УДК 620.1:539.5:621.91

# ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАТЯНУТЫХ КОЛЬЦЕВЫХ КРУГОВ ДЛЯ РАЗРЕЗАНИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ

© С. С. Ерошин[1], Р. А. Аветисов[1], А. И. Хохлов[2], В. С. Ежлов[2]

*Статья поступила 2 октября 2015 г.*

Решена плоская задача теории упругости для алмазных кругов с внутренней режущей кромкой (АКВР), находящихся в условиях неравномерного натяжения. В качестве расчетной модели взята круглая изотропная пластинка, нагруженная по контуру распределенной по гармоническому закону силой $q(\theta) = q + q_0\cos(2\theta)$. С использованием аппарата дифференциальных уравнений найдены напряжения и перемещения пластины. Исходя из норм стандарта на допуск формы отрезных кругов определено аналитическое выражение для допустимой величины неравномерности натяжения $q_0/q$. Установлено, что даже при двухпроцентной неравномерности натяжения некруглость формы отрезного круга может превысить заданную стандартом величину. Это вызывает необходимость измерения и контроля неравномерности натяжения отрезных кругов.

**Ключевые слова:** отрезные круги; АКВР; резка монокристаллов; неравномерность натяжения; кольцевая пластина; задача Ламе.

**А**лмазные отрезные круги с внутренней режущей кромкой (АКВР) — достаточно распространенный инструмент для резки монокристаллов полупроводниковых материалов при изготовлении подложек интегральных схем. Одним из основных факторов, влияющих на точность, качество поверхности пластин и стойкость инструмента, является степень равномерности натяжения отрезного круга. Неравномерность натяжения также приводит к искажению формы режущей кромки, что существенным образом ухудшает качество поверхности отрезаемых пластин.

Согласно данным работы [1] неравномерность натяжения отрезного круга может достигать 20 – 50 %. Цель данного исследования — определение параметров напряженно-деформированного состояния неравномерно натянутых отрезных кругов.

Натяжение отрезного круга, образованное при помощи $n$ пар болтов, равномерно распределенных по его контуру и создающих усилие $q_k$ от каждой пары, можно описать выражением [2]

$$q(\theta) = q + q_0\cos(2\theta), \qquad (1)$$

где $q = \sum_{k=1}^{n} q_k$; $q_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$, $A = \sum_{k=1}^{n} q_k \sin\frac{2\pi}{k}$, $B = \sum_{k=1}^{n} q_k \cos\frac{2\pi}{k}$. Таким образом, натяжение на внешней кромке представляет собой суперпозицию постоянного усилия $q$ и гармонической составляющей с амплитудой $q_0$.

Представим отрезной круг как круглую тонкую пластинку с внешним радиусом $a$ и центральным отверстием радиусом $b$, нагруженную по наружному контуру растягивающими усилиями $q(\theta)$ (рис. 1).

Для функции $q = \mathrm{const}$ плоское напряженное состояние определяется формулами Ламе для толстостенных цилиндров [3] (здесь и далее все напряжения и перемещения, вызванные постоянным натяжением $q = \mathrm{const}$, будут обозначаться со штрихом):

$$\sigma'_r = \frac{q}{1-\alpha^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right),\ \sigma'_\theta = \frac{q}{1-\alpha^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right),$$

$$u'(r) = \frac{q}{E}\frac{b}{1-\alpha^2}\left[(1-\mu)\frac{r}{b} + (1+\mu)\frac{b}{r}\right]. \qquad (2)$$

Тогда задача сводится к определению механических напряжений и перемещений в кольцевой пластинке при действии на её внешнем контуре лишь неравномерной составляющей усилия (1), а именно $q(\theta) = q_0\cos(2\theta)$.

*Определение напряжений.* Напряжения при неравномерном натяжении отрезного круга необходимо определять для оценки как прочности круга, так и отклонений формы режущей кромки.

