

УДК 519.28

ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ ПО ИНТЕРВАЛЬНЫМ ДАННЫМ

© Н. В. Скибицкий¹*Статья поступила 24 августа 2016 г.*

Рассмотрен подход к построению статических характеристик систем по экспериментальным данным, основанный на предположении, что ошибки эксперимента ограничены по величине. Предложена процедура обработки представленных в интервальной форме данных, позволяющая определить гарантированный интервал неопределенности статической характеристики. Предлагаемый подход, в отличие от статистического, позволяет учесть любую априорную информацию об ошибках как во входной, так и в выходной переменных, включая результаты дублирования опытов, сведения об абсолютных и относительных ошибках, ошибках округления, а также экспертную информацию.

Ключевые слова: статическая характеристика; ошибки переменных; интервальная неопределенность; эксперимент.

Модели, позволяющие получить описание объекта путем аналитического представления неточных экспериментальных данных, применяются для решения широкого класса прикладных технических, экономических и других задач. Поэтому актуальными являются задачи построения:

прямой статической характеристики объекта, связанной с оценкой значения y при заданном значении x , вида

$$y = f(x) = b_1\varphi_1(x) + \dots + b_m\varphi_m(x), \quad (1)$$

где $\varphi_i(x)$ — известные базисные функции; b_i — неизвестные параметры; x — независимая (входная) переменная; y — зависимая (выходная) переменная; $f(x)$ — однозначная монотонная функция преобразования;

обратной статической характеристики объекта, когда на основании модели (1) ищется обратная зависимость, а именно оценка x при заданном значении y :

$$x = f^{-1}(y) = \psi(a_1, \dots, a_m, y), \quad (2)$$

где a_i — неизвестные параметры, выражаемые через параметры b_i .

Задача нахождения прямой характеристики $f(x)$ по данным экспериментальных измерений x и y детально разработана в рамках математической статистики [1, 2] при достаточно жестких предположениях о том, что вид функции $f(x)$ известен, а действия помех могут быть сведены к случайной, аддитивной ошибке измерения. При этом применение статистической модели целесообразно в случае, если неопределенность связана только со случайной вариабельностью. Описание других источников неопределенности в рамках этой модели затруднительно [3]. В та-

ком случае одним из возможных подходов решения проблемы является использование процедуры непараметрического регрессионного анализа [4].

Сложность решения обратной задачи в первую очередь определяется наличием ошибок в экспериментальных данных и необходимостью обращения функции преобразования объекта.

В данной работе для решения задач построения прямой (1) и обратной (2) статических характеристик объекта предлагается подход, базирующийся на аппарате интервального анализа. Для облегчения понимания его сути и обеспечения его геометрической интерпретации дальнейшее изложение проведем применительно к однофакторной линейной по параметрам модели.

Построение прямых статических характеристик объекта. Эта задача основана на концепции «черного ящика» (рис. 1, где x — входная переменная, y — выходная переменная объекта, z — шум, порождающий ошибки в выходной переменной, $f(x, z)$ — статическая характеристика объекта). В ходе исследования наблюдению и измерению доступны только переменные x и y . Основой для решения задачи построения сглаживающей функции являются данные эксперимента, которые можно представить в виде множества $\{x_i, y_i, i = 1 \dots N\}$, содержащего N пар значений измеряемых величин x_i и y_i .

Методика построения прямых характеристик по интервальным данным включает следующие этапы.

Выбор модели описания неопределенности. Для получения информации о характере ошибок и их величине необходимо установить возможные типы и источники ошибок и записать математическую модель их воздействия.

В зависимости от специфики проведения эксперимента различают активный эксперимент, когда значе-

¹ Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия; e-mail: SkibitskyNV@mpei.ru

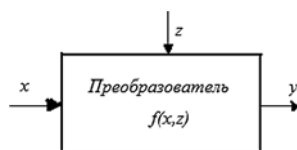


Рис. 1. Блок-схема «черного ящика»

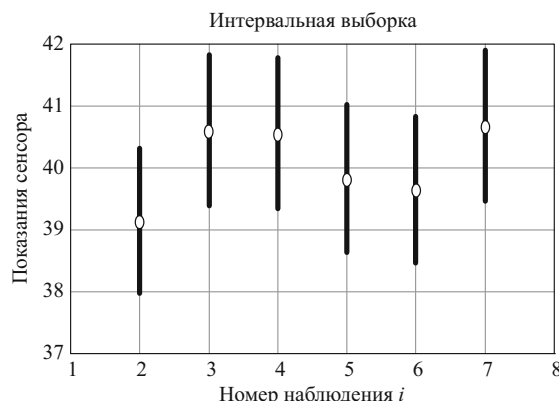


Рис. 2. Интервалы неопределенности экспериментальных данных

ния измеряемой величины x могут устанавливаться по желанию экспериментатора в соответствии с заранее выбранным планом эксперимента, и пассивный эксперимент, когда исследователь вынужден ограничиться результатами любых доступных ему наблюдений. При проведении активного эксперимента ошибками в значениях входной переменной обычно пренебрегают, так как считается, что они устанавливаются с достаточно высокой точностью. При пассивном эксперименте принимается, что ошибки присутствуют как в выходной, так и во входной переменных.

