

Математические методы исследования

УДК 519.245

ИЗ ПРАКТИКИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

© О. И. Кутузов¹, Т. М. Татарникова²

Статья поступила 31 мая 2016 г.

Рассмотрены две задачи, обусловленные особенностями применения имитационного моделирования при исследовании сложных технических систем. Одна связана с реализацией повышения эффективности метода Монте-Карло при моделировании редких событий: сочетание расслоенной выборки с равновзвешенным моделированием позволяет значительно ускорить алгоритмический анализ моделей стохастических систем методом имитации. Решение другой задачи выявило проблему, связанную с неадекватностью использования одного и того же датчика псевдослучайных чисел при сопоставлении выборочных значений очередей, полученных на имитационных моделях фрактальной и классической СМО.

Ключевые слова: метод Монте-Карло; равновзвешенное расслоенное моделирование; эффективность по количеству испытаний; оценка редких событий; машинное время.

Метод равновзвешенного расслоенного моделирования

Во многих приложениях показатель качества моделируемой системы представляется в виде среднего риска

$$Q = M\{f(\alpha, \beta)\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — случайный вектор, описывающий процессы в моделируемой системе; $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ — вектор, задающий параметры модели; $f(\cdot)$ — функция, значение которой определяется в ходе вероятностного моделирования при различных реализациях x_i , $i = \overline{1, N}$, вектора α .

В частности, если $f(\cdot) = \xi = 1$ при выполнении моделируемой системой заданных требований и $f(\cdot) = \xi = 0$ в противном случае, то $Q(\beta)$ есть вероятность выполнения заданных требований. Решение задач, связанных с оценкой редких событий, может быть сведено к оцениванию математического ожидания $M\xi$ двоичной случайной величины (СВ) ξ , заданной в виде функции $\xi = f(\alpha)$, причем СВ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ имеет закон распределения $p(\alpha \sim p)$, который известен.

Расчет оценки для $M\xi$ может выполняться с помощью различных аналитико-статистических алгоритмов. Их эффективность будем характеризовать дисперсией оценки при фиксированном числе N опы-

тов. Чем меньше дисперсия оценки, тем точнее алгоритм и тем он эффективнее, если, конечно, сложность расчетов в сравниваемых алгоритмах различается незначительно.

При прямом статистическом моделировании («чистом» методе Монте-Карло) генерируется N независимых реализаций $\alpha^1, \dots, \alpha^N$ случайной величины α и вычисляются $\xi^i = f(\alpha^i)$, $i = \overline{1, N}$. Оценка $\hat{m} = (\xi^1 + \dots + \xi^N)/N$ и дисперсия $D\hat{m}$ оценки $\hat{m}$ составляет величину $D\xi/N$.

При методе расслоения [1] искомая оценка

$$\hat{m}_p = \sum_i^L p_i \hat{m}_i,$$

где L — число слоев; $\hat{m}_i$ и p_i — оценка и вероятность i -го слоя,

$$\hat{m}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \xi_i^j \text{ для } M\xi_i, i = \overline{1, L}, \sum_i N_i = N.$$

В работе [2] предложен оригинальный алгоритм взвешенного моделирования. Вместо случайной величины α разыгрываются равновероятные ее реализации $\gamma \sim p_0(x)$, $x \in X$, $p_0(x_j) = 1/n$, $j = \overline{1, n}$, и показатель $M\xi$ оценивается как математическое ожидание случайной величины $\zeta = nf(\gamma)p(\gamma)$ на том основании, что $M\xi = M\zeta$:

$$M\zeta = \sum_{x \in X} nf(x)p(x)p_0(x) = \sum_x \epsilon X f(x)p(x) = M\xi.$$

Этот конкретный метод равновзвешенного моделирования (РВМ) по существу реализует случайный

¹ Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), г. Санкт-Петербург, Россия; <http://www.eltech.ru>

² Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, г. Санкт-Петербург, Россия; <http://guap.ru>

ности оценок $\hat{Q}_{\xi}$ в целом при появлении некоторого разброса в исходных данных (вариант III) значение $\hat{\vartheta}$ заметно возрастает.

