Механика материалов: прочность, ресурс, безопасность

УДК 620.191.33:539.42:531.7

ОЦЕНКА РАЗМЕРОВ ЗОНЫ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ПОЛЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ[1]

© А. С. Чернятин[2,3], И. А. Разумовский[3], Ю. Г. Матвиенко[3]

Статья поступила 10 августа 2016 г.

Поврежденной зоной (зоной неупругого деформирования) около вершины трещины считается область, в которой напряженно-деформированное состояние (НДС) не может быть описано собственными функциями решения упругой задачи о трещине (решения Вильямса). Для описания НДС вне поврежденной зоны используется указанное разложение Вильямса, в котором требуется учесть значительное количество регулярных членов. В качестве методов измерений параметров НДС в зоне трещины предлагается использовать оптико-цифровые методы, обеспечивающие возможность получения значительных объемов экспериментальной информации в виде полей перемещений поверхности исследуемого объекта непосредственно в цифровом виде.

Ключевые слова: трещина; механика разрушения; методы оценки сингулярных и несингулярных составляющих поля перемещений; погрешности моделирования; зона пластичности.

Пластические зоны, возникающие в области вершины трещины, отражают особенности поведения материала в конкретных условиях нагружения рассматриваемого элемента конструкции. Информация о размерах этих зон может быть использована для диагностики процесса накопления повреждения и разрушения [1 – 5].

Основы расчетного анализа нелинейного поведения материала в зоне вершины трещины к настоящему времени достаточно хорошо разработаны. Расчетно-аналитические методы решения соответствующих задач механики деформируемого твердого тела изложены в монографиях [5, 6]. Методы анализа упругопластического НДС в зонах трещин с использованием МКЭ рассмотрены в работах [3, 4, 7 – 11 и др.].

Не менее важной составляющей современных подходов к оценке прочности, трещиностойкости и ресурса конструкций является экспериментальный анализ поведения материала в области трещиноподобных дефектов (зонах пластичности, предразрушения и накопления повреждения). Для решения этой задачи разработаны и успешно применяются самые различные методы: оптическая [12] и рентгеновская [10] фрактодиагностика, спекл-интерферометрия [13] и электромагнитоакустика [12, 14].

Для анализа деформированного состояния в зонах трещин в натурных конструкциях наиболее перспективными представляются оптико-цифровые методы — корреляции цифровых изображений (КЦИ) [15 – 17] и электронной цифровой спекл-интерферометрии (ЭЦСИ) [18, 19] Эти методы, нашедшие активное применение как в лабораторных, так и в натурных исследованиях, обеспечивают возможность получения значительных (практически неограниченных) объемов экспериментальной информации в виде полей перемещений поверхности исследуемого объекта непосредственно в цифровом виде. Кроме того, преимуществами указанных методов являются их высокая чувствительность и бесконтактность.

Цель данного исследования — разработка методического подхода и соответствующей программы для оценки размеров области пластических деформаций (и других видов повреждений) в зоне трещиноподобных дефектов на основе математической обработки результатов экспериментальной регистрации полей перемещений. Здесь под «зоной повреждения» понимается область, где напряженно-деформированное состояние (НДС) отлично от упругого.

В основе методики лежит то обстоятельство, что НДС в локальной зоне вершины трещины не может быть описано соотношениями, соответствующими упругому НДС в области трещины [1 – 4]. Необходимым условием практического применения предлагаемой методики является использование для последующей математической обработки значительных массивов экспериментальной информации в виде полей тангенциальных перемещений в рассматриваемой зоне.

Предлагаемый подход является развитием методики определения коэффициентов интенсивности напря-

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14–19-00776

[2] МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;
e-mail: cas@inbox.ru

[3] ИМАШ им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия.

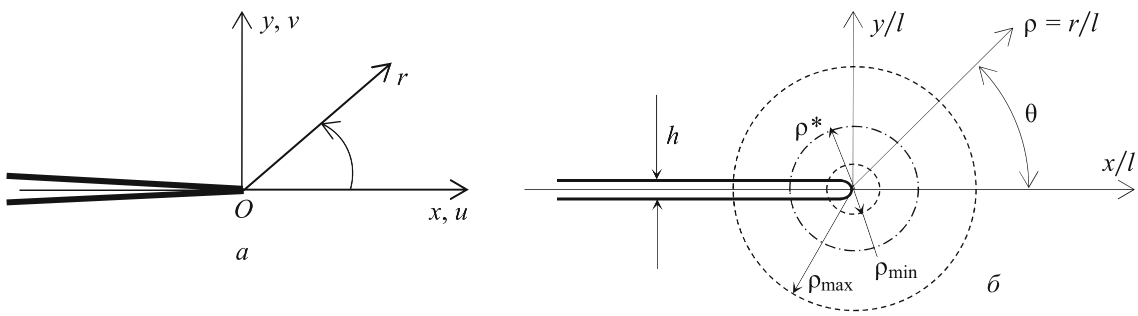

Рис. 1. Окрестность вершины трещины (*а*) и область локализации точек, используемых при получении аналитического представления полей перемещений в зоне трещины (*б*)

