#### УДК 620.178.151

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В ДЕФОРМИРОВАННОМ ОБЪЕМЕ МЕТАЛЛА ПРИ ВДАВЛИВАНИИ СФЕРИЧЕСКОГО ИНДЕНТОРА<sup>1</sup>

## © В. М. Матюнин<sup>2</sup>, А. Г. Казанцев<sup>3</sup>, А. Ю. Марченков<sup>2</sup>

Статья поступила 25 мая 2016 г.

Исследовано распределение напряжений и деформаций в деформированном металле под отпечатками, полученными вдавливанием сферического индентора с разной степенью нагружения. Для этого использованы метод твердости и метод конечных элементов. Показано, что эти методы дополняют друг друга и их совместное использование дает более полную информацию о значениях напряжений и деформаций в различных зонах деформированного объема металла.

Ключевые слова: сферический индентор; вдавливание; интенсивность напряжений; интенсивность деформаций; гидростатическое ядро; деформированный объем; твердость; метод конечных элементов.

К распределению напряжений и деформаций в деформированном объеме материала при вдавливании индентора с давних пор проявляется научно-практический интерес. Были проведены теоретические и экспериментальные исследования, предложены модели распространения упругопластической деформации под отпечатком, выявлено распределение напряжений и деформаций по поверхности и глубине отпечатка. Такие исследования позволяют более обоснованно определять твердость материалов и устанавливать ее связь с другими механическими характеристиками.

Согласно моделям Хилла – Джонсона для сферического индентора [1] и Джанкопулоса – Суреша для остроконечного индентора [2] фронт распространения упругопластической деформации по глубине отпечатка имеет форму сферического сегмента, центр которого находится в центре проекции отпечатка. Под поверхностью отпечатка на расстоянии, примерно равном половине его радиуса, образуется гидростатическое ядро (градиентная зона).

Из более ранних известных работ по экспериментальному выявлению распределения деформаций по глубине конического отпечатка следует отметить публикацию [3]. Затем аналогичные исследования были выполнены для сферических [4 – 8] и пирамидальных [9, 10] отпечатков.

В [4, 5] использовался метод делительных сеток, а в [3, 6–10] — метод твердости для определения деформаций и напряжений по поверхности и глубине отпечатка. Метод твердости основан на общем характере связи интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$  и интенсивности напряжений  $\sigma_i$  с твердостью материала по Виккерсу HV или по Бринеллю HB при увеличении степени наклепа, независимо от способа нагружения и вида напряженно-деформированного состояния, при которых он получен. Это дает возможность выявить такую связь для данного материала при простом способе нагружения, например, растяжением или сжатием, и использовать ее в качестве тарировочного графика при определении  $\varepsilon_i$  и  $\sigma_i$  по поверхности или глубине отпечатка. Теоретическое и экспериментальное обоснование методики нахождения  $\varepsilon_i$  и  $\sigma_i$  в наклепанном металле представлено в [6].

Наряду с экспериментальными были использованы и расчетные методы определения  $\varepsilon_i$  и  $\sigma_i$  по глубине сферического отпечатка, основанные на конечноэлементном анализе (см. например, [2, 12 – 18]). Однако в ранее проведенных экспериментах и расчетах не выявлено распределение  $\varepsilon_i$  и  $\sigma_i$  по глубине сферического отпечатка при разных значениях отношения диаметра отпечатка *d* к диаметру индентора *D*, а также не установлены границы и размеры гидростатического ядра и характер изменения его твердости при увеличении *d/D*.

Цель данной работы — расчетно-экспериментальное исследование деформированного объема металла под сферическими отпечатками при разных *d/D* с решением следующих основных задач:

выявление места расположения, формы и размеров гидростатического ядра с определением его твердости и параметра деформационного упрочнения при разной степени нагружения;

установление распределения  $\varepsilon_i$  и  $\sigma_i$  по глубине отпечатка, а также формы фронта распространения пластической деформации и его геометрических параметров;

оценка всего деформированного объема металла под отпечатком и установление его связи с объемом самого отпечатка при разных d/D.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Работа выполнена в ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ» за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-19-00166).