Эта же задача решена методом равновзвешенного моделирования с расслоением. Система, представленная на рис. 1, имеет связность $\gamma = 2$. Анализ показывает, что для данных значений отказов элементов при расслоенном моделировании достаточно рассмотреть слои с кратностью отказов $i = 2; 3$.

Разделение элементов системы на группы состояло в выделении для $i = 2$ и $i = 3$ одних и тех же четырех групп элементов с номерами 1, 2, 3; 4, 6, 9; 5, 7, 8 и 10, ..., 15 соответственно. При этом получены результаты, приведенные в графе C табл. 1. Видно, что для варианта III показатель $\hat{\vartheta}$ оказался примерно таким же, как и для вариантов I и II.

Для рассматриваемого примера $p^+ = 2,7 \cdot 10^{-4}$ и $\rho_{\gamma}^2 = 0,303$. Согласно (2) выигрыш в числе испытаний при расслоении и равновзвешенном моделировании по сравнению с прямым моделированием по методу Монте-Карло составит $t_1 = 2,84 \cdot 10^3$ раз.

Этот пример показывает, насколько эффективно применение расслоения при моделировании редких событий. Применение же RBM упрощает процесс моделирования.

Сопоставлению альтернатив при одном и том же датчике псевдослучайных чисел

В современных инфокоммуникационных сетях, прежде всего в сети Интернет, перемешиваются потоки данных, весьма разнообразных по содержанию и свойствам. Совокупность таких потоков порождает так называемый фрактальный (самоподобный) трафик.

Фрактальный трафик адекватно описывается распределениями вероятностей с тяжелыми хвостами, в частности, распределением Парето [5, 6] в виде

$$F(t) = 1 - \left(\frac{K}{t}\right)^{\alpha}, \quad t \geq K, \quad (3)$$

где α — параметр формы; K — граничный параметр, задающий минимальное значение СВ x . Далее распределение Парето будем обозначать в виде $Pa(K, \alpha)$. Из (3) видно, что положительный параметр α — это просто показатель степени, а положительный параметр K играет роль масштабного коэффициента.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по Парето, определяются следующими выражениями:

$$M(x) = \frac{\alpha K}{\alpha - 1}, \quad D(x) = \frac{\alpha K^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}.$$

Если $\alpha > 1$, то математическое ожидание конечно, дисперсия конечна только при $\alpha > 2$.

Стохастическая фрактальность трафика существенно влияет на качество связи. Исследования концентрируются вокруг статистических характеристик очередей. Буферизация сообщений рассматривается как основная обеспечивающая ресурсами стратегия. Оказывается, что традиционный анализ очередей, в основе которого лежит предположение о пуассоновском потоке, не может точно предсказать производительность системы в условиях самоподобного трафика. Более того, для самоподобного трафика потребуются буферы гораздо большего размера, чем предсказывает классический анализ очередей [6]. Естественный вопрос: насколько больше?

Ограниченные возможности применения точных и приближенных аналитических методов исследования очередей при фрактальном трафике приводят к использованию имитационного моделирования. При этом имитационное моделирование сопряжено с рядом специфических вычислительных проблем, в частности, с неадекватностью отображения потоков поступлений при одном и том же датчике псевдослучайных чисел (random).

Покажем это на примере оценивания характеристик очередей в СМО $M|M|1$ и $M|Pa|1$, поскольку такое сопоставление можно провести и теоретически, используя формулу Полячека – Хинчина [7], и экспериментально.