жений (K_I, K_{II}) при комбинированном нагружении на основе обработки интерференционных картин — полей максимальных касательных напряжений τ_{max} [20]. Решение задачи сводится к нахождению коэффициентов функций Вильямса, представляющих собой описание полей напряжений в зоне трещины, из условия минимума среднего квадратического отклонения (максимального касательного напряжения) τ_{max} во множестве расположенных в окрестности вершины трещины точек (рис. 1, *а*). В отличие от подхода, рассмотренного в работе [20], предлагаемая методика базируется на обработке полей тангенциальных перемещений u и v (см. рис. 1, *а*), асимптотика которых (в отличие от деформаций и напряжений) не является сингулярной. Очевидно, что указанное обстоятельство будет оказывать значительное негативное влияние на точность определения искомых параметров. Вместе с тем отметим, что оба подхода фактически сводятся к построению соответствующего исходной экспериментальной информации о НДС в зоне трещины аналитического решения задачи теории упругости в виде разложения по собственным функциям (функциям Вильямса).

Поскольку геометрия малой окрестности вершины реальной трещины (как в натурном объекте, так и в образце) в принципе не может рассматриваться в качестве «математического разреза», зона порядка $r \le (3-4)h$ (h — ширина трещины в окрестности вершины) исключается из области локализации исходных экспериментальных данных (рис. 1, *б*). Другой причиной, в соответствии с которой отмеченная зона r должна быть исключена из рассмотрения, является то, что в месте выхода трещины на свободную поверхность в окрестности точки O (см. рис. 1) имеет место трехмерное напряженное состояние, и асимптотика НДС определяется отличными от соотношений Вильямса уравнениями [21].

В основе предлагаемой процедуры оценки размеров зоны поврежденного материала на основе обработки экспериментально полученных полей перемещений в «неповрежденных» зонах и в окрестности вершины трещины лежит следующее обстоятельство. Очевидно, что в случае когда НДС в зоне вершины трещины, используемой для определения коэффициентов функции Вильямса, близко к упругому, выбор зоны локализации экспериментально зарегистрированных полей перемещений $\rho_{min} \le \rho \le \rho_{max}$, применяемых для решения задачи, не будет оказывать заметного влияния на получаемые результаты. С другой стороны, при возникновении в окрестности вершины трещины существенных пластических деформаций, поврежденного металла и т.п. процедура становится неустойчивой. Можно ожидать, что, начиная с некоторой величины $\rho > \rho^*$ и при дальнейшем ее увеличении, значения искомых параметров не будут изменяться. Тогда величину $\rho = \rho^*$ можно приближенно считать радиусом зоны, где имеют место существенные погрешности моделирования задачи, что обусловлено наличием пластических деформаций или других типов повреждений материала.

Методика и программа определения коэффициентов разложения Вильямса на основе обработки полей тангенциальных перемещений

Поля перемещений u, v в окрестности вершины трещин I и II типов могут быть представлены в виде известного разложения Вильямса:

$$u^{\mathrm{I}}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2G} a_n \left\{ \left[\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \right] \cos\frac{n\theta}{2} - \frac{n}{2}\cos\frac{(n-4)\theta}{2} \right\},$$

$$v^{\mathrm{I}}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2G} a_n \left\{ \left[\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \right] \sin\frac{n\theta}{2} + \frac{n}{2}\sin\frac{(n-4)\theta}{2} \right\},$$

$$u^{\mathrm{II}}(r,\theta)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n/2}}{2G}b_n\left\{\left[\kappa+\frac{n}{2}-(-1)^n\right]\sin\frac{n\theta}{2}-\frac{n}{2}\cos\frac{(n-4)\theta}{2}\right\},$$

$$v^{\mathrm{II}}(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n/2}}{2G}b_n\left\{\left[\kappa-\frac{n}{2}+(-1)^n\right]\cos\frac{n\theta}{2}+\frac{n}{2}\cos\frac{(n-4)\theta}{2}\right\}, \qquad (1)$$

где r, θ — полярные координаты, связанные с вершиной трещины (см. рис. 1); κ — параметр типа напряженного состояния (для плоского напряженного состояния $\kappa=\dfrac{3-\nu}{1+\nu}$, для плоского деформированного состояния $\kappa = 3 - 4\nu$); G и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала. Отметим, что $a_1 = K_{\mathrm{I}}\big/\sqrt{2\pi}$, $b_1 = K_{\mathrm{II}}\big/\sqrt{2\pi}$, $a_2 = T/4$, T — несингулярные T-напряжения, действующие в плоскости xOy [22].

