\gamma = [1 + (1-r)T/2r\Delta]^{-1}$.

Заметим, что в случае независимых наблюдений ($r = 0$) формула (8) преобразуется к известной $D \geq \delta^2/n$, а выражение (7) в правой части становится константой $TD \geq TD_{\min} = \Delta\delta^2$.

Таким образом, получены прикладные неравенства (7) – (10), связывающие компоненты ИЭ: его длительность T и потенциальную точность D. Неравенства показывают, что нельзя уменьшать время проведения измерений, не ухудшая точности оценок, причем в данном случае существенную роль играет коэффициент $(1 + r)/(1 - r)$, обусловленный соответствующим характером корреляционной функции шума. Поскольку наименьшая величина временного интервала между соседними измерениями равна $\Delta = \tau_\varepsilon$, то в данном конкретном случае из (10) получаем $TD \geq \tau_e\delta^2(e + 1)/(e - 1)$.

На рисунке приведены зависимости энергетического критерия (7) и потенциальной точности (8) от величины времени наблюдения T: *1* — $\Delta_1 = 1/\mu_1 = 0{,}5$ с; *2* — $\Delta_2 = 1/\mu_2 = 1$ с; *3* — $\Delta_3 = 1/\mu_3 = 2$ с. На участке наибольших градиентов энергетического критерия достигается наилучшая эффективность ИЭ, обусловленная малыми временными затратами на ее получение (см. рисунок, *а*).

С учетом введенной ранее величины приведенной ошибки минимальное количество измерений определим как $n_{\min} = \left\{\frac{1-\gamma_{доп}}{\gamma_{доп}}\frac{2r}{1-r}\right\}$, где операция $\{.\}$ означает округление до ближайшего большего целого. Например, для $\gamma_{доп} = 0{,}1$ получаем $n_{\min} = 11$, что соответствует параметрам (см. рисунок) $T_1 = 5{,}5$ с (кривая *1*), $T_2 = 11$ с (кривая *2*), $T_3 = 22$ с (кривая *3*). Кроме того, анализ формул (7) – (10) показывает, что при коррелированных шумах увеличение точности ИЭ требует больших временных затрат, чем при независимом шуме, и может оказаться неоправданным, если ценный ресурс ИЭ — время наблюдения. Существует верхняя граница (см. рисунок, *а*) энергетического критерия (правой части неравенства (7)) в наихудшем случае ($T \to \infty$), выраженная формулой (10). Исходя из наихудшего случая, можно заключить, что неравенство (10) гарантирует некоторую «неухудшаемую» точность ИЭ при коррелированных шумах наблюдения.

Полученный результат (7) – (10) может быть распространен на более общий случай шумов наблюдений с приближенно экспоненциальной корреляционной функцией [16]. При весьма общих условиях корреляционная функция эргодического процесса допускает [16] экспоненциальное приближение:

$$R(\tau) = d\exp[-(c_1 + \beta c_3)|\tau|], \ \beta = E\varepsilon^4/d, \ c_1 + \beta c_3 > 0. \qquad (11)$$

Определение коэффициентов c_1, c_3 не вызывает сложностей и приведено ниже. Таким образом, в данном случае интервал корреляции

$$\tau_\varepsilon = (c_1 + \beta c_3)^{-1} \leq \Delta, \qquad (12)$$

исходя из него можно выбрать значение Δ и, соответственно, доопределить неравенства (7) – (10).

Энергетический критерий в условиях коррелированных шумов наблюдения в непрерывном времени

Модель наблюдения имеет вид: $y_t = h_t(m) + \varepsilon_t$, $t \geq 0$, где ε_t — шумовой процесс заданный стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) в форме Ито [8]

$$\mathrm{d}\varepsilon_t + a_t(\varepsilon_t)\mathrm{d}t = g_t\,\mathrm{d}w_t,\ \ \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, \qquad (13)$$

где $a_t(\varepsilon_t)\mathrm{d}t$, g_t — функции, такие, что для каждого $t \geq 0$

$$\int_0^t a_s(\varepsilon_s)^2 \mathrm{d}s < \infty \text{ и } \int_0^t g_s^2 \mathrm{d}s < \infty,$$

причем

$$\lim_{\tau\to 0} E|\varepsilon_t - \varepsilon_{t-\tau}| = a_t(\varepsilon_t) \text{ — снос},$$

$$\lim_{\tau\to 0} E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-\tau})^2 = = b_t \text{ — диффузия},$$

$b_t = g_t^2$, w_t — винеровский процесс с $Ew_t = 0$, $Ew_t^2 = t$.