Для прямой процедуры обслуживания при входящем пуассоновском потоке [8] получено отношение средних длин очередей $L_{c,п}$ и $L_{c,э}$ при Парето и экспоненциальном распределении времен обслуживания в виде

$$\frac{L_{c,п}}{L_{c,э}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha(\alpha - 2) + 1}{\alpha(\alpha - 2)}. \quad (4)$$

Производная выражения (4) отрицательна, т.е. с увеличением α значение отношения (4) устойчиво уменьшается и при $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ становится равным единице.

Таким образом, при фрактальном трафике, длительности поступлений которого описываются распределением Парето со значениями параметра $\alpha > (1 + \sqrt{2})$, средняя длина очереди для экспоненциальной СМО $M|M|1$ превышает аналогичную характеристику очереди для СМО $M|Pa|1$ при одинаковой входящей нагрузке для обеих СМО.

Однако при анализе узлов сети в условиях фрактального трафика наиболее актуален диапазон значений параметра α от 1 до 2 [9]. При этих условиях формула Полячека – Хинчина не работает, соответственно не работает и соотношение (4).

Оценивание влияния самоподобия на характеристики очереди при значениях $1 < \alpha \leq 2$ выполнено с применением численного эксперимента на имитационной модели соответствующей СМО [10]. Результаты эксперимента представлены в табл. 2, где $L_{c,п}$

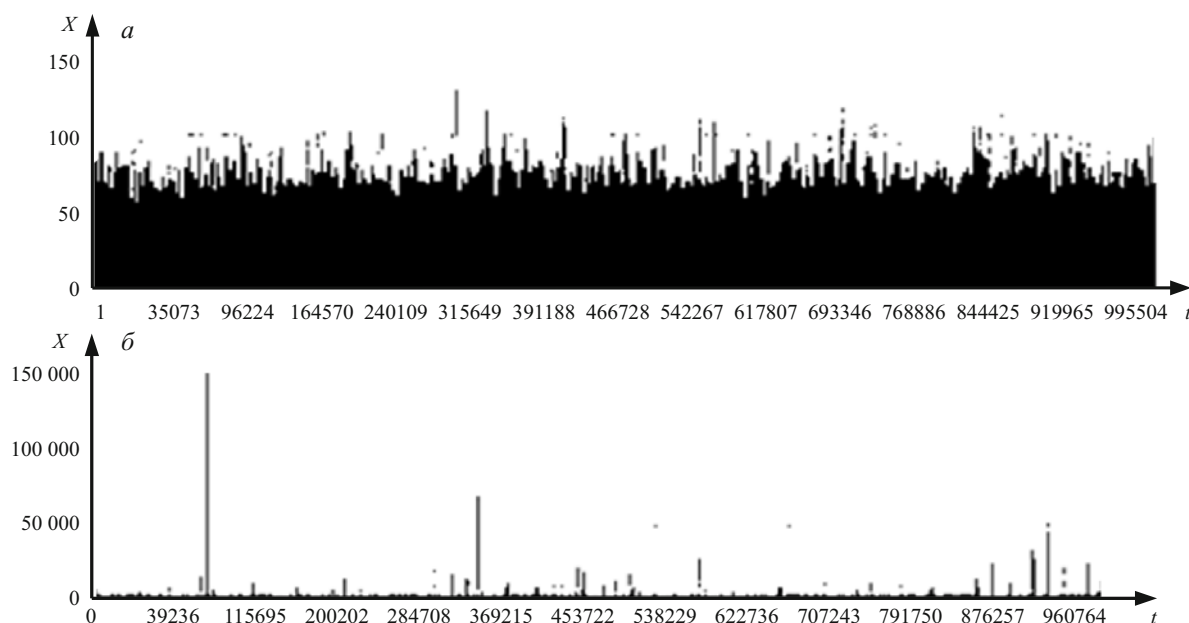


Рис. 2. Выборки поступлений при экспоненциальном ($\lambda = 0,1$) (а) и Парето ($\alpha = 1,1$) (б) распределениях значений поступлений $m = 10$

и $L_{м.п}$ — среднее и максимальное значения очереди при Парето-распределении (ПР) поступлений; $L_{с.э}$ и $L_{м.э}$ аналогичные значения очереди при экспоненциальном распределении поступлений (ЭР); ρ — коэффициент загрузки СМО. Видно, что сопоставление характеристик очереди при ЭР и ПР размеров поступлений (длительностей сообщений) производит «удручающее» впечатление.