Для расчета коэффициентов a_n, b_n из соотношений (1) можно использовать следующий подход. На основе экспериментов (или расчетов соответствующей краевой задачи) определяются тангенциальные перемещения (перемещения, возникающие на поверхности тела) в M точках:

$$u^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*, \ldots, u_M^*\}^{\mathrm{T}},\ v^* = \{v_1{}^*, v_2^*, \ldots, v_m^*, \ldots, v_M^*\}^{\mathrm{T}}.$$

Положение точек измерения характеризуется полярными координатами $r_m = r_m^*$, $\theta_m = \theta_m^*$, т.е.

$$u^* = u^*(r^*, \theta^*),\ v^* = v^*(r^*, \theta^*).$$

С другой стороны, указанным величинам перемещений в соответствие могут быть поставлены перемещения, рассчитанные для этих же точек на основе аналитических соотношений (1):

$$u = u(r^*, \theta^*),\ v = v(r^*, \theta^*).$$

Представим выражение (1) в более удобном для дальнейших выкладок виде:

$$u^I(r,\theta)=\sum_{n=1}^{N} f_n^u(r,\theta)a_n,\ v^I(r,\theta)=\sum_{n=1}^{N} f_n^v(r,\theta)a_n,\ u^{II}(r,\theta)=\sum_{n=1}^{N} g_n^u(r,\theta)b_n,\ v^{II}(r,\theta)=\sum_{n=1}^{N} g_n^v(r,\theta)b_n. \qquad (2)$$

Величины коэффициентов a_n, b_n следует определять из условия наилучшего соответствия полей перемещений u_m, v_m ($m = 1, \ldots, M$) в области $\rho_{\min} \le \rho \le \rho_{\max}$, $-\theta_1 \le \theta_2$, описываемых выражениями (1), массиву экспериментально полученных перемещений u_m^*, v_m^*. Эта задача может быть решена на основе выполнения условия минимизации общей невязки Δ между перемещениями u_i^*, u_i и v_i^*, v_i. В качестве меры расхождения перемещений может быть принято среднеквадратическое отклонение

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{2M}\left[\sum_{m=1}^{M}(u_i^*-u_i)^2+\sum_{m=1}^{M}(v_i^*-v_i)^2\right]}. \qquad (3)$$

Как известно, решение указанной задачи минимизации может быть получено из решения матричного уравнения

$$\{\mathbf{U}^*\} = [\mathbf{F}]\{\mathbf{A}\}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{U}^*$ — вектор истинных величин перемещений u^* и v^*; $\mathbf{A}$ — вектор N неизвестных коэффициентов a_n, b_n в разложении Вильямса; $\mathbf{F}$ — матрица значений функций (2) в точках r_i^*, θ_i^* при соответствующих коэффициентах разложения (имеет размерность $2M \times 2N$):

$$\mathbf{U}^*=\begin{Bmatrix}u_1^*\\ \ldots\\ u_M^*\\ v_1^*\\ \ldots\\ v_M^*\end{Bmatrix},\ \mathbf{F}=\begin{bmatrix}f_1^u(r_1^*,\theta_1^*) & \ldots & f_N^u(r_1^*,\theta_1^*) & g_1^u(r_1^*,\theta_1^*) & \ldots & g_N^u(r_1^*,\theta_1^*)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f_1^u(r_M^*,\theta_M^*) & \ldots & f_N^u(r_M^*,\theta_M^*) & g_1^u(r_M^*,\theta_M^*) & \ldots & g_N^u(r_M^*,\theta_M^*)\\ f_1^v(r_1^*,\theta_1^*) & \ldots & f_N^v(r_1^*,\theta_1^*) & g_1^v(r_1^*,\theta_1^*) & \ldots & g_N^v(r_1^*,\theta_1^*)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f_1^v(r_M^*,\theta_M^*) & \ldots & f_N^v(r_M^*,\theta_M^*) & g_1^v(r_M^*,\theta_M^*) & \ldots & g_N^v(r_M^*,\theta_M^*)\end{bmatrix},\ \mathbf{A}=\begin{Bmatrix}a_1\\ \ldots\\ a_N\\ b_1\\ \ldots\\ b_N\end{Bmatrix}.$$

Следует отметить, что соотношения (1) не включают линейные и угловое перемещения в плоскости xOy тела с трещиной как жесткого целого. Поэтому дополним матрицу **F** и вектор **A** компонентами:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \{1\} & [f_n^u(r_m^*, \theta_m^*)] & \{1\} & [g_n^u(r_m^*, \theta_m^*)] & \{1 - \alpha r_m^* \sin\theta_m^*\} \\ \{1\} & [f_n^v(r_m^*, \theta_m^*)] & \{1\} & [g_n^v(r_m^*, \theta_m^*)] & \{\alpha r_m^* \cos\theta_m^*\} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ \{a_n\} \\ b_0 \\ \{b_n\} \\ \alpha \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

где a_0, b_0 — перемещения соответственно вдоль осей x, y; α — малый угол поворота тела как жесткого целого.

Разберем процедуру выбора оптимального количества учитываемых членов N разложения. Для текущего (выбранного) количества членов N решается уравнение (4), в котором **A** и **F** используются в форме (5). В результате определяются соответствующие коэффициенты разложения

$$\mathbf{A}^N = \{a_0\,\{a_n\}\,b_0\,\{b_n\}\,\alpha\} \ (j = 1, ..., N).$$

Заметим, что при этом матрица $\mathbf{F} = \mathbf{F}^N$ имеет размерность $2M \times (2N + 3)$. Далее по соотношениям (1) вычисляется вектор величин перемещений $\mathbf{U}^N$ и по формуле (4) рассчитывается невязка Δ^N, соответствующие текущему количеству членов разложения N. Описанная расчетная процедура производится многократно при последовательном увеличении N, начиная с $N = 1$ (при увеличении N на единицу количество столбцов матрицы **F** увеличивается на два, как и количество элементов вектора **A**). Для каждого N определяется невязка Δ^N. Условием прекращения процедуры и выбора оптимальной величины N может быть выполнение одного или двух сразу следующих условий: 1) $\Delta^N \le \varepsilon_\Delta$; 2) $|\Delta^{N-1}|/\Delta^N \le \varepsilon_\%$, где параметры ε_Δ, $\varepsilon_\%$ выбираются исходя из точности расчета определения некоторых назначаемых параметров или на основе допустимых отклонений между полями перемещений u_m, v_m и u_m^*, v_m^*.

