

УДК 539.26:519.21

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТИРОВОК С ПОМОЩЬЮ ТЕКСТУРНЫХ КОМПОНЕНТ С КРУГОВЫМИ НОРМАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

© Т. М. Иванова¹, В. Н. Серебряный²*Статья поступила 28 сентября 2016 г.*

Сравнивали методы восстановления функции распределения ориентировок (ФРО) на основе экспериментальных полюсных фигур для материалов с низкой симметрией образца (на примере срединного сечения горячепрессованной полосы из магниевого сплава Mg – 4,5 % Nd): метод текстурных компонент с использованием круговых нормальных распределений на SO(3) с различным рассеянием и метод суперпозиции большого числа нормальных распределений с одинаковым малым рассеянием. Оба подхода продемонстрировали схожие ФРО. При этом первый метод, менее чувствительный к погрешностям измерений полюсных фигур, опирается на нелинейную оптимизацию со сложным подбором начальных приближений параметров модели. Второй, более чувствительный, проще в реализации.

Ключевые слова: функция распределения ориентировок; метод текстурных компонент; метод суперпозиции большого числа круговых нормальных распределений; полюсная фигура; магний-сплав Mg – 4,5 % Nd.

Традиционный экспериментальный метод получения данных о преимущественных ориентировках кристаллических плоскостей — измерение полюсных фигур (ПФ), описывающих распределение нормалей кристаллических плоскостей. Наиболее полную информацию о текстуре дает функция распределения ориентировок (ФРО) кристаллитов. При этом возможный способ преодоления сложностей, связанных с неединственностью решения и неустойчивостью его к погрешностям экспериментальных данных, — поиск решения в определенном классе и оптимизация параметров модели текстуры с использованием регуляризации [1, 2].

Цель работы — сравнительный анализ применяемых при исследовании текстуры материалов с высокой и низкой симметрией решетки и образца [5–7] методов восстановления ФРО по ПФ: метода текстурных компонент с использованием круговых нормальных распределений с различным рассеянием [1–3] и метода суперпозиции большого числа круговых нормальных распределений с одинаковым малым рассеянием [1, 2, 4].

Исследование текстуры проводили на образцах срединного сечения горячепрессованной полосы из магниевого сплава Mg – 4,5 % Nd. (Поскольку материал обладает низкой симметрией решетки и образца, применение других методов моделирования ФРО (помимо вышеуказанных) при имеющемся объ-

еме экспериментальных данных практически невозможно.) Первичную информацию получали в виде неполных прямых ПФ {0004}, {10 $\bar{1}$ 0}, {11 $\bar{2}$ 0}, {10 $\bar{1}$ 1}, {10 $\bar{1}$ 2}, {10 $\bar{1}$ 3}, снятых на рентгеновском дифрактометре ДРОН-7 в Co K α -излучении (шаг сканирования по радиальному и азимутальному углам — 5°, диапазон — 0–70° радиального угла). Для повышения точности исходных экспериментальных данных снимали фон слева и справа по углу 2 θ с последующим усреднением для каждой из ПФ (шаг сканирования и диапазон те же).

Перед восстановлением ФРО осредненную интенсивность фона вычитали из интенсивности ПФ в соответствующих точках измерения. Падение интенсивности на периферийной части ПФ вследствие эффекта дефокусировки корректировали с помощью поправочных коэффициентов, рассчитанных исходя из условий рентгенографической съемки ПФ [8]. (ПФ не нормированы, значения неизвестных коэффициентов нормировки получали в процессе оптимизации.)

В основе обоих рассматриваемых методов лежит представление ФРО в виде суперпозиции нескольких стандартных функций (текстурных компонент, идеальных ориентировок с рассеянием):

$$f(g) = \sum_{k=1}^K I_k f_k(g, g_{0k}, \varepsilon_k^2), \quad (1)$$

где K — количество стандартных функций; I_k и g_{0k} — объемная доля и положение центра k -й компоненты; ε_k — параметр рассеяния.

¹ Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия; e-mail: ivatationa@gmail.com

² Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН, Москва, Россия; e-mail: vns@imet.ac.ru

Метод текстурных компонент предполагает, что ФРО можно представить суперпозицией пиковых (K_p) и аксиальных (K_a) компонент.