Обратимся к выборкам из Парето- и экспоненциально распределенных значений случайных величин. Выборки выполнены без ограничения значений random (рис. 2, где шкала ординат X — значения длительности поступлений; шкала абсцисс t — последовательное во времени количество поступлений).

Обращает на себя внимание тот факт, что максимальные значения длительностей поступлений, распределенных по Парето, почти в 1000 раз выше, чем при экспоненциальном распределении. Но ведь размеры поступлений отображают возможные длительности сообщений одного и того же трафика. Поэтому столь значительной разницы в отображении максимальных значений длительностей сообщений быть не должно. При «прямом» моделировании такое раз-

личие изначально заложено в генерации реализаций случайной величины рассматриваемых распределений. Максимальные выборочные значения случайных величин (длительностей сообщений), экспоненциально ($y_{\max}^э$) и Парето ($y_{\max}^п$) распределенных, существенно разнятся. Так, при $\text{random}_{\min} = 10^{-4}$ для распределения Парето при $m = 10$, $\alpha = 1,1$ имеем $y_{\max}^п = \frac{1,618}{1,1\sqrt{10^{-4}}} = 17000,3$, при $\alpha = 2$ значения $y_{\max}^п = 505$; для экспоненциального распределения — $y_{\max}^э = m \ln 10^4 = 92,2$.

При увеличении диапазона дискретности эта разница в возможных выборочных максимальных значениях еще более возрастает. Получается, что такое прямое сопоставление значений очередей в СМО $M|M|1$ и $M|Pa|1$ некорректно.

Максимальные значения сообщений одного и того же реального трафика априори отображаются разными значениями при ПР и при ЭР длительности поступлений: при одном и том же датчике случайных чисел заведомо $y_{\max}^п > y_{\max}^э$ [11].

В табл. 3 представлены статистические характеристики Парето ($\alpha = 1,1$; $k = 5$) и экспоненциально распределенных длительностей поступлений при ограничении, учитывающем возможный диапазон $[l_{\min}, l_{\max}]$ размеров поступающих сообщений. Такой подход имеет смысл из-за существования верхнего предела на размеры передаваемых кадров L_k .

Приведенные в табл. 3 данные получены в результате численного эксперимента с имитационными моделями СМО $M|Pa|1$ и $M|M|1$. Схема эксперимента показана на рис. 3.

Таблица 2. Сравнительные характеристики очереди СМО $M|M|1$ и $M|Pa|1$

Отношение очередей	α	ρ			
		0,25	0,5	0,7	0,9
$L_{с.п}/L_{с.э}$	1,1	16820,8	5708,0	1959,1	808,3
	1,5	12,7	12,9	14,6	24,1
	2,41	0,95	0,96	0,94	0,97
$L_{м.п}/L_{м.э}$	1,1	1384,9	1373,1	730,9	278,4
	1,5	51,5	44,5	35,0	22,9
	2,41	7,0	8,5	6,2	3,9

Таблица 3. Статистические характеристики Парето ($\alpha = 1,1$) и экспоненциально распределенных длительностей поступлений при ограничении на размеры сообщений