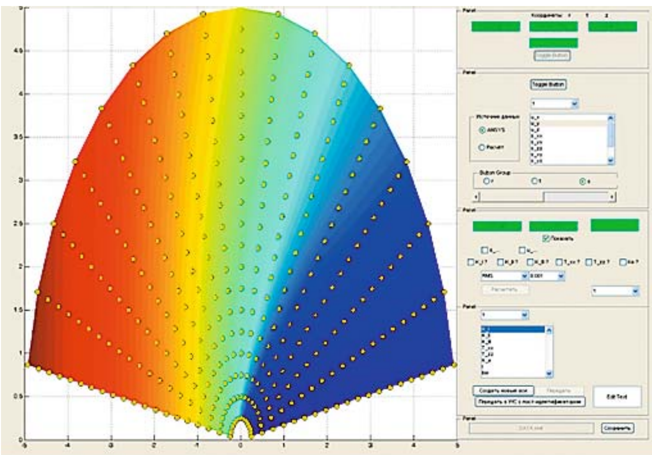

Рис. 2. Интерфейс программы получения коэффициентов разложения Вильямса визуализации НДС в зоне трещины

Представленная методика определения коэффициентов членов разложения Вильямса и, следовательно, получения аналитического представления полей перемещений в зоне трещины реализована в среде MatLab в виде программы с графическим интерфейсом (рис. 2).

Разработанная программа позволяет выполнять следующие операции.

1. Загружать результаты экспериментальных данных (или результатов расчета на основе численного эксперимента) — величины u^*, v^*, а также различные компоненты тензора напряжений; визуализировать поля перемещений и напряжений, используя интерполирование данных.

2. Формировать координаты r^*, θ^* равномерно распределенных по области точек измерения (для численного определения в них величин перемещений, с использованием ANSYS).

3. Осуществлять выборку массивов r^*, θ^* и u^*, v^*, которые будут использоваться при определении коэффициентов разложения Вильямса, из имеющихся массивов точек измерений (эта функция обеспечивает возможность оценивать влияние локализации точек измерения на точность и сходимость процесса решения).

4. Проводить определение коэффициентов разложения a_n, b_n и a_0, b_0, α в соответствии с выбранным критерием завершения расчетов.

5. Визуализировать расчетные поля перемещений на основе найденных коэффициентов (графическое сопоставление данных полей с исходными позволяет судить о корректности полученного решения как в целом, так и в частности — в определенных областях около вершины трещины).

Определение параметров механики разрушения и размеров зоны поврежденного материала

Как отмечено выше, при возникновении в окрестности вершины трещины НДС, которое вследствие появления пластических деформаций, поврежденного металла и прочих признаков существенно отличается от упругого, процедура определения параметров механики разрушения будет неустойчивой. С другой стороны, можно ожидать, что, исключив «поврежденную зону» из области исходных данных для расчета параметров механики разрушения, можно получить устойчивое решение задачи, которое позволит оценить раз-

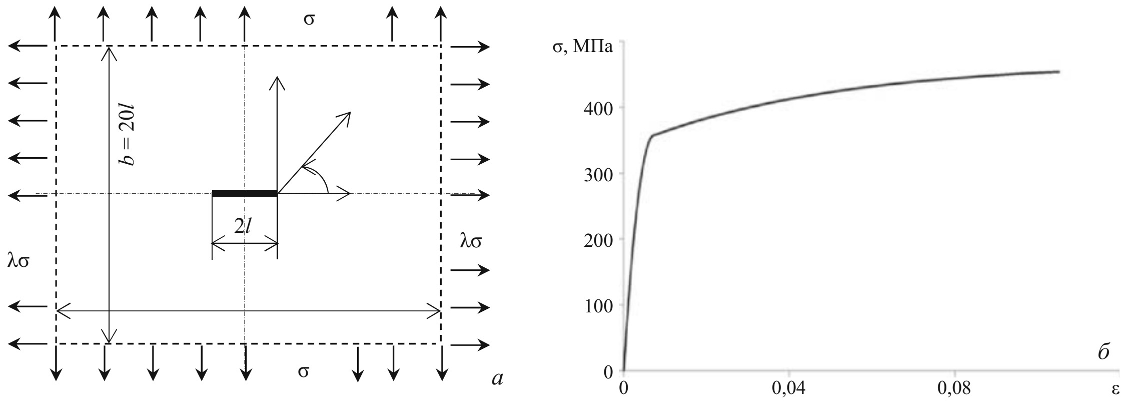

Рис. 3. Схема нагружения пластины с трещиной (*а*) и диаграмма деформирования материала пластины (*б*)

мер поврежденной зоны. Для определения возможностей такого подхода была рассмотрена краевая задача о НДС пластины ($b = 20l$) с центральной сквозной трещиной длиной $2l$, нагруженной растягивающими нагрузками (рис. 3). Задача решалась для случая плоского напряженного состояния.