Каждая пиковая компонента достигает максимума в точке g_0 ориентационного пространства, а рассеяние вокруг максимума определяется параметром ε :

$$f^p(g, g_0, \varepsilon^2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp[-l(l+1)\varepsilon^2] \frac{\sin[(2l+1)\omega(g_0, g)/2]}{\sin[\omega(g_0, g)/2]}, \quad (2)$$

где

$$\omega_k(g_0, g) = \arccos\{0,5[Tr(g_0^{-1}g) - 1]\} \quad (3)$$

ориентационное расстояние. При этом полная ширина на распределения на половине высоты максимума b [9] связана с параметром рассеяния соотношением: $b \approx 4\varepsilon\sqrt{\ln 2}$.

Аксиальная компонента кругового нормального распределения представляет собой усреднение пиковой компоненты при вращении вокруг фиксированной оси и имеет вид:

$$f^a(g, g_0, \varepsilon^2, \mathbf{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp[-l(l+1)\varepsilon^2] P_l(g\mathbf{n}g_0\mathbf{n}). \quad (4)$$

Она достигает максимума на некоторой окружности в ориентационном пространстве, определяемой осью компоненты \mathbf{n} и вращением g_0 (одним из возможных положений на окружности максимума распределения), которое определяется постоянным угловым расстоянием ρ от оси компоненты (углом раствора).

Параметр ε , как и в случае пиковой компоненты, описывает рассеяние около максимума. Модельная ФРО усредняется по всем эквивалентным вращениям в соответствии с симметрией кристаллической решетки и образца и имеет вид:

$$f^{\text{model}}(g) = I_0 + \left[\sum_{k=1}^{K_p} I_k f_k^p(g, g_{0k}, \varepsilon_k^2) \right] + \left[\sum_{k=K_p+1}^{K_p+K_a} I_k f_k^a(g, g_{0k}, \varepsilon_k^2, \mathbf{n}_k) \right], \quad (5)$$

где I_0 и I_k — доли фоновой составляющей (бестектурной компоненты) и k -й компоненты (пиковой или аксиальной), причем $\sum_{k=0}^{K_p+K_a} I_k = 1$.

Пусть теперь вектор обратной решетки \mathbf{h}_λ задает направление в кристаллите, а \mathbf{y} — направление в об-

разце. Модельная ФРО (5) порождает ПФ следующего вида:

$$P_{h_\lambda}^{\text{model}}(\mathbf{y}) = I_0 + \left[\sum_{k=1}^{K_p} I_k P^{p,k}(\mathbf{h}_\lambda, \mathbf{y}, g_{0k}, \varepsilon_k^2) \right] + \left[\sum_{k=K_p+1}^{K_p+K_a} I_k P^{a,k}(\mathbf{h}_\lambda, \mathbf{y}, g_{0k}, \varepsilon_k^2, \mathbf{n}_k) \right]. \quad (6)$$

При этом пиковые и аксиальные компоненты ПФ представляются рядами по полиномам Лежандра:

$$P^p(\mathbf{h}_\lambda, \mathbf{y}, g_0, \varepsilon^2) = \sum_{l=0(2)}^{\infty} (2l+1) \exp[-l(l+1)\varepsilon^2] P_l((\mathbf{h}_\lambda g_0 \mathbf{y})), \quad (7)$$

$$P^a(\mathbf{h}_\lambda, \mathbf{y}, g_0, \varepsilon^2, \mathbf{n}) = \sum_{l=0(2)}^{\infty} (2l+1) \exp[-l(l+1)\varepsilon^2] P_l(\mathbf{y}\mathbf{n}) P_l(\mathbf{h}_\lambda g_0 \mathbf{n}). \quad (8)$$