Как известно, в отсутствие объемных сил функция напряжения $\varphi$ описывается однородным бигармоническим уравнением

$$\Delta^2\varphi = 0,$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа. В полярных координатах это уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right) = 0. \qquad (3)$$

[1] Луганский государственный университет им. В. Даля, г. Луганск, Украина; e-mail: sergey.yeroshin@gmail.com
[2] АО «Гиредмет», Москва, Россия; e-mail: yaniki-220@mail.ru

Напряжения, как известно, выражаются через функцию напряжения следующим образом:

$$\sigma_r(r,\theta)=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2},\ \sigma_\theta(r,\theta)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2},$$

$$\tau_{r\theta}(r,\theta)=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right). \qquad (4)$$

Будем искать решение уравнения (3) со следующими условиями на границе:

$$\sigma_r(a,\theta)=q_0\cos(2\theta);\ \sigma_r(b,\theta)=0;$$

$$\tau_{r\theta}(a,\theta)=0;\ \tau_{r\theta}(b,\theta)=0. \qquad (5)$$

Этим граничным условиям удовлетворяет одно из решений Митчелла для полярных координат [3], а именно:

$$\varphi(r,\theta)=f(r)q_0\cos(2\theta),$$

где $f(r)$ — некоторая функция полярного радиуса. Подставив $\varphi(r,\theta)$ в уравнение (3), получим

$$9\frac{df(r)}{dr}-9r\frac{d^2f(r)}{dr^2}f(r)+2r^2\frac{d^3f(r)}{dr^3}f(r)+r^3\frac{d^4f(r)}{dr^4}=0,$$

т.е. нелинейное дифференциальное уравнение, которое сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.

Общее решение этого уравнения [3] $f(r)=$ $=Ar^4+Br^2+C\frac{1}{r^2}+D$, тогда функция напряжения

$$\varphi(r,\theta)=\left(Ar^4+Br^2+C\frac{1}{r^2}+D\right)\cos(2\theta). \qquad (6)$$

Отметим, что такого же вида функцию $\varphi$ имеет задача о распределении напряжений в безграничной пластинке с отверстием, равномерно растянутой на бесконечности [3].

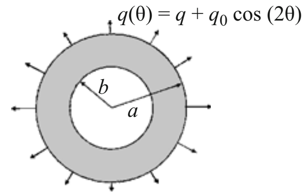


**Рис. 1.** Расчетная схема кольцевой пластинки с неравномерной по контуру нагрузкой

Подставив выражение (6) в уравнения (4), получим все напряжения:

$$\begin{cases}\sigma_r(r,\theta)=-2\left(B+\frac{3C}{r^4}+\frac{2D}{r^2}\right)\cos(2\theta);\\ \sigma_\theta(r,\theta)=2\left(6Ar^2+B+\frac{3C}{r^4}\right)\cos(2\theta);\\ \tau_{r\theta}(r,\theta)=-\left(2D\frac{1}{r^2}-2B-6Ar^2+\frac{6C}{r^4}\right)\sin(2\theta).\end{cases} \qquad (7)$$

С учетом граничных условий (5) выражения (7) переходят в систему уравнений:

$$\begin{cases}0+Bb^2+3C+2Db^2=0;\\ 0+Ba^2+3C+2Da^2=-\frac{a^4}{2}q_0;\\ 3a^2A+B-\frac{3}{a^4}C-\frac{1}{a^2}D=0;\\ 3b^2A+B-\frac{3}{b^4}C-\frac{1}{b^2}D=0.\end{cases}$$

Получили линейную систему четвертого порядка относительно констант интегрирования. Решая эту систему, находим:

$$\begin{cases}A=q_0\frac{a^4(a^2+3b^2)}{2(3a^8-9a^6b^2+9a^4b^4-3a^2b^6)};\ B=-q_0\frac{a^4(a^4+a^2b^2+2b^4)}{2(a^8-3a^6b^2+3a^4b^4-a^2b^6)};\\ C=-q_0\frac{a^4(3a^2b^4+b^6)}{2(3a^6-9a^4b^2+9a^2b^4-3b^6)};\ D=q_0\frac{a^4(a^4b^4+a^2b^6)(2a^4+a^2b^2+b^4)}{2(a^6b^2+a^4b^4)(a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6)}.\end{cases} \qquad (7^*)$$