Корреляционная функция процесса (13) может быть приближенно представлена экспоненциальной формой (11) с коэффициентами, определяемыми формулой [16] $c_{q-1} = a^{q-1}(0)/(q-1)!$, $q = 1, 2, \ldots$

Точность оценок, полученных в этих условиях, определяется неравенством Крамера – Рао – Вольфовитца [8]:

$$D_h = E[h_{\text{т}}^* - h_{\text{т}}(m)]^2 \geq \frac{1}{I_{\text{т}}}\left[\frac{\partial h_{\text{т}}(m)}{\partial m}\right]^2, \qquad (14)$$

$$I_{\text{т}} = E\int_0^T \frac{1}{b_t}\left(\frac{\partial A_t}{\partial m}\right)^2 dt,\ \ A_t(h_t, y_t) = a_t(y_t - h_t) - \frac{\mathrm{d}h_t}{\mathrm{d}t}. \qquad (15)$$

Рассмотрим модель наблюдения, аналогичную приведенной выше, т.е. $h_t(m) = hm$, а также положим $a_t(\varepsilon_t)\mathrm{d}t = \mu\varepsilon_t$, $\mu > 0$, $g_t = g$, $b = g^2$. В этом случае шум наблюдения, как и ранее, имеет строго экспоненциальную корреляционную функцию $R(\tau) = d\exp(-\mu|\tau|)$, $d = b/2\mu$. С учетом (15) из (14) получим формулу энергетического критерия на единичную нагрузку в непрерывной форме:

$$TD \geq TD_{\min} = b(\mu h)^{-2} = 2\delta^2\tau_\varepsilon. \qquad (16)$$

Примечателен тот факт, что аналогичный результат может быть получен, если в правой части (7) перейти к пределу с $\Delta \to 0$, $n \to \infty$ и принять $\tau_\varepsilon = 1/\mu$. Алгоритм (6) также предельным переходом $\lim\limits_{\tau\to 0, n\to\infty} T = t$ преобразуется в аналоговый:

$$\dot{m}_s^* = \frac{\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon}_s^* + \varepsilon_s^*}{t},\ \ \dot{m}_s^* = \frac{1}{\Delta}\lim_{\tau\to 0}(m_n^* - m_{n-1}^*),$$

$$\dot{\varepsilon}_s^* = \frac{1}{\Delta}\lim_{\tau\to 0}(\varepsilon_n^* - \varepsilon_{n-1}^*),\ \ \varepsilon_s^* = y_s - hm_s^*.$$

Если выбрать в качестве начального условия $m_0^* = (\tau_\varepsilon \dot{y}_0 + y_0)/h$, то решение вышеприведенного дифференциального уравнения оценки получается следующим:

$$m_t^* = \frac{1}{t}\int_0^t [\tau_\varepsilon \dot{y}_s + y_s]\mathrm{d}s$$

(Р. Л. Стратонович, 1959 г.).

На рисунке треугольниками отмечена зависимость $D_{\min} = 2\delta^2\tau_\varepsilon/T$, следующая из неравенства (16), для случая $\tau_\varepsilon = \Delta_2 = 1$ с. Эта кривая полностью совпадает с данными, установленными выше при дискретной модели наблюдения, что свидетельствует о внутреннем единстве получаемых результатов.

Обобщить полученный результат можно, воспользовавшись разложением функции $a_t(\varepsilon_t)$ в ряд в окрестности нуля. Тогда интервал корреляции будет определяться формулой (12), а корреляционная функция шума наблюдения — формулой (11).

Еще раз подчеркнем, что распространить полученные результаты можно и на другие классы плотностей распределения вероятностей шумов. Например, в [13] показано, что в классе гладких, не финитных на носителе $\varepsilon \in (-\infty; \infty)$ плотностей, с функцией $z^* = -\dfrac{1}{p^*}\dfrac{\mathrm{d}p^*}{\mathrm{d}\varepsilon}$, ограниченной константой $|z^*| \leq v = \text{const}$, минимум информации Фишера достигается на плотности $p^* = uC(\alpha)\operatorname{sech}^\alpha(u\varepsilon)$, $\alpha = v/u$, $u > 0$, $C(\alpha) = \Gamma\left(\dfrac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Характерной особенностью этого распределения является диапазон изменения эксцесса: от нуля (гауссовкая плотность) до трех (лапласовская плотность). Стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее шум наблюдения со стационарной плотностью p^*, имеет вид $\mathrm{d}\varepsilon_t + (b/2)vth(u\varepsilon_t)\mathrm{d}t = g\mathrm{d}w_t$, $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$, v, u, $g = \text{const} > 0$. Такого рода СДУ могут быть использованы для описания процессов с медленными нестационарными изменениями [18], процессов установления, ухода из контрольной зоны, процессов, описывающих метрологические характеристики аппаратно-технических средств в теории надежности. В этом случае параметры, входящие в соотношения (11), (12), составляют: $c_1 = vub/2$, $c_3 = -vu^3b$. Формула для параметра β, зависящего от α, громоздка и приведена в [16]. Таким образом, формула (12) полностью определена, как и правая часть неравенства для энергетического критерия (16).