ФРО моделировали путем оптимизации параметров $\{I_0, I_k, g_{0k}, \varepsilon_k^2, \mathbf{n}_k\}$ (5), для чего использовали метод минимизации взвешенной невязки между наборами имеющихся экспериментальных $\{P_{h_\lambda}^{\text{exp}}(\mathbf{y}), \lambda = 1 \dots \Lambda\}$ и модельных ПФ (6):

$$\text{res}^2 = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{\mathbf{y} \in S^2} W(\mathbf{y}) \left[\left(N_\lambda P_{h_\lambda}^{\text{exp}}(\mathbf{y}) - P_{h_\lambda}^{\text{model}}(\mathbf{y}, \{I_0, I_k, g_{0k}, \varepsilon_k^2, \mathbf{n}_k\}) \right) \right]^2 \rightarrow \min, \quad (9)$$

где $\{W(\mathbf{y})\}$ — заданный набор весов, определяющих значимость точки измерения; $\{N_\lambda, \lambda = 1 \dots \Lambda\}$ — известные нормировочные коэффициенты ПФ.

Минимизация невязки (9), относящаяся к задачам нелинейной оптимизации, решается итерационно. Количество текстурных компонент, их тип, начальное положение центров, осей и параметров рассеяния определяются интерактивно в графическом режиме. Это означает, что при таком подходе на начальном этапе требуется участие исследователя, оценивающего начальные значения параметров. На следующем этапе происходит оптимизация линейных характеристик (весов) и нормировочных коэффициентов [10, 11]. Возникающие при этом нормальные системы уравнений, как правило, плохо обусловлены вследствие сильного перекрытия компонент. Поэтому на этом этапе осуществляли регуляризацию с применением сингулярного разложения к матрице плана нормальной системы. Порог оставляемых сингулярных чисел выбирали в соответствии с уровнем ошибок экспериментальных данных. Далее проводили нелинейную оптимизацию остальных параметров моде-

ли с привлечением регуляризованного метода Левенберга – Марквардта [11].

Адекватность модели оценивали с применением параметров [12]

$$RP(\Delta) = \frac{1}{J(\Delta)} \sum_{j=1}^{J(\Delta)} \left| \frac{P_{\mathbf{h}_\lambda}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j) - P_{\mathbf{h}_\lambda}^{\text{model}}(\mathbf{y}_j)}{P_{\mathbf{h}_\lambda}^{\text{exp}}(\mathbf{y}_j)} \right| \cdot 100\%, \quad (10)$$

а также путем вычисления квадрата невязки res_λ^2 отдельно для каждой ПФ и стандартного отклонения невязок σ_λ [10]:

$$\text{res}_\lambda^2 = \sum_{\mathbf{y} \in S^2} W(\mathbf{y}) \left[N_\lambda P_{\mathbf{h}_\lambda}^{\text{exp}}(\mathbf{y}) - P_{\mathbf{h}_\lambda}^{\text{model}}(\mathbf{y}, I_0, I_k, g_{0k}, \varepsilon_k^2, \mathbf{n}_k) \right]^2, \quad \sigma_\lambda = \frac{\text{res}_\lambda}{\sqrt{n}}, \quad (11)$$

где n — объем измеренных на ПФ данных.

Метод суперпозиции большого числа круговых нормальных распределений в отличие от метода текстурных компонент представляется суперпозицией (1) стандартных распределений с одинаковым малым рассеянием ε :

$$f(g) = \sum_{k=1}^K I_k f^s(g, g_{0k}, \varepsilon). \quad (12)$$

Центры стандартных функций g_{0k} расположены на регулярной трехмерной сетке в ориентационном пространстве. В качестве $f^s(g, g_{0k}, \varepsilon)$ выбирали суперпозицию симметризованных согласно симметрии кристаллической решетки и образца пиков вида (2). В расчетах учитывали, что для узких пиков ($\varepsilon < 0,3$) функция $f^s(g, g_{0k}, \varepsilon^2)$ имеет аналитическое приближение [1]:

$$f^s(g, g_0, \varepsilon) \equiv f(\omega, \varepsilon) = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon^3} \exp\left(\frac{\varepsilon^2}{4} \text{erfc}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\right) \frac{\omega/2}{\sin(\omega/2)} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\varepsilon^2}\right) \quad (13)$$

[ω — ориентационное расстояние (3)].