Подставляя найденные постоянные интегрирования в (7) и введя обозначение $\alpha=b/a$, определим окончательно все напряжения:

$$\sigma_r(r,\theta)=Q\left[(1+\alpha^2+2\alpha^4)-2(2+\alpha^2+\alpha^4)\frac{b^2}{r^2}+(3+\alpha^2)\frac{b^4}{r^4}\right]\cos(2\theta),$$

$$\sigma_\theta(r,\theta)=Q\left[-(1+\alpha^2+2\alpha^4)+2(1+3\alpha^2)\frac{r^2}{a^2}-(3+\alpha^2)\frac{b^4}{r^4}\right]\cos(2\theta),$$

$$\tau_{r\theta}(r,\theta)=Q\left[-(1+\alpha^2+2\alpha^4)+(1+3\alpha^2)\frac{r^2}{a^2}+(3+\alpha^2)\frac{b^4}{r^4}-(2+\alpha^2+\alpha^4)\frac{b^2}{r^2}\right]\sin(2\theta), \qquad (8)$$

где $Q=q_0/(1-3\alpha^2+3\alpha^4-\alpha^6)$.

Для расчета прочности материалов особый интерес представляют окружные напряжения $\sigma'_\theta(r)$, рассчитанные по второй из формул (2) решения Ламе. Полагая в (8) $\theta=0$, построим график отношения амплитуд окружных на-

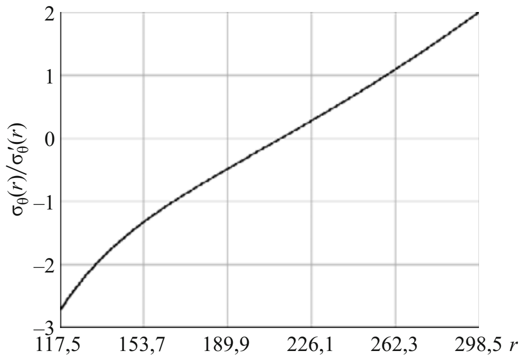


**Рис. 2.** Зависимость отношения окружных напряжений от радиуса круга

пряжений $\sigma_\theta(r)$ и $\sigma'_\theta(r)$ как функции радиуса круга АКВР 597 × 235 со стопроцентной относительной неравномерностью натяжения: $q_0/q = 1$. Параметры круга: $a = 298{,}5$ мм; $b = 117{,}5$ мм, $\alpha = 0{,}39$. График функции $\sigma_\theta(r)/\sigma'_\theta(r)$ представлен на рис. 2.

Таким образом, если, например, неравномерность натяжения составляет 10 %, то окружные напряжения на режущей кромке диска возрастают примерно в 1,3 раза по сравнению с соответствующими напряжениями при равномерном натяжении, что может стать причиной превышения предела текучести и скорого выхода из строя инструмента.

*Определение перемещений.* Перемещения можно выразить через напряжения формулами

$$\begin{cases} E\dfrac{du}{dr} = \sigma_r - \mu\sigma_\theta; \\ \dfrac{E}{r}\left(\dfrac{dv}{d\theta} + u\right) = \sigma_\theta - \mu\sigma_r; \\ G\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{d\theta} + r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{v}{r}\right)\right] = \tau_{r\theta}. \end{cases} \tag{9}$$

Подставим в первое уравнение (9) напряжения из (7):

$$E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -2\left[\left(B + \frac{3C}{r^4} + \frac{2D}{r^2}\right) + \mu\left(6Ar^2 + B + \frac{3C}{r^4}\right)\right]\cos(2\theta).$$

После интегрирования по $r$ запишем

$$u = \frac{2\cos(2\theta)}{Er^3}(C - Br^4 + 2Dr^2 + C\mu -$$

$$-2A\mu r^6 - B\mu r^4) + \frac{\zeta(\theta)}{E}, \tag{10}$$

где $\zeta(\theta)$ — функция, зависящая только от $\theta$.