На первом этапе проводилась оценка влияния зоны локализации исходных данных на точность определения K_I и T-напряжений при отсутствии пластических деформаций. Некоторые результаты указанных расчетов представлены в таблице. Из них следует, что исключение из области локализации исходных данных зон больших размеров ($\rho_{max} = 0{,}3$ и более) практически не влияет на результаты оценки искомых параметров механики разрушения. Кроме того, для аналитического представления полей перемещений можно использовать значительное количество членов разложения Вильямса ($N > 15$). Это означает, что соотношения (1) могут применяться для аналитического представления областей значительных размеров ($r > l$).

Для оценки влияния случайной погрешности исходных данных были выполнены расчеты этой же задачи, в которых моделировалась погрешность экспериментальных результатов. После проведения расчетов НДС в найденные «точные» значения перемещений u, v с помощью датчика случайных чисел вносилась погрешность (с заданным диапазоном разброса относительной погрешности δu, δv). Расчеты показали, что даже при диапазоне разброса относительных погрешностей δu_{max}, $\delta v_{max} \le 15\ \%$ они не оказывают существенного влияния на точность результатов (относительная ошибка определения K_I по крайней мере в два раза меньше δu_{max}, δv_{max}).

В качестве упругопластической задачи расчета НДС в зоне трещины рассматривалась краевая задача (см. рис. 3, *а*) для пластины из материала Д16Т, диаграмма деформирования которого представлена на рис. 3, *б*. Расчет НДС выполнялся с использованием ПК ANSYS. Полученные распределения перемещений и эквивалентных напряжений (по Мизесу), возникающих при $\sigma = 2/5\sigma_т = 150$ МПа, соответствующих упругопластическому НДС, представлены на рис. 4. Отметим, что на изображении поля эквивалентного напряжения серым цветом указана область пластичности, размеры которой не превышают 0,15 – 0,2l.

Результаты расчетов параметров механики разрушения K_I и T-напряжений, полученные на основе разработанной программы по полям перемещений u и v при использовании различных областей локализации исходных данных, представлены на рис. 5. (Отметим, что из решения упругой задачи при принятых величинах нагрузок следует, что условные «упругие» значения $K_I = 42{,}6$ МПа · м$^{1/2}$, $T = -77{,}9$ МПа.) При расчетах точки «измерений» располагались равномерно в круговом секторе $\rho_{min} \le \rho \le \rho_{max}$, $0 \le \theta \le \pi$.

Количество учитываемых членов разложения Вильямса N принято равным 15, так как в ряде случаев в качестве зоны локализации точек «измерений» использовалась существенно удаленная от вершины трещины зона, где влияние сингулярной составляющей поля напряжений проявляется в меньшей степени, чем влияние его регулярной составляющей.

Были также проведены аналогичные расчеты, в которых моделировалась погрешность экспериментальных данных. Результаты оказались близки оцен-

Величины K_I и T-напряжений в зависимости от локализации зон исходных данных и количества членов разложения N

ρ_{min}	ρ_{max}	N	$K_I/\sigma\sqrt{\pi l}$	T/σ
0,1	0,6	2	0,992	–0,58
		3	0,997	–0,97
		5	1,014	–1,04
		10	1,014	–1,04
		15	1,014	–1,04
0,2	0,6	2	1,014	–0,59
		3	0,978	–0,96
		5	1,014	–1,04
		10	1,014	–1,04
		15	1,014	–1,04
0,3	0,6	2	1,014	–0,60
		3	0,961	–0,96
		5	1,015	–1,04
		10	1,014	–1,04
		15	1,014	–1,04

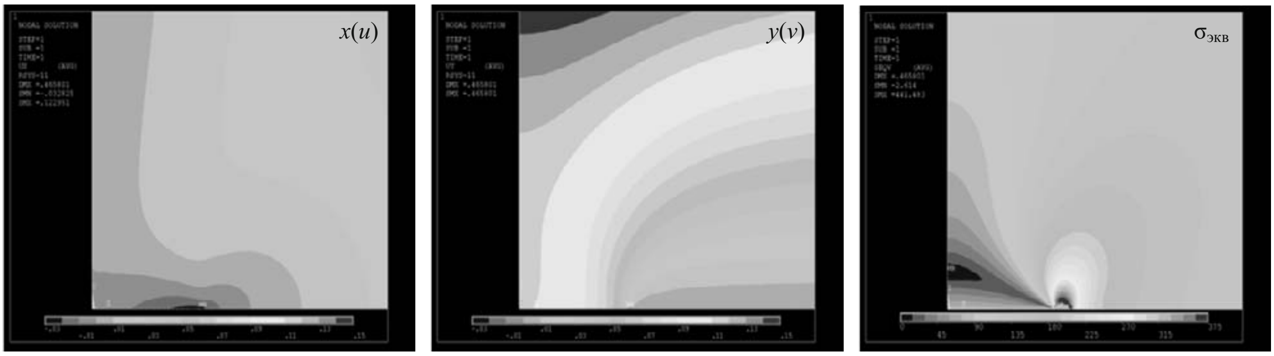

Рис. 4. Распределения перемещений вдоль осей x (u) и y (v), а также эквивалентных напряжений ($\sigma_{экв}$) в зоне трещины