Отвечающие распределению (13) ПФ выглядят следующим образом [1]:

$$P^s(\mathbf{h}, \mathbf{y}, g_0, \varepsilon) \equiv P(\theta, \varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon^2} \left[\exp\left(-\frac{\theta^2}{4\varepsilon^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\pi-\theta)^2}{4\varepsilon^2}\right) \right], \quad (14)$$

где \mathbf{h}, \mathbf{y} — направления в кристаллите и образце соответственно; $\theta = \arccos(\mathbf{h}g_0\mathbf{y})$.

Выражение (14) хорошо аппроксимирует (7). Таким образом, в качестве модели ПФ получаем функцию

$$P(\mathbf{h}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^K I_k P^s(\mathbf{h}, \mathbf{y}, g_k, \varepsilon). \quad (15)$$

Параметр рассеяния ε определяется угловым расстоянием между узлами сетки. Стандартные функции должны перекрываться по крайней мере на половине высоты пиков. Ясно, что число стандартных функций должно быть очень большим (их рассеяние должно быть существенно меньше рассеяния любой компоненты реальной текстуры). В этом случае их нельзя рассматривать в качестве компонент текстурной функции (любая компонента текстурной функции представляется в виде суперпозиции стандартных функций).

Для нахождения неизвестных весов I_k получаем систему линейных уравнений, матрица которой состоит из коэффициентов влияния стандартной функции $f^s(g, g_{0k}, \varepsilon)$ на полюсную плотность. При ее решении использовали итерационный метод проекций [13, 14]. При плохой обусловленности матрицы системы он обеспечивает регуляризацию решения по одному из функционалов гладкости ($\sum I_k^2 \rightarrow \min$) и дополнительно учитывает условие положительности амплитуд пиков.

Начальные параметры модели исследуемого образца в методе текстурных компонент (табл. 1) подбирали интерактивно.

В результате последующей оптимизации установили, что полюсная плотность образца адекватно описывается суперпозицией семи аксиальных компонент и бестекстурной компоненты (табл. 2). На рис. 1 приведены экспериментальные ПФ {0004}, {1120} и их модели, полученные методом компонент.

Статистические параметры моделей приведены в табл. 3 (погрешности соответствуют погрешности измерения экспериментальных ПФ).

На рис. 2 приведены сечения ФРО, полученной исследуемыми методами. Видно, что оба метода приводят к схожим результатам, однако объем бестекстурной составляющей ФРО, получаемой методом супер-

Таблица 1. Начальные приближения параметров модели

k	ε_k^2	Ось в системе образца		Углы по Бунге для некоторого положения максимума g_0 , град.		
		$\eta, ^\circ$	$\theta, ^\circ$	φ_1	Φ	φ_2
1	0,01	255	25	345	25	40
2	0,01	290	30	385	30	45
3	0,01	220	30	310	40	45
4	0,02	255	45	350	40	45
5	0,01	70	40	165	45	45
6	0,01	110	40	205	45	45
7	0,01	90	30	180	35	45

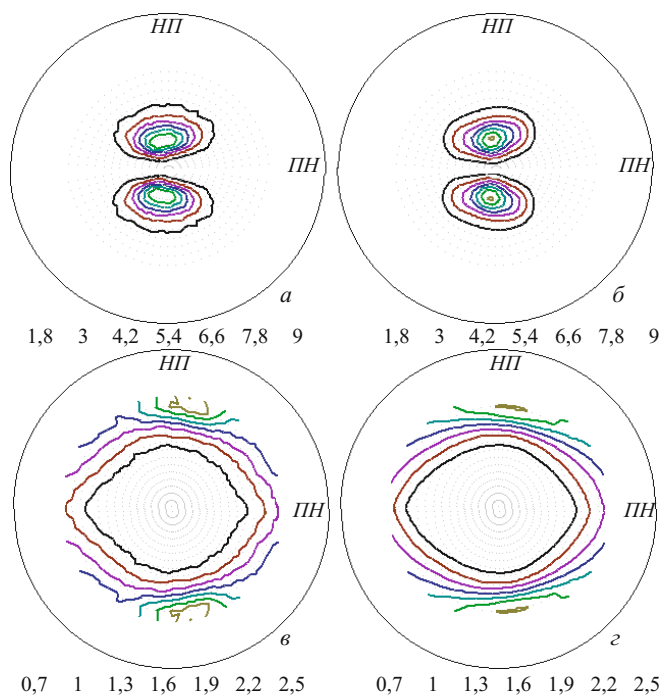


Рис. 1. Прямые экспериментальные (а, в) и рассчитанные по методу компонент (б, г) ПФ {0004} и {1120} (НП — направление прокатки; ПН — поперечное направление)

позиции, значительно меньше, а также максимум ФРО снижен по сравнению с аналогичным максимумом, полученным методом текстурных компонент.