Подставив (10) и напряжения (7) во второе уравнение (9), получим выражение, которое решим относительно производной $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\theta$ и проинтегрируем по $\theta$:

$$v = \frac{\sin(2\theta)}{Er^3}[2Ar^6(3+\mu) + 2Br^4(1+\mu) +$$

$$+2C(1+\mu) - 2Dr^2(1-\mu)] - \int\frac{\zeta(\theta)}{E}\mathrm{d}\theta + \frac{\eta(r)}{E}, \tag{11}$$

где $\eta(r)$ — функция, зависящая только от $r$.

Подставим перемещения (11) и (10), а также напряжение $\tau_{r\theta}$ из (7) в последнее уравнение (9) и после дифференцирования получим

$$r^3\int\zeta(\theta)\mathrm{d}\theta + r^3\frac{\mathrm{d}\zeta(\theta)}{\mathrm{d}\theta} - r^3\eta(r) + r^4\frac{\mathrm{d}\eta(r)}{\mathrm{d}r} +$$

$$+4(1+\mu)(3Ar^6 + Br^4 - 3C - Dr^2)\sin(2\theta) -$$

$$-2\frac{E}{G}(3Ar^6 + Br^4 - 3C - Dr^2)\sin(2\theta) = 0.$$

После математических упрощений и сокращений получим интегро-дифференциальное уравнение

$$r^3\int\zeta(\theta)\mathrm{d}\theta + r^3\frac{\mathrm{d}\zeta(\theta)}{\mathrm{d}\theta} - r^3\eta(r) + r^4\frac{\mathrm{d}\eta(r)}{\mathrm{d}r} = 0.$$

Перепишем его в более удобном для анализа виде:

$$\int\zeta(\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{\mathrm{d}\zeta(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \eta(r) - r\frac{\mathrm{d}\eta(r)}{\mathrm{d}r}. \tag{12}$$

Дифференцируя последнее выражение по $\theta$, получим

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} + \zeta(\theta) = 0.$$

Общее решение этого уравнения: $\zeta(\theta) = A_1\cos\theta + B_1\sin\theta$. Поставим это решение в уравнение (10):

$$u(r,\theta) = \frac{2\cos(2\theta)}{Er^3}[C(1+\mu) - B(1+\mu)r^4 +$$

$$+2Dr^2 - 2A\mu r^6) + \frac{1}{E}(A_1\cos\theta + B_1\sin\theta).$$

Примем выполнение условий периодичности решения на контуре пластинки:

$$\begin{cases} u(r,0) = u(r,\pi), \\ u\left(r,\dfrac{\pi}{2}\right) = u\left(r,\dfrac{3\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Первое условие дает $A_1 = 0$, второе условие — $B_1 = 0$, тогда

$$\zeta(\theta) \equiv 0$$

и для радиального перемещения получим следующее общее выражение:

$$u(r,\theta) = 2\frac{\cos(2\theta)}{Er^3}\times$$

$$\times[C(1+\mu) - B(1+\mu)r^4 + 2Dr^2 - 2A\mu r^6]. \tag{13}$$

Поскольку $\zeta(\theta) \equiv 0$, то уравнение (12) примет вид

$$r\frac{\mathrm{d}\eta(r)}{\mathrm{d}r} - \eta(r) = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными и общим решением

$$\eta(r) = C_1 r.$$

Подставив это решение в выражение (11) с учетом $\zeta(\theta) \equiv 0$, получим

$$\nu(r,\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{Er^3}[2Ar^6(3+\mu) + 2Br^4(1+\mu) +$$

$$+ C(1+\mu) - 2Dr^2(1-\mu)] + C_1 r. \qquad (14)$$

Условия периодичности решения (14) на контуре пластинки выполняются при любом $C_1$.

Выражения (13) и (14) дают общее решение задачи о перемещениях круглой пластинки с отверстием, на внешнем контуре которой действует гармоническая нагрузка.