При использовании статистического подхода к построению сглаживающей функции обычно считается, что ошибками во входной переменной можно пренебречь, а модель ошибки представляется аддитивной моделью с ошибкой на выходе.

В действительности при любом типе эксперимента переменные x и y определяются с ошибками, которые могут иметь различную природу. Кроме того, механизм действия ошибок может описываться аддитивными, мультипликативными или смешанными моделями [3].

При предлагаемом интервальном подходе для определения интервалов неопределенности точечных наблюдений может использоваться любая априорная информация как статистической, так и нестатистической природы, включая результаты дублирования опытов, сведения об абсолютных и относительных ошибках, ошибках округления, а также экспертная информация.

Использование этой информации позволяет с помощью различных форм модели (1) представить экспериментальные данные в виде двух интервальных векторов — $[x] = ([x_1] \dots [x_i] \dots [x_N])$ и $[y] = ([y_1] \dots$

$[y_i] \dots [y_N])$, которые называются интервальной выборкой размера N . При этом каждый интервал $[x_i]$ или $[y_i]$ определяет множество всех возможных значений переменной в данном опыте и называется интервальным наблюдением. Каждому интервальному наблюдению $[x]$ или $[y]$ соответствует не точка, а интервал. В зависимости от того, в какой форме и из какого источника получена информация о неопределенности величины x , встречаются три формы записи границ интервала:

границами $x_{\min}$ и $x_{\max}$ —

$$[x] = [x_{\min}; x_{\max}]; \quad (3a)$$

точечным значением x (серединой интервала) и абсолютной ошибкой Δ —

$$[x] = [x - \Delta; x + \Delta]; \quad (3б)$$

точечным значением x и относительной ошибкой $\delta = \Delta/x$ —

$$[x] = [x - \delta|x; x + \delta|x]. \quad (3в)$$

Представление неточных данных непосредственно границами интервала (3a) встречается, например, при экспертных опросах, а также в эмпирических таблицах. Представления (3б) и (3в) приняты, в частности, в метрологии, где x означает измеренное неточным прибором значение неизвестной измеряемой величины, Δ — известная абсолютная ошибка измерения, δ — известная относительная ошибка измерения.

Очевидно, что между всеми моделями существует взаимно однозначное соответствие.

На рис. 2 представлен пример интервальной выборки, полученной в ходе проведения реального эксперимента. Интервалы неопределенности $[y_i]$ определены с помощью формулы (3б). Кружки на графике — точечные значения измерений.

Если ошибка имеет место при определении как x , так и y , то на графике зависимости $y(x)$ наблюдения будут представлены прямоугольниками.

Выбор вида функции. При интервальном подходе адекватной интервальным данным считается любая функция, которая проходит через все интервальные наблюдения. Очевидно, что можно подобрать различные функции, которые удовлетворяют этому условию, например, из числа представленных в табл. 1. Все эти функции являются линейными по параметрам, т.е. могут быть записаны в виде (1), где $\mathbf{b}$ — вектор неизвестных коэффициентов, подлежащих оцениванию.

Параметры каждой функции из заданного набора рассчитываются методом наименьших квадратов по средним точкам интервальных наблюдений. В качестве единственной функции из набора выбирается наиболее простая. Если через все интервальные наблюдения можно провести горизонтальную линию, то это свидетельствует об отсутствии связи между переменными и модель теряет смысл.

На рис. 3 отражен результат сравнения линейной, квадратичной и логарифмической функций по результатам четырех наблюдений с ошибками в обеих переменных, заданных интервалами. Каждому интервальному наблюдению соответствует прямоугольник, высота которого определяется ошибкой в переменной y , а ширина — ошибкой в переменной x . В данном эксперименте абсолютная ошибка Δ_y во всех опытах принята постоянной, а ошибка Δ_x — пропорциональной значениям x . Поэтому при малых значениях x прямоугольники вырождаются в вертикальные линии.