Энергетический критерий и возможности достижения его нижней границы

Следует иметь в виду, что в данной работе речь идет о потенциальных качественных характеристиках ИЭ (точность обработки результатов наблюдений — время на ее достижение), не учитывающих особенности реальных средств измерений, а именно наличия некоторой доли систематических ошибок [12]. Их присутствие не позволяет достигнуть потенциального качества (нижней теоретической границы). Отчасти уменьшить влияние этих ошибок можно путем введения автоматической коррекции средств измерений после каждого измерения или небольшой серии измерений.

В случае коррелированных шумов наблюдения, как следует из формул (7) – (10), интервал между соседними измерительными отсчетами нельзя выбрать произвольно и тем более определить его как величину, обратную общему количеству измерений. Он должен быть согласован с интервалом корреляции шума, т.е. выбран исходя из условия $\Delta \geq \tau_\varepsilon$. В статье использовано стандартное определение интервала корреляции, однако в некоторых прикладных задачах, например, при гармоническом характере корреляционной функции с экспоненциальной огибающей, могут использоваться и другие его определения, в частности, абсолютный или максимальный интервал корреляции [10]. Кроме того, интервал корреляции может быть определен через ширину спектральной мощности шума [10]: $\tau_\varepsilon = (4\Delta F_\varepsilon)^{-1}$.

Как следует из полученных результатов, нижняя граница энергетического критерия (7), (16) достигается на конкретном классе плотностей $p \in P_1$ с ограниченной дисперсией шума, для которого $D_{\min}(p, P_1) \geq D_{\min}(p^*, P_1)$. Рассмотрение любого другого класса P_2 требует решения новой изопериметрической задачи $p^* = \arg\min_{p \in P_2} I(p)$ и, соответственно, изменения формул (7) – (10), (16). Однако при этом обеспечивается значительная гибкость в расчетах — класс плотностей может быть расширен или сужен в зависимости от конкретных условий проведения ИЭ.

Расчетные формулы, приведенные выше, содержат только истинные значения параметров ИЭ. Очевидно, в случае неизвестных параметров требуется их предварительная оценка, что также приводит к ухудшению потенциальных качественных характеристик ИЭ.

Таким образом, описанный энергетический критерий позволяет не только потенциально оценить качества ИЭ, но и определить его характеристики (точность и время на ее достижение) для выбранного класса распределений коррелированных шумов наблюдения. Полученные соотношения могут быть использованы в теоретических и прикладных расчетах, когда корреляционная функция шума наблюдения имеет экспоненциальный или близкий к экспоненциальному виду характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.** Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979. — 528 с.
2. **Сейдж Э., Мелс Дж.** Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Пер. с англ.; под ред. проф. Б. Р. Левина. — М.: Связь, 1976. — 496 с.
3. **Орлов А. И.** Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.
4. **Денисенко В. В.** Повышение точности путем многократных наблюдений / Современные технологии автоматизации. 2010. № 1. С. 98 – 102.
5. **Белов А. А., Дриндрожик Л. И., Колин В. Н. и др.** Особенности измерения энергетических параметров сигналов при адаптации к воздействию коррелированных помех / Радиотехника. 1995. № 3. С. 37 – 39.
6. **Протасов К. В.** Статистический анализ экспериментальных данных. — М.: Мир, 2007. — 232 с.
7. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.
8. **Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.** Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 1974. — 695 с.
9. **Овсянников А. В., Козел В. М.** Влияние информационной прогнозируемости нестационарного шума на реализацию алгоритмов оценивания параметров полезного сигнала / Доклады БГУИР. 2015. № 5(91). С. 29 – 35.
10. **Мирский Г. Я.** Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. — М.: Энергоиздат, 1982. — 320 с.
11. **Овсянников А. В.** Статистические неравенства в сверхрегулярных статистических экспериментах теории оценивания / Вести Национальной Академии Наук Беларуси. Сер. Физ.-мат. наук. 2009. № 2. С. 106 – 110.
12. **Новицкий П. В., Зограф И. А.** Оценка погрешностей результатов измерений. 2-е изд., перераб. и доп. — Л.: Энергоатомиздат, 1991. — 304 с.
13. **Овсянников А. В., Козел В. М.** Анализ и применение обобщенного sech^k распределения / Доклады БГУИР. 2013. № 8(78). С. 23 – 29.
14. **Орлов А. И.** Новая парадигма прикладной статистики / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 11. С. 87 – 93.
15. **Хьюбер Дж. П.** Робастность в статистике / Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 304 с.
16. **Кловский Д. Д., Конторович В. Я., Широков С. М.** Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических дифференциальных уравнений. — М.: Радио и связь, 1984. — 248 с.
17. **Овсянников А. В.** Робастно-адаптивный усилитель-ограничитель / Радиотехника. 2011. № 3. С. 85 – 89.