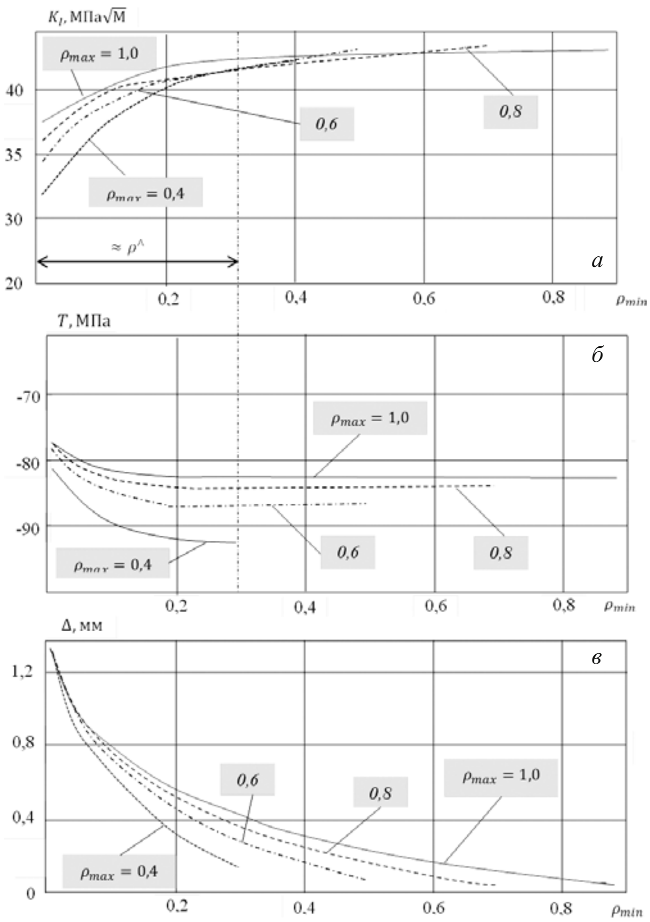

Рис. 5. Расчетные зависимости K_{I}, T-напряжений и среднего квадратичного отклонения Δ от величины ρ_{min} при различных значениях ρ_{max}

кам влияния погрешностей, полученным для упругой задачи (при δu_{max}, $\delta v_{max} \le 15$ % относительная ошибка определения K_{I} по крайней мере в два раза меньше δu_{max}, δv_{max}, а при определении T-напряжений несколько выше, но также менее погрешности исходных данных).

Основные результаты расчетов K_{I} и T-напряжений (см. рис. 5) получены следующим образом. При постоянной величине «верхней» границы области исходных данных (ρ_{max} = const) проводилась серия расчетов коэффициентов разложения Вильямса при последовательном увеличении значения ρ_{min} на основе обработки исходных данных, локализованных в области $\rho_{min} \le \rho \le \rho_{max}$. Для каждого последующего расчета величина ρ_{max} увеличивалась до тех пор, пока не достигались устойчивые значения искомых параметров (K_{I} и T-напряжений). Соответствующую этому состоянию величину безразмерного радиуса обозначим ρ^*_{max}. Точку $\rho = \rho^*$ кривой $K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}(\rho_{min})$, после которой значение K_{I} становится стабильным ($\mathrm{d}K_{\mathrm{I}}/\mathrm{d}\rho_{min} \to 0$), можно считать границей зоны, где имеет место неупругое поведение материала (см. рис. 5, *а*). Очевидно, что найденное при использовании в качестве зоны локализации исходных данных области $\rho^* \le \rho \le \rho^*_{max}$ аналитическое представление поля перемещений в виде разложения по функциям Вильямса позволяет корректно описать НДС в этой области.

Заметим, что из этого представления можно с высокой точностью определить величины параметров механики разрушения — K_{I} и T-напряжения, которые соответствовали бы состоянию исследуемого объекта с трещиной при отсутствии в окрестности вершины трещины пластических деформаций и других типов повреждений.

Таким образом, область $\rho < \rho^*$ можно считать зоной неупругого деформирования (зоной поврежденного материала). Это весьма условное понятие, суть которого заключается в том, что в этой зоне НДС не соответствует асимптотическому решению задачи о трещине. Вместе с тем такой подход может дать весьма полезную информацию для анализа поведения трещины на основе экспериментальной информации о полях перемещений, зарегистрированных современными оптико-корреляционными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Механика разрушения и прочность материалов / Под ред. В. В. Панасюка. Т. 1, 3, 4. — Киев: Наукова думка, 1988 – 1990.
2. **Махутов Н. А.** Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. В 2 ч. — Новосибирск: Наука, Ч. 1: Критерии прочности и ресурса, 2005. — 493 с.; Ч. 2. Обоснование ресурса и безопасности, 2005. — 610 с.
3. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения: специальные задачи механики разрушения. — URSS, 2008. — 192 с.
4. **Матвиенко Ю. Г.** Модели и критерии механики разрушения. — М.: Физматлит, 2006. — 327 с.