№ п/п	$M Pa 1$				$M M 1$			
	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\frac{l_{\min} - l_{\max}}{y_{\max}}$	N_2	$\frac{D_2}{m_2^2}$	$\frac{D_1}{m_1^2}$	$\frac{l_{\min} - l_{\max}}{y_{\max}}$	N_2	$\frac{D_2}{m_2^2}$	$\frac{D_1}{m_1^2}$
1	$\frac{5-50}{1855032}$	1086696	3317,5	0,53	$\frac{5-50}{603}$	1703447	1,001	0,29
2	$\frac{5-100}{2803142}$	1038484	5680,1	1,01	$\frac{5-100}{567}$	1262604	0,995	0,45
3	$\frac{5-1000}{2438309}$	1002970	4668,8	5,97	$\frac{5-1000}{527}$	1126757	1,001	0,80
4	$\frac{5-2,5 \cdot 10^4}{14438902}$	1000086	7039,5	63,76	$\frac{5-2,5 \cdot 10^4}{809}$	1095587	1,003	0,84
5	$\frac{5-5 \cdot 10^4}{900547,5}$	1000044	1864,9	105,95	$\frac{5-5 \cdot 10^4}{572}$	1130892	1,001	0,79

Объемы выборочных данных: $N_1 = 10^6$ — для диапазона $[l_{\min}, l_{\max}]$; N_2 — для диапазона $[y_{\min}, y_{\max}]$ (см. табл. 3, графа 2 при ПР, графа 6 при ЭР). В графах 3 и 7 представлены отношения оценочных дисперсий к квадратам средних значений размеров поступлений при ПР и ЭР соответственно без ограничения значений random, в графах 4 и 8 — те же отношения при ограничении минимального значения random (10^{-4}).

Среднее значение размера поступлений m_2 при экспоненциальном распределении длительностей поступлений взято равным статистической оценке m_2 Парето-распределения длительностей поступлений для того, чтобы сохранить одинаковую нагрузку при обслуживании поступающих требований.

Соотношения средних значений очередей $L_{c,п}$ ($M|Pa|1$) и $L_{c,э}$ ($M|M|1$), вычисленные с использованием формулы Полячека — Хинчина и соответствующих статистик (см. табл. 3, графы 3 и 7) без учета калибровки моделей потоков к диапазону $[l_{\min}, l_{\max}]$ дали следующий результат варианты: 1 — 1659,0; 2 — 2913,4; 3 — 2334,9; 4 — 3467,9; 5 — 1426,6.

В табл. 4 представлены соотношения средних и максимальных ($L_{м,п}$ и $L_{м,э}$) значений очередей тех же СМО, соответствующие выборочным данным при $y_{\max}^п \geq l_{\max}$ и $y_{\max}^э \geq l_{\max}$ (см. табл. 3, строки 1 и 2) и $y_{\max}^п \geq l_{\max}$ и $y_{\max}^э < l_{\max}$ (см. табл. 3, строки 3, 4, и 5) диапазонов $[l_{\min}, l_{\max}]$.

При перекрытии диапазонов как при экспоненциальном распределении, так и при Парето отличие характеристик очередей незначительно (см. табл. 4, № вариантов 1 и 2). При перекрытии диапазонов при Парето-распределении и неперекрывании при экспоненциальном (см. табл. 4, № вариантов 3, 4 и 5) отличие возрастает по мере увеличения различия в выборочных максимальных значениях.

Анализ представленных в табл. 4 результатов позволяет сделать следующие выводы, связанные с особенностью моделирования и сопоставления очередей $M|M|1$ и $M|Pa|1$.

Таблица 4. Соотношения средних и максимальных значений очередей СМО $M|M|1$ и $M|Pa|1$ при ограничении диапазона поступлений

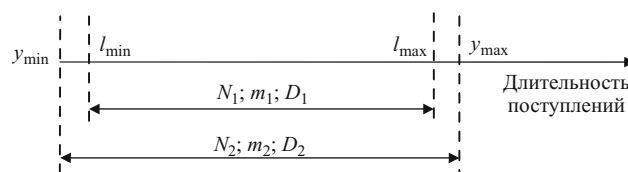
Отношение очередей	Номер варианта				
	1	2	3	4	5
$L_{c,п}/L_{c,э}$	1,25	1,34	3,83	35,2	56,0
$L_{м,п}/L_{м,э}$	1,04	1,43	3,48	38,4	46,1

Различие в характеристиках очереди между экспоненциальным обслуживанием и обслуживанием по Парето возрастает при увеличении нагрузки при $\alpha = 1,1$. При $\alpha \geq 1,5$ различие от нагрузки значительно менее заметно и существенно снижается при увеличении значения α (см. табл. 2).