Объясняется это тем, что, как уже отмечалось, в методе суперпозиции каждая текстурная компонента — сумма большого количества стандартных

Таблица 2. Параметры модели в методе текстурных компонент

Компоненты	$\rho_k, ^\circ$	$I_k, \%$	ε_k^2	Ось в системе образца		
				$\eta, ^\circ$	$\chi, ^\circ$	
Аксимальные	1	0,94	29,8	0,010	259,2	23,0
	2	2,17	18,7	0,012	295,2	30,1
	3	6,86	13,3	0,007	223,2	32,6
	4	6,62	8,7	0,024	259,2	43,7
	5	6,84	6,3	0,014	74,7	36,5
	6	6,81	4,9	0,010	114,3	37,3
	7	3,20	3,4	0,008	90,0	32,7
Бестекстурная	—	14,9	—	—	—	

Таблица 3. Статистические параметры моделей

ПФ	Метод текстурных компонент				Метод суперпозиции		
	Нормировка, N_λ	$RP(0,5), \%$	$RP(1,0), \%$	res_λ	σ	$RP(0,5), \%$	$RP(1,0), \%$
{0004}	502	19	16	8,33	0,225	—	—
{1120}	2628	15	10	4,48	0,121	—	—
{1010}	2374	14	10	3,72	0,101	—	—
{1011}	26777	16	10	3,86	0,104	—	—
{1012}	3481	9	7	3,13	0,084	—	—
{1013}	4278	10	8	3,29	0,089	—	—
Средние по ПФ	—	13,8	10,2	—	—	19,1	15,9

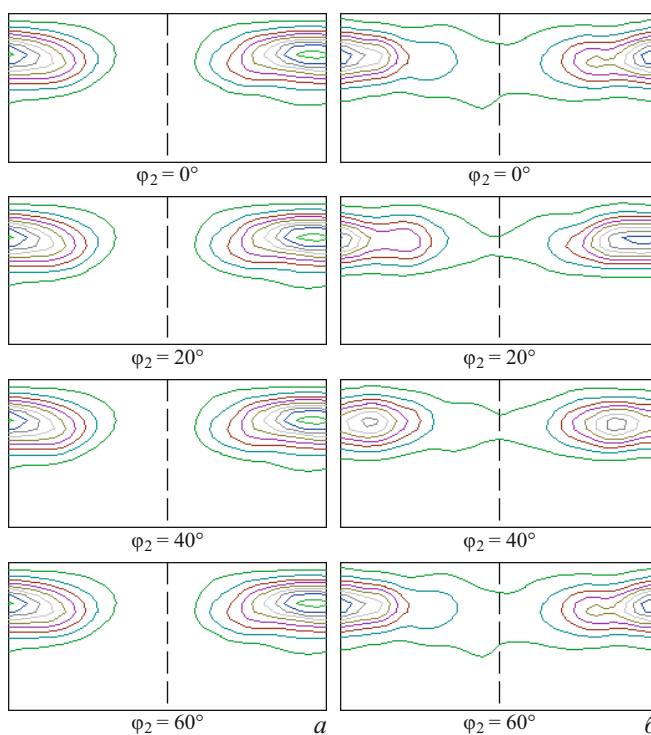


Рис. 2. ФРО, рассчитанные из ПФ по методам компонент ($f_{\min} = 0,15, f_{\max} = 9,20$) (а) и большого (3000) количества ориентировок ($f_{\min} = 0,04, f_{\max} = 8,70$) (б)

распределений. Это можно сказать и о бестекстурной составляющей, которая также аппроксимируется суммой распределений с приблизительно равными весами. В дальнейшем для развития метода суперпозиции целесообразно включить константу, равную объемной доли бестекстурной компоненты, в модельную функцию (параметр линейный и может быть определен итерационно, как и остальные веса). Большое преимущество метода состоит в том, что он полностью автоматизирован.