5. **Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В.** Нелинейная механика разрушения. — Самара: Изд-во «Самарский университет», 2004. — 562 с.
6. **Волков И. А., Коротких Ю. Г.** Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. — М.: Физматлит, 2008. — 424 с.
7. **Морозов Е. М., Никишков Г. П.** Метод конечных элементов в механике разрушения. — М.: ЛКИ, 2008. — 254 с.
8. **Куджанов В. Н.** Компьютерное моделирование деформирования, поврежденности и разрушения неупругих материалов и конструкций. Учебное пособие. — М.: МФТИ, 2008. — 212 с.
9. **Айрих В. А., Глаголев В. В.** К определению напряженного состояния упругопластических тел с трещиной / Изв. Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 3. С. 58 – 70.
10. **Клевцов Г. В.** Закономерности образования упругопластических зон у вершины трещины при различных видах нагружения и рентгеновская фрактодиагностика разрушения / Вестник Оренбургского государственного университета. Естественные и технические науки. 2006. Т. 2. № 1. С. 81 – 88.
11. **Емельянов О. В., Пелипенко М. П.** Оценка размера зоны пластических деформаций в вершине усталостной трещины при воздействии перегрузок «растяжение» / Вестник Южно-Уральского государственного университета. 2014. № 4. С. 21 – 29.
12. **Ботвина Л. Р.** Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности. — М.: Наука, 2008. — 334 с.
13. **Полетика Т. М., Нариманова Г. Н., Колосов С. В.** Пластическое течение в сплавах циркония с гексагонально-плотноупакованной решеткой на макро- и микроуровнях / Изв. Томского политехнического университета. 2004. Т. 307. № 4. С. 126 – 128.
14. **Клюшников В. А., Мишакин В. В. и др.** Исследование поврежденности металла под защитным покрытием с помощью электромагнитно-акустического преобразователя / Вестник Нижегородского университета. 2010. № 5. С. 113 – 115.
15. **Плешанов В. С., Кибиткин В. В., Напрюшкин А. А., Солодухин А. И.** Измерение деформации материалов методом корреляции цифровых изображений / Изв. Томского политехнического университета. 2008. Т. 312. № 2. С. 343 – 349.
16. Digital Speckle Pattern Interferometry and Related Techniques / P. Rastogi (ed.). — West Sussex: John Wiley, 2001. — 384 p.
17. **Yates J. R., Zanganeh M., Tai Y. H.** Quantifying crack tip displasment fields with DIC / Engin. Fract. Mech. 2010. Vol. 77. P. 1682 – 1692.
18. **Писарев В. С., Матвиенко Ю. Г., Одинцев И. Н.** Определение параметров механики разрушения при малом приращении длины трещины / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 4. С. 51 – 54.
19 **Matvienko Y. G., Pisarev V. S., Eleonsky S. I., Chernov A. V.** Determination of fracture mechanics parameters by measurements of local displacements due to crack length increment / Fatigue Fract. Engin. Mater. Struct. 2014. Vol. 37. N 12. P. 1306 – 1318.
20. **Литвинов И. А., Матвиенко Ю. Г., Разумовский И. А.** О точности определения несингулярных компонент поля напряжений в вершине трещины с применением метода экстраполяции / Машиностроение и инженерное образование. 2014. № 4. С. 43 – 51.
21. **Benthem J. R.** A quarter-infinite crack in a half-space; alternative and additional solutuins / Int. J. Solid Struct. 1980. Vol. 16. N 2. P. 119 – 130.
22. **Матвиенко Ю. Г.** Несингулярные *T*-напряжения в проблемах двухпараметрической механики разрушения / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 2. С. 51 – 58.