REFERENCES

1. **Ibragimov I. A., Khas'minskii R. Z.** Asimptoticheskaya teoriya otsenivaniya [The asymptotic theory of estimation]. — Moscow: Nauka, 1979. — 528 p. [in Russian].
2. **Sage A. P., Melse J. L.** Estimation theory with application to communication and control. — NY: McGraw-Hill, 1972. — 496 p.
3. **Orlov A. I.** Prikladnaya statistika [Applied statistics]. — Moscow: Ékzamen, 2006. — 671 p. [in Russian].
4. **Denisenko V. V.** Povyshenie tochnosti putem mnogokratnykh nablyudenii [Increased accuracy through repeated observations] / Sovr. Tekhnol. Avtomatiz. 2010. N 1. P. 98 – 102 [in Russian].
5. **Belov A. A., Drindrozhik L. I., Kolin V. N., et al.** Osobennosti izmereniya énergeticheskikh parametrov signalov pri adaptatsii k vozdeistviyu korrelirovannykh pomekh [Features measurement of signal parameters of energy in adapting to the effects of correlated noise] / Radiotekhnika. 1995. N 3. P. 37 – 39.
6. **Protasov K. V.** Statisticheskii analiz éksperimental'nykh dannykh [Statistical analysis of experimental data]. — Moscow: Mir, 2007. — 232 p. [in Russian].
7. **Krasovskii A. A.** (ed.). Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya [Guide to automatic control theory]. — Moscow: Nauka, 1987. — 712 p. [in Russian].

8. **Liptser R. Sh., Shiryaev A. N.** Statistika sluchainykh protsessov (nelineinaya fil'tratsiya i smezhnye voprosy) [Statistics of random processes (nonlinear filtering and related matters)]. — Moscow: Nauka, 1974. — 695 p. [in Russian].
9. **Ovsyannikov A. V., Kozel V. M.** Vliyanie informatsionnoi prognoziruemosti nestatsionarnogo shuma na realizatsiyu algoritmov otsenivaniya parametrov poleznogo signala [Effect of non-stationary noise predictability of information on the implementation of algorithms for estimating the parameters of the desired signal] / Dokl. BGUIR. 2015. N 5(91). P. 29 – 35 [in Russian].
10. **Mirskii G. Ya.** Kharakteristiki stokhasticheskoi vzaimosvyazi i ikh izmereniya [Characteristics of stochastic relations$h_i$ps and their measurement]. — Moscow: Énergoizdat, 1982. — 320 p. [in Russian].
11. **Ovsyannikov A. V.** Statisticheskie neravenstva v sverkhregulyarnykh statisticheskikh éksperimentakh teorii otsenivaniya [The statistics of inequality in a super regular statistical experiments, estimation theory] / Vesti NAN Belarus. Ser. Fiz.-Mat. Nauk. 2009. N 2. P. 106 – 110 [in Russian].
12. **Novitskii P. V., Zograf I. A.** Otsenka pogreshnostei rezul'tatov izmerenii [Evaluation of errors of measurement results]. 2nd edition. — Leningrad: Énergoatomizdat, 1991. — 304 p. [in Russian].
13. **Ovsyannikov A. V., Kozel V. M.** Analiz i primenenie obobshchennogo sech^k raspredeleniya [Analysis and application of generalized sech^k distribution] / Dokl. BGUIR. 2013. N 8(78). P. 23 – 29 [in Russian].
14. **Orlov A. I.** Novaya paradigma prikladnoi statistiki [The new paradigm of applied statistics] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2012. Vol. 78. N 1. Part 1. P. 87 – 93 [in Russian].
15. **Huber P. J.** Robust Statistics. — Wiley, 1981. — 304 p.
16. **Klovskii D. D., Kontorovich V. Ya., Shirokov S. M.** Modeli nepreryvnykh kanalov svyazi na osnove stokhasticheskikh differentsial'nykh uravnenii [Models of continuous communication channels on the basis of stochastic differential equations]. — Moscow: Radio i svyaz', 1984. — 248 p. [in Russian].
17. **Ovsyannikov A. V.** Robastno-adaptivnyi usilitel'-ogranichitel' [The robust adaptive amplifier-limiter] / Radiotekhnika. 2011. N 3. P. 85 – 89 [in Russian].