Неизвестные коэффициенты трех указанных функций рассчитаны методом наименьших квадратов с использованием средних точек интервальных наблюдений.

Как видно из рис. 3, линейная функция не пересекает ни одного интервального наблюдения, а квадратичная кривая оказывается вне первого и второго интервальных наблюдений. Следовательно, обе указанные функции непригодны для сглаживания имеющихся интервальных данных. Логарифмическая кривая проходит через все интервальные наблюдения, т.е. только она в представленном наборе функций является адекватной экспериментальным данным.

Таким образом, в рамках интервального анализа задача выбора вида функции решается достаточно просто даже при наличии ошибок в обеих переменных — x и y .

Расчет области возможных значений коэффициентов. Очевидно, что через интервальные наблюдения можно провести много функций заданного вида. Каждая из них имеет одну и ту же структуру, но определяется своим вектором параметров $\mathbf{b}$, который можно отобразить точкой в пространстве соответствующей размерности. Тогда множеству всех адекватных моделей соответствует область B всех возможных векторов $\mathbf{b}$, определяемая в результате решения системы линейных интервальных уравнений:

$$B = \{\mathbf{b}: \mathbf{F}\mathbf{b} = \mathbf{y}, \mathbf{F} \in [\mathbf{F}], \mathbf{y} \in [\mathbf{y}]\},$$

где $\mathbf{b}$ — вектор искомых коэффициентов; $[\mathbf{F}]$ — матрица интервальных значений базисных функций, $[\mathbf{y}]$ — вектор интервальных наблюдений выходной переменной.

Множество точек области B можно получить с помощью метода Монте-Карло, генерируя различные наборы «точечных наблюдений» ($x_i, y_i, i = 1 \dots N$), выбираемых внутри имеющихся интервальных наблюдений. По данным каждого из таких экспериментов рассчитывается один вектор оценок. Однако такое моделирование излишне с учетом того, что область B представляет собой выпуклый многогранник в пространстве параметров [5], что позволяет при ее описании ограничиться вычислением лишь конечного числа $\mathbf{b}^{(i)}$ его вершин. Каждой из вершин соответствует характеристика, проходящая по границам интервальных наблюдений. В случае двух параметров эта область

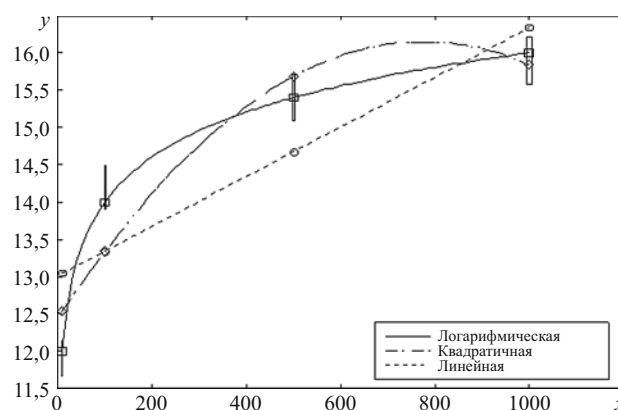


Рис. 3. Примеры описания экспериментальных интервальных данных

является выпуклым четырехугольником. Размер и соотношение осей четырехугольника близки к аналогичным размерам доверительного эллипса, определяемого при статистическом подходе. С учетом вышеупомянутой выпуклости области достаточно определить лишь координаты четырех ее вершин — $\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}, \mathbf{b}^{(4)}$. При этом вершина $\mathbf{b}^{(1)}$ рассчитывается для эксперимента, в котором переменные установлены на своих верхних границах $x_{\max}, y_{\max}$, а вершина $\mathbf{b}^{(2)}$ — по данным нижних границ $x_{\min}, y_{\min}$. Векторы коэффициентов $\mathbf{b}^{(3)}, \mathbf{b}^{(4)}$ определяются по двум наиболее разнесенным в области переменной y экспериментальным точкам. Отдельно вычисляется средняя точка четырехугольника $\mathbf{b}^{(0)}$, которой соответствует характеристика, рассчитанная с использованием центров интервальных наблюдений.