В методе текстурных компонент начальный этап оптимизации, состоящий в подборе количества текстурных компонент и начальных значений нелинейных параметров модели, практически не формализуем и требует непосредственного участия исследователя. Последующие итерации происходят в автоматическом режиме. Однако метод позволяет описывать сложные текстурные образования при помощи небольшого чис-

ла параметров, необходимых для дальнейшего исследования свойств поликристаллических материалов.

В процессе построения модели ФРО исследуемого образца экспериментальные данные уточняли. При этом параметры модели оставались устойчивыми, изменялись только параметры, используемые для оценки адекватности. Модель, построенная методом суперпозиции, менялась более существенно, но с сохранением характерных особенностей текстуры. Большая устойчивость модели в методе текстурных компонент объясняется малым количеством модельных параметров.

Таким образом, рассчитанные по обоим методам ФРО хорошо согласуются между собой. Рассмотренные методы восстановления ФРО могут применяться при исследовании текстуры материалов с низкой симметрией решетки и образца. При этом основное преимущество метода компонент состоит в том, что количественное описание текстуры достигается использованием ограниченного числа ориентировок в виде круговых нормальных распределений с различными рассеянием и объемной долей, что облегчает анализ эволюции текстурообразования материалов при пластической деформации и термообработке. Однако выбор начальных значений текстурных компонент не формализуем и требует непосредственного участия исследователя. Напротив, метод суперпозиции большого числа круговых нормальных распределений полностью автоматизирован.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савелова Т. И., Иванова Т. М., Сыпченко М. В. Методы решения некорректных задач текстурного анализа и их приложения. — М.: НИЯУ МИФИ, 2012. — 268 с.
2. Савелова Т. И., Иванова Т. М. Методы восстановления функции распределения ориентации по полюсным фигурам (обзор) / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т. 74. № 7. С. 25 – 33.
3. Иванова Т. М., Савелова Т. И. Устойчивый метод аппроксимации функции распределения ориентаций каноническими нормальными распределениями / Физика металлов и металловедение. 2006. Т. 101. № 2. С. 1 – 5.
4. Куртасов С. Ф. Методика количественного анализа текстур прокатки материалов с кубической симметрией кристаллической решетки / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2007. Т. 73. № 7. С. 41 – 44.
5. Серебряный В. Н., Шамрай В. Ф. Исследование текстурированных материалов в лаборатории кристаллоструктурных исследований ИМЕТ РАН. Ч. II. Текстуры материалов из магниевых сплавов / Цветные металлы. 2011. № 5. С. 65 – 73.
6. Серебряный В. Н., Рохлин Л. Л., Монина А. Н. Текстура и анизотропия механических свойств магниевого сплава системы Mg – Y – Gd – Zr / Перспективные материалы. 2013. № 7. С. 12 – 20.
7. Иванова Т. М., Серебряный В. Н. Восстановление функции распределения ориентаций магниевого сплава MA2-1пч, подвергнутого равноканальному угловому прессованию / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81. № 7. С. 28 – 33.
8. Серебряный В. Н., Куртасов С. Ф., Литвинович М. А. Изучение ошибок ФРО при обращении полюсных фигур с использованием статистического метода гребневых оценок / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2007. Т. 73. № 4. С. 29 – 35.
9. Matthies S., Wenk H. R., and Vinel G. W. Some basic concepts of texture analysis and comparison of three methods to calculate orientation distributions from pole figures / J. Appl. Cryst. 1988. Vol. 21. P. 285 – 304.
10. Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. — NJ: Prentice-Hall, 1989. — 495 p.
11. Brandt S. Data Analysis. Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers. — NY: Springer-Verlag, 1999. — 652 p.
12. Bunge H. J. Texture Analysis in Materials Sciences. Mathematical Methods. — London: Butterworths Publ., 1982. — 593 p.
13. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов. — М: Советское радио, 1979. — 271 с.
14. Huang T. S., Barker D. A., Berger S. P. Iterative Image Restoration / Applied Optics. 1975. Vol. 14. N 5. P. 1165 – 1168.