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия; e-mail: MatiuninVM@mpei.ru

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> ОАО «НПО «ЦНИИТМАШ», Москва, Россия; e-mail: Kazantsev a g@mail.ru



**Рис. 1.** Шлифы с нанесенными отпечатками (*a*), плоский образец (*б*) и тарировочные графики  $\sigma_i - HV1$ ,  $\varepsilon_i - HV1$  для стали 10 (*в*)

Для экспериментального определения  $\varepsilon_i$  и  $\sigma_i$  в деформированном металле под отпечатком выбран метод твердости. Эксперименты проводили на стальной образцовой мере (плитке Бринелля) с твердостью 114 *HB* (сталь 10), из которой изготавливали четыре (I – IV) призматических шлифа. В каждый шлиф вдавливали сферический индентор диаметром D = 15,1 мм под нагрузками *F*, соответственно равными 1121, 3313, 5050 и 7136 кгс, и получали соответствующие значения *d* и *d/D*. Результаты испытаний приведены в табл. 1.

После нанесения отпечатков шлифы разрезали по меридиональной плоскости (проходящей через центр отпечатка), на которой исследовали деформированный объем металла методом твердости. Для этого плоскость разреза предварительно подвергали электролитической обработке для снятия наклепа, полученного при механической обработке, затем на нее наносили отпечатки пирамидой Виккерса под нагрузкой 1 кгс и определяли значения твердости *HV1*. Отпечатки располагали рядами с шагом 600 мкм. Всего на плоскости разреза каждого шлифа получали 300 – 800 отпечатков в зависимости от *d/D*.

Тарировочные графики  $\sigma_i - HV1$  и  $\varepsilon_i - HV1$  получали при испытании на растяжение плоского образца, вырезанного из той же контрольной плитки (сталь 10) и также подвергнутого электролитической обработке для снятия поверхностного наклепа. Образец растягивали до различных значений пластической деформации в диапазоне от предела текучести  $\sigma_{\rm T}$ до временно́го сопротивления  $\sigma_{\rm B}$ . Твердость *HV1* определяли на боковой поверхности растянутого образца после его полной разгрузки и освобождения из захватов машины. На каждой ступени нагружения образца определяли σ<sub>i</sub> и ε<sub>i</sub>:

$$\sigma_i = F/S,\tag{1}$$

$$\varepsilon_i = \ln(l/l_0),\tag{2}$$

где F — нагрузка; S — текущая площадь поперечного сечения; l — текущая длина образца;  $l_0$  — исходная длина образца.

На рис. 1 представлены шлифы с нанесенными отпечатками, общий вид плоского образца и тарировочные графики  $\sigma_i - HV1$ ,  $\varepsilon_i - HV1$  для стали 10.

Аналогичные тарировочные графики получены на этом же образце при определении твердости по Бринеллю HB1/30/5 при вдавливании сферического индентора диаметром D = 1 мм под нагрузкой 30 кгс и выдержкой под нагрузкой 5 с на приборе МЭИ-Т7 [8].

Использование сферического индентора позволяло определить не только твердость, но и параметр деформационного упрочнения Мейера деформированного металла по формуле

$$n = \frac{\ln(F_1/F_2)}{\ln(d_1/d_2)},$$
(3)

где  $F_1$  и  $F_2$  — нагрузки вдавливания ( $F_2 = 2F_1 = 30$  кгс);  $d_1$  и  $d_2$  — диаметры отпечатков, соответствующие этим нагрузкам.

С помощью тарировочных графиков выявлено распределение  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  в деформированном металле под отпечатком при каждом d/D. На рис. 2 представлены картины распределения  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  для двух значений d/D = 0,263 и 0,507.