Гипотеза о нулевом значении интервальной переменной. Если границы интервального параметра имеют разные знаки, то это означает, что одним из возможных значений коэффициента является нуль. Таким образом, не отвергается гипотеза $H_0: b = 0$ и, следовательно, коэффициент может быть незначимым. По этой причине при дальнейшем анализе всем интервальным коэффициентам и переменным, границы которых имеют разные знаки, присваивается нулевое значение. Иначе говоря, если полученная область B не пересекается ни с одной из координатных осей, то гипотезы $H_0: b_j = 0$ необходимо отвергнуть для всех коэффициентов, т.е. все коэффициенты значимы, а если пересекается с одной из координатных осей, то возможным значением соответствующего коэффи-

Таблица 1. Функции, используемые для сглаживания экспериментальных данных

№	Вид функции	Математическое описание
1	Линейная	$y = b_1 + b_2x$
2	Квадратичная	$y = b_1 + b_2x + b_3x^2$
3	Степенная	$y = b_1 + b_2x^m$
4	Логарифмическая	$y = b_1 + b_2 \log(x)$
5	Показательная	$y = b_1 \cdot 10^{b_2x}$

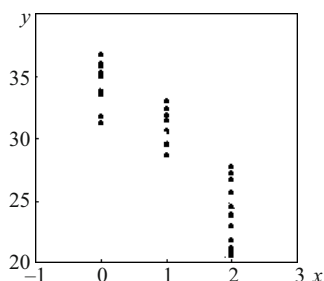


Рис. 4. Экспериментальные точки на трех уровнях

циента становится $b_j = 0$ и он должен быть исключен из модели.

Расчет интервала неопределенности сглаживаемой кривой. Для этой цели используются правила построения интервальной функции в соответствии с базовым принципом интервального анализа: интервал неопределенности результата есть множество всех его возможных значений, получаемых при варьировании переменных и параметров задачи в границах известных интервалов.

Тогда, если значения переменных или/и коэффициентов для функции векторного аргумента $y = f(\mathbf{b}, \mathbf{x})$, зависящей от вектора переменных $\mathbf{x} \in R^k$ и вектора коэффициентов $\mathbf{b} \in R^m$, где R^k , R^m — пространство действительных чисел размерности k и m соответственно, заданы в интервальном виде, то ее значение при фиксированном аргументе также будет интервалом. Границы интервального значения функции определяются как ее предельные значения при изменении коэффициентов b_j и переменных x_i внутри заданных интервалов, т.е.

$$[y] = [y^-; y^+] = [y: y = f(\mathbf{b}, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in [x], \mathbf{b} \in B].$$

При этом возможны два частных случая.

1. Точечные коэффициенты — интервальные аргументы. Тогда функцию y можно записать в виде $[y] = f(\mathbf{b}, [x])$. Границы $y_{\min}$, $y_{\max}$ интервала неопределенности значения функции находятся как решение двух задач на экстремум:

$$y_{\min} = \min_{\mathbf{x} \in [X]} f(\mathbf{x}), \quad y_{\max} = \max_{\mathbf{x} \in [X]} f(\mathbf{x}),$$

где $[X]$ — область возможного изменения переменных в заданных интервалах $[x_i]$, $i = 1, \dots, k$. В общем случае решение задачи ищется с помощью численных методов. Для определения границ $y_{\min}$, $y_{\max}$ необходимо найти наибольшее и наименьшее значения обычной функции векторного аргумента $y = f(\mathbf{x})$, когда ее аргументы меняются на интервале $[X]$.

Таблица 2. Интервальные экспериментальные данные примера

№ опыта	$[x_{\min}, x_{\max}]$	$[y_{\min}, y_{\max}]$
1	$[-0,05, 0,05]$	$[31,35, 36,75]$
2	$[0,95, 1,05]$	$[28,15, 33,55]$
3	$[1,95, 2,05]$	$[20,6, 27,8]$

2. Интервальные коэффициенты — точечные значения переменных. В этом случае интервальная функция векторного аргумента имеет вид $y = f([b], \mathbf{x})$. Тогда для полинома с интервальными коэффициентами $[b_i]$

$$f([b], \mathbf{x}) = [b_n]x^n + [b_{n-1}]x^{n-1} + \dots + [b_0]$$

его интервальное значение при заданном положительном значении аргумента x в предположении, что все интервальные коэффициенты положительны, будет определяться выражением

$$f_{\min}(x) = b_{n_{\min}}x^n + b_{n-1_{\min}}x^{n-1} + \dots + b_{0_{\min}},$$

$$f_{\max}(x) = b_{n_{\max}}x^n + b_{n-1_{\max}}x^{n-1} + \dots + b_{0_{\max}}.$$

В случае однофакторной линейной модели в интервальном методе, в отличие от статистического подхода, границы коридора ошибок модели описываются не двумя, а четырьмя функциями $y(\mathbf{b}^{(1)}, x)$, $y(\mathbf{b}^{(2)}, x)$, $y(\mathbf{b}^{(3)}, x)$, $y(\mathbf{b}^{(4)}, x)$, коэффициенты которых совпадают с координатами вершин области B . При этом первая пара функций описывает коридор ошибок модели внутри диапазона изменения переменной x в эксперименте, а вторая пара — коридор вне этого диапазона.