Еще в большей степени выравнивание названных характеристик очередей заметно при приведении выборочных значений экспоненциально и Парето распределенных случайных величин к возможному диапазону размеров сообщений реального трафика.

Но калибровка распределения Парето к диапазону длительностей протокольных единиц трафика есть не что иное как «обрубание» хвостов распределения Парето. Распределение Парето с хвостами, обрубленными по максимумам выборок ограниченного объема, отличаются от неусеченных Парето распределений принципиально (особенно при бесконечных дисперсиях).

В физическом смысле такое усечение распределения Парето оправдано. Но насколько такое усечение

**Рис. 3.** Схема эксперимента

корректно и является ли «усеченное» распределение Парето распределением с «тяжелыми хвостами»?

Рассмотренные две задачи связаны с особенностями применения имитационного моделирования при исследовании сложных технических систем.

При наличии в модели случайных факторов имитационные эксперименты выполняются с привлечением метода статистических испытаний, или метода Монте-Карло. Известный недостаток метода Монте-Карло заключается в его медленной сходимости. Этот недостаток особенно проявляется при анализе сложных систем и оценивании редких событий.

Ускорить моделирование — значит добиться большей точности при том же числе опытов (испытаний) или получить требуемую точность при меньшем числе опытов. Ускорение может достигаться за счет соответствующего аналитического преобразования решаемой задачи, в частности, за счет применения расслоения при моделировании редких событий.

При многократных повторах численного эксперимента с имитационной моделью весьма существенная доля машинного времени тратится на формирование реализаций случайного вектора, задающего состояния элементов системы, компоненты которого характеризуются в общем случае различными и подчас трудно реализуемыми на ЭВМ законами распределения. Применение же равновзвешенного моделирования существенно упрощает процесс генерации возможных состояний моделируемой системы.

Как показывает приведенный в первой задаче пример, сочетание расслоенной выборки с равновзвешенным моделированием позволяет значительно ускорить алгоритмический анализ моделей стохастических систем методом имитации.

Сопоставление выборочных значений очередей, полученных на имитационных моделях фрактальной и классической СМО при использовании одного и того же датчика псевдослучайных чисел, выявило новую проблему.

И фрактальная, и экспоненциальная случайные величины распределены до бесконечных значений. Но один и тот же датчик псевдослучайных чисел выдает максимальное значение для Парето распределенной случайной величины во много раз большее, чем для экспоненциально распределенной. Но ведь размеры поступлений отображают возможные длительности сообщений одного и того же трафика. Поэтому такой значительной разницы в отображении максимальных значений длительностей сообщений быть не должно. Для корректного сопоставления оценок очередей приходится распределения поступлений либо нормировать по отношению к возможному диапазону значений передаваемых сообщений, либо калибровать. Однако это утверждение требует дополнительного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейнен Дж. Статистические методы в имитационном моделировании. — М.: Статистика, 1978. С. 221 – 335.
2. Плакс Б. И. Расчет надежности систем со сложной структурой ускоренным методом Монте-Карло / Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 6. С. 158 – 162.
3. Кутузов О. И., Задорожный В. Н. Аналитико-статистический метод расчета высоконадежных систем связи / Техника средств связи. Сер. Техника проводной связи. 1990. Вып. 1. — 10 с.
4. Рябинин И. А., Черкесов Г. Н. Логико-вероятностные методы исследования структурно-сложных систем. — М.: Радио и связь, 1981. — 264 с.
5. Шелухин О. И. Мультифракталы. Инфокоммуникационные приложения. — М.: Горячая линия. Телеком, 2011. — 576 с.
6. Столинс В. Современные компьютерные сети. — СПб.: Питер, 2003. — 784 с.
7. Zwart A. P. Queueing Systems with Heavy Tails. — Eindhoven University of Technology, 2001. — 227 p.
8. Тонг Минь Дык, Кутузов О. И. Оценка влияния самоподобной нагрузки на характеристики очереди / Изв. СПбЭТУ «ЛЭТИ». Сер. Информатика, управление и компьютерные технологии. 2006. Вып. 3. С. 35 – 38.
9. Урьев Г. А. Исследование фрактальных свойств потоков трафика реального времени и оценка их влияния на характеристики обслуживания телекоммуникационных сетей: автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М., 2007.
10. Кутузов О. И., Марфин С. А. Сравнительный анализ очереди при самоподобной нагрузке / Изв. СПбЭТУ «ЛЭТИ». 2014. № 3. С. 20 – 23.
11. Кутузов О. И., Татарникова Т. М. К оцениванию и сопоставлению очередей классических и фрактальных систем массового обслуживания / Информационно-управляющие системы. 2016. № 2. С. 48 – 55.