Экспериментальные картины распределения  $\sigma_i$ и  $\varepsilon_i$  статистически обрабатывали методом сглаживания с применением весовых коэффициентов в па-

 $HB_{15,1}$  $F/D^2$ Номер *d*, мм *t*, мм d/Dшлифа кгс/мм<sup>2</sup> Η Н/мм<sup>2</sup> кгс/мм<sup>2</sup> кгс Ι 4,9 10997 1121 0,265 0,263 874 89.1 3,966 3313 Π 32500 14,5 6,372 0,705 0,422 972 99,1 III 49500 5050 22.1 7.656 1.043 0,507 1002 102.1 IV 70004 7136 31,3 8,803 1,416 0,583 1043 106,3

Таблица 1. Результаты испытаний шлифов из стали 10 вдавливанием сферического индентора диаметром D = 15,1 мм



**Рис. 2.** Экспериментальные картины распределения напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $\varepsilon_i$  под отпечатками, полученными сферическим индентором диаметром D = 15,1 мм при d/D = 0,263 ( $a, \delta$ ) и d/D = 0,507 (b, c)



**Рис. 3.** Схема основных зон пластически деформированного объема под отпечатком:  $R_{13}$  — радиус гидростатического ядра;  $R_{13}$  — радиус зоны пластической деформации; a — радиус отпечатка; t — глубина отпечатка; T — глубина распространения зоны пластической деформации

кете MathCAD, после чего исследовали изменения параметров деформированного объема металла под отпечатками.

В деформированном объеме металла разгруженного шлифа выявлены две основные зоны — зона гидростатического ядра и общая зона распространения пластической деформации. Подтверждено, что гидростатическое ядро образуется в точке на глубине, примерно равной половине радиуса отпечатка, где зарождается первая пластическая деформация. При увеличении нагрузки вдавливания и, соответственно, d/Dзона гидростатического ядра расширяется. При достижении  $d/D \approx 0,4$  интенсивность напряжений в гидростатическом ядре достигает значения истинного временно́го сопротивления, а интенсивность пластической деформации  $\varepsilon_i$  — значения истинной предельной деформации при растяжении.

Определение параметра деформационного упрочнения при вдавливании *n* показало, что в зоне гидростатического ядра  $n \approx 2,00 - 2,01$ , что свидетельствует о практическом исчерпании способности металла к упрочнению в гидростатическом ядре.

Установлено, что форма гидростатического ядра близка к форме сферического сегмента с радиусом  $R_{\rm гя}$ и центром, находящимся в центре проекции отпечатка (рис. 3). Более того,  $R_{\rm гя}$  оказался примерно равным радиусу отпечатка *а*. По линиям распределения твердости выявлена форма фронта распространения пластической деформации за пределами гидростатического ядра (рис. 4). Эта форма также оказалась близкой к сферическому сегменту согласно моделям Хилла – Джонсона и Джанкопулоса – Суреша. Однако в отличие от этих моделей центры этих сегментов находятся не в центре проекции отпечатков, а смещены по глубине и тем в большей степени, чем больше *d/D*. Радиусы пластической зоны  $R_{\rm пз}$  оказались прямо пропорциональны радиусам отпечатков *а*.

Согласно Д. Крамеру [19] радиус упругопластической зоны под отпечатком  $R_{y_{II3}}$  можно рассчитать по формуле

$$R_{\rm ym} = \sqrt{\frac{3F}{2\pi\sigma_{\rm T}}},\tag{4}$$

где F — нагрузка вдавливания;  $\sigma_{\rm T}$  — предел текучести. Сравнение значений  $R_{\rm yn3}$  и  $R_{\rm n3}$  показало, что  $R_{\rm yn3}$ превышает  $R_{\rm n3}$  примерно на 20 %.

Основные результаты определения геометрических параметров отпечатков и зон деформированного объема металла под отпечатками представлены в табл. 2.