Необходимо отметить, что коридор неопределенности описывается не гладкой функцией, как при статистическом подходе, а кусочно-линейным сплайном.

Пример. В ходе эксперимента нормированная входная переменная менялась на трех уровнях — 0, 1, 2, каждый из которых дублировался 12 раз с ошибкой установки уровней, равной $\Delta_x = 0,05$, т.е. общее количество опытов $N = 36$. Экспериментальные точки показаны на рис. 4.

Диапазон изменения переменной y определен по результатам дублирования опытов по максимальному и минимальному ее значениям. В итоге получены интервальные данные эксперимента, представленные в табл. 2, а результаты их обработки показаны на рис. 5 (опытам в эксперименте соответствуют прямоугольные области неопределенности). Интервальные данные обрабатывали в соответствии с методикой, изложенной выше. Полученные результаты — коэффициенты уравнений четырех прямых (см. рис. 5), формирующих коридор неопределенности интервальной модели, представлены в табл. 3. Границы коридора ошибок модели имеют вид кусочно-линейных сплайнов, образованных четырьмя экстремальными прямыми $y(\mathbf{b}^{(i)}, x)$, коэффициенты которых определяются в вершинах области B , показанной на рис. 6. В диапазоне $0 \leq x \leq 2$ (см. рис. 5) центральная прямая построена как полусумма границ коридора ошибок. Границы средней части коридора ошибок образуют интервальную модель

$$[y] = [31,81; 37,39] + [-5,375; -4,475]x, \quad 0 \leq x \leq 2. \quad (4)$$

Интервалы неопределенности моделей получены с использованием множества B возможных коэффициен-

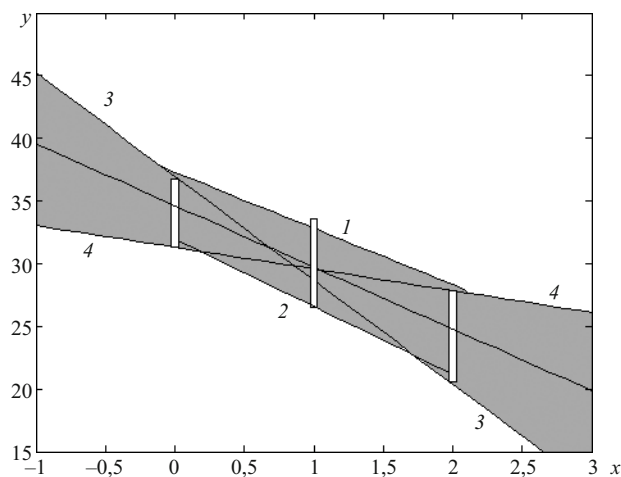


Рис. 5. Коридор неопределенности прямой интервальной модели

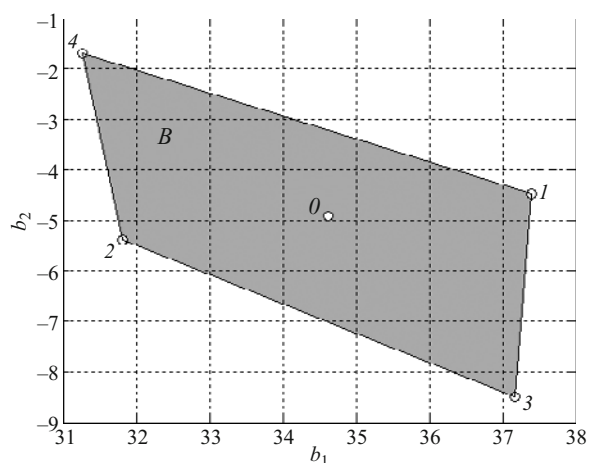


Рис. 6. Области изменения коэффициентов прямой интервальной модели

тов (см. рис. 6). Для установления соответствия между рис. 5, 6 и табл. 3 вершины области B на рис. 6, функции на рис. 5 и уравнения из табл. 3 обозначены цифрами 1 – 4.

Учитывая, что область B не пересекает ни одну из координатных осей, можно сделать вывод, что оба коэффициента значимы.