REFERENCES

1. Savelova T. I., Ivanova T. M., Sypchenko M. V. Metody resheniya nekorrektnykh zadach teksturnogo analiza i ikh prilozheniya [Methods for solving ill-posed problems of texture analysis and their applications]. — Moscow: Izd. NIYaU MIFI, 2012. — 268 p. [in Russian].
2. Savelova T. I., Ivanova T. M. Metody vosstanovleniya funktsii raspredeleniya orientatsii po polyusnym figuram (obzor) [Methods of orientation distribution function restoration for pole figures (review)] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2008. Vol. 74. N 7. P. 25 – 33 [in Russian].
3. Ivanova T. M., Savelova T. I. Ustoichivyy metod approksimatsii funktsii raspredeleniya orientatsii kanonicheskimi normal'nymi raspredeleniyami [Steady method of orientation distribution function approximation by the canonical normal distributions] / Fiz. Met. Metalloved. 2006. Vol. 101. N 2. P. 1 – 5 [in Russian].
4. Kurtasov S. F. Metodika kolichestvennogo analiza tekstur prokatki materialov s kubicheskoi simmetriei kristallicheskoj reshetki [Quantitative analysis of the texture of rolled materials having cubic symmetry of crystal lattice] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2007. Vol. 73. N 7. P. 41 – 44 [in Russian].
5. Serebryanyi V. N., Shamrai V. F. Issledovanie teksturovannykh materialov v laboratorii kristallostrukturnykh issledovaniy IMET RAN. Ch. II. Tekstury materialov iz magnievykh spлавov [The study of the textured materials in laboratory of the crystal and structure study of IMET RAN. Part II. The textures of materials from the magnesium alloys] / Tsvet. Metally. 2011. N 5. P. 65 – 73 [in Russian].
6. Serebryanyi V. N., Rokhlin L. L., Monina A. N. Tekstura i anizotropiya mekhanicheskikh svoystv magnieвого сплава системы Mg – Y – Gd – Zr [Texture and anisotropy of the mechanical properties of the magnesium alloy of Mg – Y – Gd – Zr system] / Perspekt. Mater. 2013. N 7. P. 12 – 20 [in Russian].
7. Ivanova T. M., Serebryanyi V. N. Vosstanovlenie funktsii raspredeleniya orientatsii magnieвого сплава MA2-1pч, podvergnutogo ravnokanal'nomu uglovomu pressovaniiyu [Orientation distribution function restoration of MA2-1pч magnesium alloy subjected to equal channel angular pressing] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2015. Vol. 81. N 7. P. 28 – 33 [in Russian].
8. Serebryanyi V. N., Kurtasov S. F., Litvinovich M. A. Izuchenie oshibok FRO pri obrashchenii polyusnykh figur s ispol'zovaniem statisticheskogo metoda grebnevnykh otsenok [The ODF error study in pole figures conversion using the statistical method of ridge estimates] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2007. Vol. 73. N 4. P. 29 – 35.
9. Matthies S., Wenk H. R., and Vinel G. W. Some basic concepts of texture analysis and comparison of three methods to calculate orientation distributions from pole figures / J. Appl. Cryst. 1988. Vol. 21. P. 285 – 304.
10. Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. — NJ: Prentice-Hall, 1989. — 495 p.
11. Brandt S. Data Analysis. Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers. — NY: Springer-Verlag, 1999. — 652 p.
12. Bunge H. J. Texture Analysis in Materials Sciences. Mathematical Methods. — London: Butterworths Publ., 1982. — 593 p.
13. Vasilenko G. I. Teoriya vosstanovleniya signalov [The signal restoration theory]. — Moscow: Sovet-skoe radio, 1979. — 271 p. [in Russian].
14. Huang T. S., Barker D. A., Berger S. P. Iterative Image Restoration / Applied Optics. 1975. Vol. 14. N 5. P. 1165 – 1168.