Далее рассчитывали объемы невосстановленных  $V_{\text{от}}^{\text{H}}$  и восстановленных  $V_{\text{от}}^{\text{B}}$  отпечатков, объемы упругопластически деформированного металла  $V_{\text{упз}}$  и пластически деформированного металла  $V_{\text{пз}}$  под отпечатками при каждом d/D. Между  $V_{\text{упз}}$  и  $V_{\text{от}}^{\text{H}}$ , а также между *V*<sub>пз</sub> и *V*<sup>в</sup><sub>от</sub> установлены прямо пропорциональные связи:

$$V_{\rm ym3} \approx 96 V_{\rm ot}^{\rm H}, \tag{5}$$

$$V_{\rm II3} \approx 95 V_{\rm OT}^{\rm B}.$$
 (6)

Практическое значение зависимостей (5) и (6) заключается в том, что они позволяют просто оценить деформированный объем металла под отпечатком, который является важным размерным параметром при индентировании. Учитывая установленную прямо пропорциональную связь упругопластического объема металла под отпечатком  $V_{yn3}$  с объемом невосстановленного отпечатка  $V_{ort}^{H}$ , последний можно выбрать в качестве основного и легко определяемого размерного параметра при разграничении размерных уровней индентирования [20].

Кроме того, полученные геометрические параметры деформированного объема металла под отпечатками можно использовать для обоснованной количественной оценки отношения общей глубины распространения пластической деформации T к глубине отпечатка t при разных d/D. Как следует из табл. 2, значения этого отношения  $\varphi = T/t$  мало изменяются при увеличении d/D, а среднее значение  $\varphi \approx 15$ .

Проведены также эксперименты на сталях марок У7 и 08Х18Н10Т. Получено, что для высокоуглеродистой стали У7, как и для низкоуглеродистой стали 10,  $\varphi \approx 15$ , а для стали аустенитного класса 08Х18Н10Т —  $\varphi \approx 12 - 13$ . В любом случае это отношение существенно превосходит отношение толщины контролируемого объекта к глубине отпечатка, которое должно быть не менее восьми согласно ГОСТ 9012–59 (ИСО 410–82, ИСО 6506–81). Таким образом, экспериментально установлено, что максимальная глубина распространения пластической деформации под отпечатка более чем в 10 раз. Это надо учитывать при определении твердости тонких деталей, покрытий и др.

Расчетно-экспериментальное исследование деформированного объема металла под отпечатком выполняли также методом конечных элементов в осесимметричной квазистатической упругопластической постановке с использованием метода прямого интегрирования по времени и метода динамической релаксации в программе LS-Dyna. Расчет проводили с учетом геометрической нелинейности и больших деформаций. Для описания свойств металла образца использовали билинейную аппроксимацию диаграммы упругопластического деформирования в истинных напряжениях и деформациях. Материал индентора рассматривали как упругий. Фрагмент конечноэлементной сетки расчетной модели показан на рис. 5. Размер элементов в зоне контакта составлял около 8 мкм.



**Рис. 4.** Изолинии деформаций под отпечатком при d/D = 0,263 (*a*) и d/D = 0,507 (*b*): ГПЗ — граница пластической зоны

По данным расчета, выполненного в соответствии с условиями нагружения, заданными в испытаниях, на шлифах I и III (d/D = 0,263 и d/D = 0,507 соответственно) были определены поля остаточных перемещений, профиль отпечатка и распределения интенсивности пластической деформации. На рис. 6 для сравнения приведены результаты расчетов и данные, полученные экспериментальным способом. Видно, что наблюдается сходство в форме фронта распространения упругопластической деформации при разных d/D — в обоих случаях она имеет вид полусферы с центром, находящимся несколько ниже поверхности шлифа.