Гипотеза об однородности выборочных данных. В этом случае необходимо проверить, принадлежат ли интервальные наблюдения $[x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, m$) одной генеральной совокупности X . Поскольку однородная выборка оценивает одно и то же неизвестное значение x_0 , то оно должно принадлежать всем интервальным наблюдениям. Следовательно, гипотеза об однородности интервальной выборки $\{[x_1] \dots [x_i] \dots [x_m]\}$ принимается, если все интервальные наблюдения $[x_i]$ пересекаются и их можно рассматривать как различные наблюдения одной и той же величины x . Это позволяет заменить интервальную выборку одним интервалом неопределенности

$$[x] = [\min(x_{\min}), \max(x_{\max})],$$

который геометрически определяется как объединение всех выборочных интервалов.

Если существует хотя бы одно наблюдение $[x_k]$, которое не пересекается с остальными, то гипотезу об однородности выборки необходимо отвергнуть.

Построение обратных характеристик объекта

Данная задача в технических приложениях обычно решается для однофакторных, монотонных функций, обеспечивающих однозначность преобразования. Решение задачи построения обратной интервальной функции может быть осуществлено двумя способами, которые дают одинаковый результат.

1. **Непосредственное построение обратной функции по экспериментальным данным.** В данном

случае значения $[x]$ рассматриваются как выходные, а $[y]$ — как входные и процедура построения как точечной обратной модели, так и интервального коридора содержательно полностью совпадает с рассмотренной выше соответствующей процедурой построения прямой интервальной функции.

2. **Определение прямой функции по интервальным данным и ее обращение.** В этом случае, который и рассматривается в дальнейшем, сначала по экспериментальным данным находят оценки $\hat{b}_j$ коэффициентов прямой модели (1), а затем, например, с помощью формул табл. 4, рассчитывают оценки $\hat{a}_j$ параметров обратной функции (2), что позволяет записать искомую обратную статическую характеристику в виде

$$\hat{x}(y) = \psi(\hat{a}_1 \dots \hat{a}_m, y). \quad (5)$$

Тогда множеству всех адекватных прямых моделей, определяемых выпуклой областью B всех возможных векторов $\hat{\mathbf{b}}$, имеющей в случае двух параметров вид замкнутого четырехугольника с координатами вершин $\hat{\mathbf{b}}^{(1)}, \hat{\mathbf{b}}^{(2)}, \hat{\mathbf{b}}^{(3)}, \hat{\mathbf{b}}^{(4)}$, соответствуют векторы $\hat{\mathbf{a}}^{(j)} \in A$, определяющие четыре обратных модели

$$x(\hat{\mathbf{a}}^{(1)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(2)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(3)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(4)}, y)$$

Таблица 3. Результаты обработки экспериментальных данных

Номер граничного уравнения	Модель $y = b_1 + b_2x$		Точки эксперимента
	b_1	b_2	
1	37,39	-4,475	$x_{i\max}, y_{i\max}, i = 1 \dots 3$
2	31,81	-5,375	$x_{i\min}, y_{i\min}, i = 1 \dots 3$
3	37,17	-8,500	$(x_{1\max}, y_{1\max}), (x_{3\min}, y_{3\min})$
4	31,26	-1,690	$(x_{1\min}, y_{1\min}), (x_{3\max}, y_{3\max})$
0	34,62	-4,925	$\bar{x}_i, \bar{y}_i, i = 1 \dots 3$

и задающие коридор возможных ошибок обратной функции, т.е. ее интервал неопределенности

$$[x(y)] = [x_{\min}(y); x_{\max}(y)].$$

Границы интервала неопределенности обратной функции определяются выражением

$$x_{\min}(y) = \min_y \{x(\hat{\mathbf{a}}^{(1)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(2)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(3)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(4)}, y)\},$$

$$x_{\max}(y) = \max_y \{x(\hat{\mathbf{a}}^{(1)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(2)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(3)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(4)}, y)\}.$$

Предсказанное значение рассчитывается по формуле

$$\hat{x}(y) = 0,5\{x_{\min}(y) + x_{\max}(y)\}.$$

Из-за наличия ошибок эксперимента оценки $\hat{\mathbf{b}}^{(j)}$ и, следовательно, оценки $\hat{\mathbf{a}}^{(j)}$ являются неточными. В силу этого предсказанное по функции (5) значение $\hat{x}(y)$ будет также содержать неизбежные ошибки. Из-за существенной нелинейности обратного преобразования модель ошибки обратной характеристики является очень сложной и не может быть описана в терминах абсолютной или относительной ошибки фиксированной кривой (5). В этом случае наиболее полной характеристикой точности ее описания является интервал неопределенности

$$x_{\min}(y) \leq x(y) \leq x_{\max}(y), \quad (6)$$

где $x(y)$ — неизвестное точное значение измеряемой величины; $x_{\min}(y)$, $x_{\max}(y)$ — нижняя и верхняя границы ее возможных значений.