Для свободной пластинки коэффициенты $A$, $B$, $C$, $D$, фигурирующие в формулах (13) и (14), найдены в (7*). Подставляя выражения для коэффициентов в (13), после преобразования получим формулу радиальных перемещений свободной пластинки с круглым отверстием:

$$u(r,\theta) = \frac{2q_0\cos(2\theta)}{E(1-\alpha^2)^3}\times$$

$$\times\left[-\frac{r^3}{3a^2}(1+3\alpha^2)\mu + \frac{r}{2}(1+\alpha^2+2\alpha^4)(1+\mu) +\right.$$

$$\left. + \frac{b^2}{r}(2+\alpha^2+\alpha^4) - \frac{b^4}{6r^3}(3+\alpha^2)(1+\mu)\right]. \qquad (15)$$

Из (15) определим амплитуду радиального перемещения на внутренней кромке:

$$u_{\text{вн. max}} = u(b,0) = 4b\frac{q_0}{E}\frac{1+2\alpha^2/3+\alpha^4}{(1-\alpha^2)^3}. \qquad (16)$$

Радиальное биение $\Delta$ режущей кромки находится как разность максимального и минимального расстояний точек кромки до оси. Для неравномерно растянутого диска радиальное биение определяется выражением (16). Действительно, $\Delta = D_{\max} - D_{\min} = (u'_{\text{вн}} + u_{\text{вн. max}}) - u'_{\text{вн}} = u_{\text{вн. max}}$, где $u'_{\text{вн}}$ — радиальное перемещение кромки, вызванное постоянной составляющей растягивающего натяжения.

ГОСТ 26004–83 накладывает определенные ограничения на величины как относительного увеличения внутреннего диаметра, так и радиального биения: $u'_{\text{вн}}/b \le 0{,}008$; $\Delta \le 0{,}05$ мм.

Перемещение на внутренней кромке $u'_{\text{вн}}$ от постоянной внешней нагрузки нетрудно получить из последней формулы решения Ламе (2), приняв в ней $r = b$:

$$u'_{\text{вн}} = \frac{q}{E}\frac{2b}{1-\alpha^2}. \qquad (17)$$

Марка стали, из которой изготовлен корпус (ГОСТ 26004–83), — сталь 12Х18Н9 с пределом прочности $\sigma_{\text{в}} = 1700$ МПа и модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Тогда требование $u'_{\text{вн}}/b \le 0{,}008$ совпадает с тем условием, когда величина окружных напряжений $\sigma'_\theta$ на внутренней кромке не должна превышать 90 % предела прочности стали $\sigma_{\text{в}}$. Действительно, согласно формуле Ламе (2) на внутренней режущей кромке ($r = b$) окружные напряжения

$$\sigma'_{\theta.\text{вн}} = \frac{2q}{1-\alpha^2}. \qquad (18)$$

Подставляя (18) в (17) и принимая $\sigma'_{\theta.\text{вн}} = 0{,}9\sigma_{\text{в}}$, для величины $u'_{\text{вн}}/b$ получим:

$$\frac{u'_{\text{вн}}}{b} = \frac{\sigma'_{\theta.\text{вн}}}{E} = \frac{0{,}9\sigma_{\text{в}}}{E} = 0{,}008.$$

Отметим, что в работе [4] на основе исследования отрезного круга на жесткость, прочность и стойкость к статическим и динамическим нагрузкам к величине усилия $q$ предъявлено это же требование: окружные напряжения $\sigma'_{\theta.\text{вн}}$ на режущей кромке, вызванные силой $q$, должны стремиться к значению $0{,}9\sigma_{\text{в}}$.