Характерным результатом, полученным обоими методами, явилось то, что значения интенсивностей деформаций в металле под отпечатками возрастают

Таблица 2. Результаты определения геометрических параметров отпечатков и зон деформированного объема металла под отпечатками (сталь 10)

Геометрические параметры	d/D			
	0,263	0,422	0,507	0,583
<i>t</i> , мм	0,265	0,705	1,043	1,416
а, мм	2,00	3,19	3,83	4,40
<i>R</i> <sub>гя</sub> , мм	1,8	3,5	4,0	4,4
<i>R</i> <sub>пз</sub> , мм	4,2	6,2	8,7	10,3
<i>R</i> <sub>упз</sub> , мм	5,1	8,7	10,8	12,8
Т, мм	4,2	9,9	15,9	19,5
$\varphi = T/t$	15,8	14,1	15,2	13,8
$V_{_{\Pi 3}},  { m MM}^3$	154	882	2255	3958
$V_{\rm ot}^{\rm B}, {\rm MM}^{\rm 3}$	1,52	10,87	24,24	41,37
$V_{y_{II3}}, MM^3$	278	1378	2637	4390
$V_{\rm ot}^{\rm H}$ , MM <sup>3</sup>	1,70	11,42	24,66	44,58

при увеличении отношения d/D. Однако при экспериментальном исследовании области с максимальными значениями  $\varepsilon_i$  выявлены на оси вдавливания на глубине, примерно равной 0,5*a* (*a* — радиус отпечатка), а при использовании расчетного способа — в узких приповерхностных областях ближе к краю отпечатка. При этом величина максимальных локальных пластических деформаций в этих областях составляет 0,26 и 0,92 при d/D, равном 0,263 и 0,507 соответственно.

Это может быть связано с тем, что узкие приповерхностные зоны не выявлены экспериментальным способом из-за близости отпечатков пирамиды к поверхности большого сферического отпечатка. Если же сопоставить значения  $\varepsilon_i$ , полученные двумя способами в зоне под отпечатком на глубине 0,5*a*, то они окажутся достаточно близки. Для d/D = 0,263 значения  $\varepsilon_i$ составляют около 0,17 при получении расчетным способом и 0,20 — при определении экспериментальным способом, а для d/D = 0,507 эти значения равны примерно 0,41 и 0,43 соответственно.

Еще одно различие результатов, полученных двумя рассматриваемыми методами, состоит в том, что при больших значениях d/D = 0,507 форма фронта пластической деформации несколько различается (см. рис. 6, б, г). Если сравнивать отношения максимальной глубины распространения пластической деформации к максимальной невосстановленной глубине отпечатка (параметр  $\varphi$ ), определенные экспериментальным методом и методом конечных элементов при одном d/D, то они получаются достаточно близки.

Таким образом, оба вышеизложенных метода дополняют друг друга и позволяют получить более полную информацию о распределении напряжений



Рис. 5. Конечноэлементная сетка расчетной модели (а) и изображение выделенной области в увеличенном масштабе (б)



**Рис. 6.** Расчетные  $(a, \delta)$  и экспериментальные (s, c) картины распределения интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$  под отпечатками при d/D = 0,263 (a, s) и d/D = 0,507  $(\delta, c)$ 

и деформаций в различных зонах деформированного металла вокруг отпечатка. При этом использование расчетного метода возможно только при наличии кривой деформирования исследуемого материала, полученной опытным путем. Вместе с тем расчетный метод позволяет выявить локальные участки с более высокими значениями интенсивности деформаций, которые могут быть не выявлены экспериментальным методом.