Сравнение прямых и соответствующих обратных функций в табл. 4 показывает, что только в линейном случае виды прямой и обратной моделей совпадают и формулы пересчета коэффициентов оказываются

достаточно простыми. В остальных случаях обратное преобразование приводит к изменению структуры функции. Его особенности рассмотрены в [3].

Проиллюстрируем схему применения двухэтапной процедуры построения обратной функции на примере линейной функции в рамках рассмотренного выше примера. Интервальные экспериментальные данные представлены в табл. 2. Опытам в эксперименте соответствуют прямоугольные области неопределенности. Прямая интервальная модель в области эксперимента описана выражением (4), границы коридора ошибок прямой модели имеют вид кусочно-линейных функций, образованных четырьмя экстремальными прямыми, коэффициенты которых задаются векторами $\mathbf{b}^{(i)}$, $i = 1 \div 4$.

Учитывая взаимно однозначное соответствие между переменными, на основе модели (4) легко получить обратную интервальную модель

$$[x] = -[b_1]/[b_2] + (-1/[b_2])y = a_1 + a_2y, \quad (7)$$

которая в области эксперимента имеет вид

$$[x] = [5,917; 8,357] + [-0,223; -0,186]y$$

и является искомой обратной функцией.

В табл. 5 представлены коэффициенты уравнений пяти прямых, формирующих коридор неопределенности прямой и обратной интервальных моделей. Точки $\mathbf{b}^{(i)}$, $\mathbf{a}^{(i)}$, $i = 1 - 4$, задают границы прямой и обратной интервальных моделей, а $\mathbf{b}^{(0)}$ и $\mathbf{a}^{(0)}$ — центральную прямую. Координаты четырех вершин $\mathbf{a}^{(i)}$ в табл. 5 найдены по формулам табл. 4 преобразованием координат соответствующих вершин области B . В последнем столбце табл. 5 показано, какие экспериментальные значения использовались при расчете коэффициентов. В частности, модель № 0 рассчитана по трем средним интервальным значениям переменных.

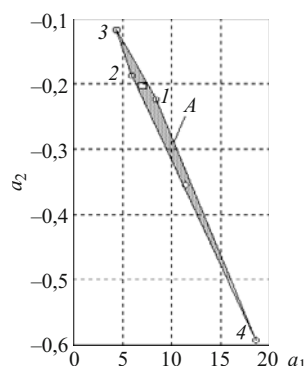
Таблица 4. Типовые сглаживающие функции

№	Прямая функция	Обратная функция	Формулы пересчета
1	Линейная $u = b_1 + b_2z$	Линейная $z = a_1 + a_2u$	$a_1 = -b_1/b_2$, $a_2 = 1/b_2$
2	Логарифмическая $u = b_1 + b_2 \log(z)$	Показательная $z = a_1 \cdot 10^{a_2u}$	$a_1 = 10^{-b_1/b_2}$, $a_2 = 10^{1/b_2}$
3	Степенная $u = b_1 + b_2z^m$	Нелинейная $z = (a_1 + a_2u)^{1/m}$	$a_1 = -b_1/b_2$, $a_2 = 1/b_2$
4	Квадратичная $u = b_1 + b_2z + b_3z^2$	Нелинейная $z = a_1 + \sqrt{a_2u + a_3}$	$a_1 = -\frac{b_2}{2b_3}$, $a_2 = \frac{1}{b_3}$, $a_3 = \left(\frac{b_2}{b_3}\right)^2 - \frac{b_1}{b_3}$

Таблица 5. Результаты обработки экспериментальных данных

Номер граничного уравнения/вершины области коэффициентов	Прямая модель $y = b_1 + b_2x$		Обратная модель $x = a_1 + a_2y$		Точки эксперимента
	b_1	b_2	a_1	a_2	
$1/[\mathbf{b}^{(1)}/\mathbf{a}^{(1)}]$	37,39	-4,475	8,357	-0,223	$x_{\max}, y_{\max}, i = 1 \dots 3$
$2/[\mathbf{b}^{(2)}/\mathbf{a}^{(2)}]$	31,81	-5,375	5,917	-0,186	$x_{\min}, y_{\min}, i = 1 \dots 3$
$3/[\mathbf{b}^{(3)}/\mathbf{a}^{(3)}]$	37,17	-8,500	4,373	-0,117	$(x_{1\max}, y_{1\max}), (x_{3\min}, y_{3\min})$
$4/[\mathbf{b}^{(4)}/\mathbf{a}^{(4)}]$	31,26	-1,690	18,495	-0,591	$(x_{1\min}, y_{1\min}), (x_{3\max}, y_{3\max})$
$0/[\mathbf{b}^{(0)}/\mathbf{a}^{(0)}]$	34,62	-4,925	7,030	-0,203	$\bar{x}_i, \bar{y}_i, i = 1 \dots 3$