REFERENCES

1. **Panasyuk V. V.** (ed.). Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov [Fracture mechanics and strength of materials]. Vol. 1, 3, 4. — Kiev: Naukova dumka, 1988 – 1990 [in Russian].
2. **Makhutov N. A.** Konstruktsionnaya prochnost', resurs i tekhnogennaya bezopasnost' [Structural strength, resource and technological safety: in 2 parts]. In 2 parts. — Novosibirsk: Nauka, Part 1: Kriterii prochnosti i resursa [The criteria for strength and resource], 2005. — 493 p.; Part 2. Obosnovanie resursa i bezopasnosti [Substantiation of resource and safety], 2005. — 610 p. [in Russian].
3. **Parton V. Z., Morozov E. M.** Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniya: spetsial'nye zadachi mekhaniki razrusheniya [The mechanics of elastic-plastic fracture: special problems of fracture mechanics]. — URSS, 2008. — 192 p. [in Russian].
4. **Matvienko Yu. G.** Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya [The models and criteria of fracture mechanics]. — Moscow: Fizmatlit, 2006. — 327 p. [in Russian].
5. **Astaf'ev V. I., Radaev Yu. N., Stepanova L. V.** Nelineinaya mekhanika razrusheniya [Non-linear fracture mechanics]. — Samara: Izd. "Samarskii universitet," 2004. — 562 p. [in Russian].
6. **Volkov I. A., Korotkikh Yu. G.** Uravneniya sostoyaniya vyazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami [Equations of the state for the viscoelasticoplastic medium with injuries]. — Moscow: Fizmatlit, 2008. — 424 p. [in Russian].
7. **Morozov E. M., Nikishkov G. P.** Metod konechnykh élementov v mekhanike razrusheniya [The finite element method in fracture mechanics]. — Moscow: Izd. LKI, 2008. — 254 p. [in Russian].
8. **Kudzhanov V. N.** Komp'yuternoe modelirovanie deformirovaniya, povrezhdennosti i razrusheniya neuprugikh materialov i konstruktsii. Uchebnoe posobie [Computer modeling of deformation, of damage to and destruction of non-elastic materials and structures. Tutorial]. — Moscow: Izd. MFTI, 2008. — 212 p. [in Russian].
9. **Airikh V. A., Glagolev V. V.** K opredeleniyu napryazhennogo sostoyaniya uprugoplasticheskikh tel s treshchinoi [By definition the stress state of the elastic-plastic bodies with crack] / Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki. 2014. Issue 3. P. 58 – 70 [in Russian].
10. **Klevtsov G. V.** Zakonomernosti obrazovaniya uprugoplasticheskikh zon u vershiny treshchiny pri razlichnykh vidakh nagruzheniya i rentgenovskaya fraktodiagnostika razrusheniya [Laws of of elastic-plastic zone formation at the crack tip for different types of loading and destroying ray fraktodiagnosis] / Vestn. Orenburg. Gos. Univ. Estestv. Tekhn. Nauki. 2006. Vol. 2. N 1. P. 81 – 88 [in Russian].
11. **Emel'yanov O. V., Pelipenko M. P.** Otsenka razmera zony plasticheskikh deformatsii v vershine ustalostnoi treshchiny pri vozdeistvii peregruzok «rastyazhenie» [Estimating the size of the zone of plastic deformation in the top of the fatigue crack when exposed to overload "tension"] / Vestn. Yuzh.-Ural. Gos. Univ. 2014. N 4. P. 21 – 29.
12. **Botvina L. R.** Razrushenie: kinetika, mekhanizmy, obshchie zakonomernosti [Destruction: kinetics, mechanisms, general laws]. — Moscow: Nauka, 2008. — 334 p. [in Russian].
13. **Poletika T. M., Narimanova G. N., Kolosov S. V.** Plasticheskoe techenie v splavakh tsirkoniya s geksagonal'no-plotnoupakovannoi reshetkoi na makro- i mikrourovnyakh [Plastic flow in the zirconium alloys with a hexagonal close-packed lattice on the macro- and microlevels] / Izv. Tomsk. Politekhn. Univ. 2004. Vol. 307. N 4. P. 126 – 128 [in Russian].
14. **Klyushnikov V. A., Mishakin V. V., et al.** Issledovanie povrezhdennosti metalla pod zashchitnym pokrytiem s pomoshch'yu élektromagnitno-akusticheskogo preobrazovatelya [Investigation under the damaged metal sheeting using electromagnetoacoustic converter] / Vestn. Nizhegorod. Univ. 2010. N 5. P. 113 – 115 [in Russian].
15. **Pleshanov V. S., Kibitkin V. V., Napryushkin A. A., Solodukhin A. I.** Izmerenie deformatsii materialov metodom korrelyatsii tsifrovykh izobrazhenii [Deformations measurement of materials by digital image correlation method] / Izv. Tomsk. Politekhn. Univ. 2008. Vol. 312. N 2. P. 343 – 349.
16. Digital Speckle Pattern Interferometry and Related Techniques / P. Rastogi (ed.). — West Sussex: John Wiley, 2001. — 384 p.
17. **Yates J. R., Zanganeh M., Tai Y. H.** Quantifying crack tip displasment fields with DIC / Engin. Fract. Mech. 2010. Vol. 77. P. 1682 – 1692.
18. **Pisarev V. S., Matvienko Yu. G., Odintsev I. N.** Opredelenie parametrov mekhaniki razrusheniya pri malom prirashchenii dliny treshchiny [Determination of fracture mechanics parameters for a small increment of the crack length] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2012. Vol. 78. N 4. P. 45 – 51 [in Russian].
19 **Matvienko Y. G., Pisarev V. S., Eleonsky S. I., Chernov A. V.** Determination of fracture mechanics parameters by measurements of local displacements due to crack length increment / Fatigue Fract. Engin. Mater. Struct. 2014. Vol. 37. N 12. P. 1306 – 1318.
20. **Litvinov I. A., Matvienko Yu. G., Razumovskii I. A.** O tochnosti opredeleniya nesingulyarnykh komponent polya napryazhenii v vershine treshchiny s primeneniem metoda ékstrapolyatsii [On the accuracy bution of non-singular stress field at the crack tip component using extrapolation method] / Mashinostr. Inzh. Obrazov. 2014. N 4. P. 43 – 51 [in Russian].
21. **Benthem J. R.** A quarter-infinite crack in a half-space; alternative and additional solutuins / Int. J. Solid Struct. 1980. Vol. 16. N 2. P. 119 – 130.
22. **Matvienko Yu. G.** Nesingulyarnye *T*-napryazheniya v problemakh dvukhparametricheskoi mekhaniki razrusheniya [Nonsingular *T*-stress in two-parameter fracture mechanics problems] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2012. Vol. 78. N 2. P. 51 – 58 [in Russian].