### ЛИТЕРАТУРА

- Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 452 p.
- Giannakopoulos A. E., Suresh S. Determination of elastoplastic properties by instrumented sharp indentation / Scripta Mater. 1999. Vol. 40. Issue 10. P. 1191 – 1198.
- Савицкий Ф. С., Вандышев Б. А., Якутович М. В. Распределение наклепа вокруг конического отпечатка / Заводская лаборатория. 1948. Т. 14. № 12. С. 1476 – 1479.
- Марковец М. П. Построение диаграмм истинных напряжений по твердости и технологической пробе / Журнал технической физики. 1949. Т. 19. Вып. 3. С. 371 – 382.
- Oka Y. I., Matsumura M., Funaki H. Measurements of plastic strain below an indentation and piling-up between two adjacent / Wear. 1995. Vol. 186 – 187. Part 1. P. 50 – 55.
- Дель Г. Д. Определение напряжений в пластической области по распределению твердости. — М.: Машиностроение, 1971. — 200 с.
- Chaudhri M. M. Subsurface plastic strain distribution around spherical indentations in metals / Philos. Mag. A. Phys. Cond. Matter Struct. Defects Mech. Properties. 1996. Vol. 74. Issue 5. P. 1213 – 1224.
- Матюнин В. М. Индентирование в диагностике механических свойств материалов. — М.: Издательский дом МЭИ, 2015. — 288 с.
- Chaudhri M. M. Subsurface strain distribution around Vickers hardness indentations in annealed polycrystalline copper / Scripta Mater. 1998. Vol. 46. Issue 9. P. 3047 – 3056.
- Chaudhri M. M. Subsurface deformation patterns around indentations in work-hardened mild-steel / Philosophical magazine letters. 1993. Vol. 67. P. 107 – 115.
- Ludwig P., Scheu R. Vergleichende Zug-, Druck- und Walzversuche / Stahl und Eisen. 1925. Vol. 45. P. 373 – 381.
- Бакиров М. Б., Зайцев М. А., Фролов И. В. Математическое моделирование процесса вдавливания сферы в упругопластическое полупространство / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. № 1. С. 37 – 47.
- Cheng Y., Li Z. Hardness obtained from conical indentations with various cone angles / J. Mater. Res. 2000. Vol. 15. Issue 12. P. 2830 – 2835.
- Nolan G. Scale effects in microindentation of ductile crystals. Thesis for the degree of Master of Science in mechanical engineering. — Boston: Massachusetts Institute of technology, 2000. — 94 p.
- Koeppel B. J., Subhash G. Characteristics of residual plastic zone under static and dynamic Vickers indentations / Wear. 1999. Vol. 224. Issue 1. P. 56 – 67.
- Mesarovic S. J., Fleck N. A. Spherical indentation of elastic-plastic solids / Proc. Royal Soc. A. Math. Phys. Engin. Sci. 1999. Vol. 455. Issue 1987. P. 2707 – 2728.
- Biwa S., Storakers B. An analysis of fully plastic Brinell / J. Mech. Phys. Solids. 1995. Vol. 43. Issue 8. P. 1303 – 1333.
- Demiral M., Roy A., El Sayed T., Silberschmidt V. V. Influence of strain gradients on lattice rotation in nano-indentation experiments: A numerical study / Mater. Sci. Engin. A. 2014. Vol. 608. P. 73 – 81.
- Kramer D., Huang H., Kriese M., Robach J., Nelson A., Wright A., Bahr D., Gerberich W. Yield strength predictions from the plastic zone around nanocontacts / Acta Mater. 1998. Vol. 47. Issue 1. P. 333 – 343.

 Matyunin V. M., Dubov A. A., Marchenkov A. Yu. Scale factor in determining the hardness of metal materials / Inorg. Mater. 2010. Vol. 46. N 15. P. 1692 – 1695.