Рис. 7. Область коэффициентов обратной интервальной модели



Область коэффициентов обратной интервальной модели представлена на рис. 7. Учитывая, что область A не пересекает ни одну из координатных осей, можно сделать вывод, что оба коэффициента обратной модели значимы.

На рис. 8 показан интервал неопределенности обратной модели, полученный с использованием множества возможных коэффициентов, представленных на рис. 7. Каждый вектор коэффициентов получен с помощью МНК, а прямые проведены через экстремальные точки, координаты которых представлены в последнем столбце табл. 5. Граница № 1 (см. рис. 8) определяется вектором $\mathbf{a}^{(1)}$, граница № 2 — вектором $\mathbf{a}^{(2)}$ и т.д.

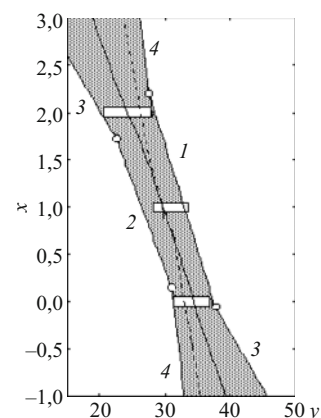
Таким образом, разработан подход к решению актуальной задачи построения как прямой, так и обратной статических характеристик объекта, основанный на применении аппарата интервального анализа и позволяющий получить математические модели по неточным экспериментальным данным, неопределенность которых может иметь разные источники и природу.

Предложенный подход не требует задания плотности распределения, поэтому лишен методологических недостатков при интеграции погрешностей, вызванных как случайной вариабельностью, так и источниками нестатистической природы. Это дает возможность рассматривать любую априорную информацию об ошибках как во входной, так и в выходной переменных, описывать различные источники неопределенности, включая систематические ошибки, ошибки округления, экспертную информацию и т.п.

Предложенный подход обеспечивает расчет точечных прямой и обратной функций, а также гарантированного интервала неопределенности.

Полученные интервальным методом обратные статические характеристики могут быть использова-

Рис. 8. Коридор ошибок обратной интервальной модели



ны для решения широкого класса задач, в частности, для анализа следящих систем и построения калибровочных характеристик измерительных систем.

Применение интервального подхода позволяет снять многие проблемы и методические сложности, возникающие при решении прикладных задач статистическими методами. Полученные на его базе результаты имеют ясную и четкую интерпретацию в терминах интервалов и областей неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. — М.: Мир, 1973. — 948 с.
2. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессия. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 302 с.
3. Скибицкий Н. В. О применимости статистического подхода к построению прямых и обратных характеристик объекта / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2016. Т. 82. № 11. С. 67 – 75.
4. Орлов А. И. Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.
5. Вошинин А. П., Бочков А. Ф., Сотиров Г. Р. Интервальный анализ данных как альтернатива регрессионному анализу / Заводская лаборатория. 1990. Т. 56. № 7. С. 77 – 81.

REFERENCES

1. Himmelblau D. M. Process Analysis by Statistical Methods. — New York: John Wiley & Sons, Inc., 1970.
2. Demidenko E. Z. Lineinaya i nelineinaya regressiya [Linear and nonlinear regression]. — Moscow: Finansy i statistika, 1981. — 302 p. [in Russian].
3. Skibitskii N. V. O primenimosti statisticheskogo podkhoda k postroeniyu pryamykh i obratnykh kharakteristik ob"ekta [Application of the statistical approach to construction of direct and inverse characteristics of the object] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2016. Vol. 82. N 11. P. 67 – 75 [in Russian].
4. Orlov A. I. Prikladnaya statistika [Applied statistics]. — Moscow: Ékzamen, 2006. — 671 p. [in Russian].
5. Voshchinin A. P., Bochkov A. F., Sotirov G. R. Interval'nyi analiz dannykh kak al'ternativa regressionnomu analizu [Interval analysis of data as an alternative to regression analysis] / Zavod. Lab. 1990. Vol. 56. N 7. P. 77 – 81 [in Russian].