Требуя выполнения равенства $u'_{\text{вн}}/b = 0{,}008$ в выражении (17), запишем условие для внешней постоянной нагрузки $q$:

$$q = 0{,}004(1 - \alpha^2)E. \qquad (19)$$

Удовлетворяя неравенству $u_{\text{вн.max}} \le 0{,}05$ мм в выражении (16), получаем еще одно условие — для амплитуды $q_0$ неравномерной нагрузки:

$$q_0 \le \frac{0{,}05}{4b}\frac{(1-\alpha^2)^3}{1+2\alpha^2/3+\alpha^4}E. \qquad (20)$$

Поделив неравенство (20) на равенство (19), найдем максимально допустимое значение относительной неравномерности растягивающего усилия:

$$\frac{q_0}{q} \le \left[\frac{q_0}{q}\right] = \frac{3}{b}\frac{(1-\alpha^2)^2}{1+2\alpha^2/3+\alpha^4}, \qquad (21)$$

где размер $b$ берется в миллиметрах. Например, для отрезного круга марки АКВР 597 × 235 с параметрами $\alpha = 0{,}39$ и $b = 117{,}5$ мм согласно (18) максимально допустимое значение относительной неравномерности натяжения $[q_0/q] = 0{,}016$, т.е. допускаемая неравномерность натяжения составит всего 1,6 %.

Таким образом, получено решение плоской задачи упругости для кольцевой пластинки при ее неравномерном натяжении по внешнему контуру. Показано, что при оптимальной величине натяжения (когда $\sigma_\theta = 0{,}9\sigma_в$) и типичных значениях параметра $\alpha = 0{,}3 \ldots 0{,}4$, даже при минимальной неравномерности натяжения (меньше 2 %), радиальное биение превышает нормы, установленные стандартом.

При неравномерности натяжения более 5 % окружные напряжения $\sigma'_\theta$ превысят предел текучести материала, что приведет к необходимости измерения и учета неравномерности при натяжении отрезных кругов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Запорожский В. П., Лапшинов Б. А.** Обработка полупроводниковых материалов. — М.: Высшая школа, 1988. — 184 с.
2. **Таращанский М. Т.** Повышение точности резки полупроводниковых монокристаллов за счет уменьшения неравномерности натяжения корпуса отрезного круга: дис. ... канд. техн. наук. — Луганск, 2006. — 201 с.
3. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
4. **Ерошин С. С.** Исследование технологических факторов процесса алмазной резки слитков полупроводниковых материалов на пластины: дис. ... канд. техн. наук. — М., 1975. — 195 с.
5. **Патратьев А. Г.** Исследование процесса разрезания слитков германия и кремния алмазными дисками с внутренней режущей кромкой в полупроводниковом производстве: дис. ... канд. техн. наук. — М., 1967. — 208 с.
6. **Писаренко Г. С. и др.** Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наукова думка, 1988. — 736 с.


## REFERENCES


1. **Zaporozhskii V. P., Lapshinov B. A.** Obrabotka poluprovodnikovykh materialov [Processing of semiconductor materials]. — Moscow: Vysshaya shkola, 1988. — 184 p. [in Russian].
2. **Tarashchanskii M. T.** Povyshenie tochnosti rezki poluprovodnikovykh monokristallov za schet umen'sheniya neravnomernosti natyazheniya korpusa otreznogo kruga [Improving accuracy of cutting the semiconductor single crystals by reducing the non-uniformity of the tension body cut-off wheel]. Candiadte's Thesis. — Lugansk, 2006. — 201 p. [in Russian].
3. **Timoshenko S. P., Goodier J. N.** Theory of elasticity. — McGraw-Hill, 1951. — 506 p.
4. **Eroshin S. S.** Issledovanie tekhnologicheskikh faktorov protsessa almaznoi rezki slitkov poluprovodnikovykh materialov na plastiny [Investigation of technological factors of the cutting of diamond ingots of semiconductor materials on a plate]. Candiadte's Thesis. — Moscow, 1975. — 195 p. [in Russian].
5. **Patrat'ev A. G.** Issledovanie protsessa razrezaniya slitkov germaniya i kremniya almaznymi diskami s vnutrennei rezhushchei kromkoi v poluprovodnikovom proizvodstve [Investigation of the process of cutting ingots of silicon and germanium u sin g diamond blades with the inner cutting edge in semiconductor production]. Candiadte's Thesis. — Moscow, 1967. — 208 p. [in Russian].
6. **Pisarenko G. S. et al.** Spravochnik po soprotivleniyu materialov [Guide to the strength of materials]. — Kiev: Naukova dumka, 1988. — 736 p. [in Russian].