### REFERENCES

- Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 452 p.
- Giannakopoulos A. E., Suresh S. Determination of elastoplastic properties by instrumented sharp indentation / Scripta Mater. 1999. Vol. 40. Issue 10. P. 1191 – 1198.
- Savitskii F. S., Vandyshev B. A., Yakutovich M. V. Raspredelenie naklepa vokrug konicheskogo otpechatka [Plastic strain distribution around the conical indent] / Zavod. Lab. 1948. Vol. 14. N 12. P. 1476 – 1479 [in Russian].
- Markovets M. P. Postroenie diagramm istinnykh napryazhenii po tverdosti i tekhnologicheskoi probe [Stress-strain diagram forming using the hardness values and technological sample test] / Zh. Tekhn. Fiz. 1949. Vol. 19. Issue 3. P. 371 – 382 [in Russian].
- Oka Y. I., Matsumura M., Funaki H. Measurements of plastic strain below an indentation and piling-up between two adjacent / Wear. 1995. Vol. 186 – 187. Part 1. P. 50 – 55.
- Del' G. D. Opredelenie napryazhenii v plasticheskoi oblasti po raspredeleniyu tverdosti [Plastic strain distribution area evaluation using the hardness method]. — Moscow: Mashinostroenie, 1971. — 200 p. [in Russian].
- Chaudhri M. M. Subsurface plastic strain distribution around spherical indentations in metals / Philos. Mag. A. Phys. Cond. Matter Struct. Defects Mech. Properties. 1996. Vol. 74. Issue 5. P. 1213 – 1224.
- Matyunin V. M. Indentirovanie v diagnostike mekhanicheskikh svoistv materialov [Indentation as the mechanical properties diagnostics method]. — Moscow: Izdatel'skii dom MÉI, 2015. — 288 p. [in Russian].
- Chaudhri M. M. Subsurface strain distribution around Vickers hardness indentations in annealed polycrystalline copper / Scripta Mater. 1998. Vol. 46. Issue 9. P. 3047 – 3056.
- Chaudhri M. M. Subsurface deformation patterns around indentations in work-hardened mild-steel / Philosophical magazine letters. 1993. Vol. 67. P. 107 – 115.
- Ludwig P., Scheu R. Vergleichende Zug-, Druck- und Walzversuche / Stahl und Eisen. 1925. Vol. 45. P. 373 – 381.
- Bakirov M. B., Zaitsev M. A., Frolov I. V. Matematicheskoe modelirovanie protsessa vdavlivaniya sfery v uprugoplasticheskoe poluprostranstvo [Elastic half-space spherical indentation process CAD simulation] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2001. Vol. 67. N 1. P. 37 – 47 [in Russian].
- Cheng Y., Li Z. Hardness obtained from conical indentations with various cone angles / J. Mater. Res. 2000. Vol. 15. Issue 12. P. 2830 2835.
- Nolan G. Scale effects in microindentation of ductile crystals. Thesis for the degree of Master of Science in mechanical engineering. — Boston: Massachusetts Institute of technology, 2000. — 94 p.
- Koeppel B. J., Subhash G. Characteristics of residual plastic zone under static and dynamic Vickers indentations / Wear. 1999. Vol. 224. Issue 1. P. 56 – 67.
- Mesarovic S. J., Fleck N. A. Spherical indentation of elastic-plastic solids / Proc. Royal Soc. A. Math. Phys. Engin. Sci. 1999. Vol. 455. Issue 1987. P. 2707 – 2728.
- Biwa S., Storakers B. An analysis of fully plastic Brinell / J. Mech. Phys. Solids. 1995. Vol. 43. Issue 8. P. 1303 – 1333.
- Demiral M., Roy A., El Sayed T., Silberschmidt V. V. Influence of strain gradients on lattice rotation in nano-indentation experiments: A numerical study / Mater. Sci. Engin. A. 2014. Vol. 608. P. 73 – 81.
- Kramer D., Huang H., Kriese M., Robach J., Nelson A., Wright A., Bahr D., Gerberich W. Yield strength predictions from the plastic zone around nanocontacts / Acta Mater. 1998. Vol. 47. Issue 1. P. 333 – 343.
- Matyunin V. M., Dubov A. A., Marchenkov A. Yu. Scale factor in determining the hardness of metal materials / Inorg. Mater. 2010. Vol. 46. N 15. P. 1692 – 1695.