REFERENCES

1. Kleinen J. Statistical techniques in simulation. Vol. 1. — New York: Marcel Dekker, 1974.
2. Plaks B. I. Raschet nadezhnosti sistem so slozhnoi strukturoi uskorennyim metodom Monte-Karlo [Calculation of systems reliability with complex structure accelerated Monte Carlo] / Izv. AN SSSR. Tekhn. Kibernet. 1983. N 6. P. 158 – 162 [in Russian].
3. Kutuzov O. I., Zadorozhnyi V. N. Analitiko-statisticheskii metod rascheta vysokonadezhnykh sistem svyazi [Analytical and statistical method for the calculation of highly reliable communication systems] / Tekhnika sredstv svyazi. Ser. Tekhnika provodnoi svyazi [Communication technology. Ser. Technique of wire communication.]. 1990. Issue 1. — 10 p. [in Russian].
4. Ryabinin I. A., Cherkosov G. N. Logiko-veroyatnostnye metody issledovaniya strukturno-slozhnykh sistem [Logical and probabilistic methods for studying structure-complex systems]. — Moscow: Radio i svyaz', 1981. — 264 p. [in Russian].
5. Shelukhin O. I. Mul'tifraktaly. Infokommunikatsionnye prilozheniya [Fractal processes in telecommunications]. — Moscow: Goryachaya liniya. Telekom, 2011. — 576 p. [in Russian].
6. Stolin V. Sovremennye komp'yuternye seti [Modern computer networks]. — St. Petersburg: Piter, 2003. — 784 p. [Russian translation].
7. Zwart A. P. Queueing Systems with Heavy Tails. — Eindhoven University of Technology, 2001. — 227 p.
8. Tong Min Dic, Kutuzov O. I. Otsenka vliyaniya samopodobnoi nagruzki na kharakteristiki ocheredi [Assessing the impact of self-similar load on the line characteristics] / Izv. SPbÉTU «LÉTI». Ser. Inform. Upravl. Komp'yuter. Tekhnol. 2006. Issue 3. P. 35 – 38 [in Russian].
9. Ur'ev G. A. Issledovanie fraktal'nykh svoystv potokov trafika real'nogo vremeni i otsenka ikh vliyaniya na kharakteristiki obsluzhivaniya telekommunikatsionnykh setei [The study of fractal properties of real-time traffic flows and assessing their impact on the characteristics of the service of telecommunication networks]. Author's abstract of candidate's thesis. — Moscow, 2007 [in Russian].
10. Kutuzov O. I., Marfin S. A. Sravnitel'nyi analiz ocheredi pri samopodobnoi nagruzke [Comparative analysis of the queue when self-similar load] / Izv. SPbÉTU «LÉTI». 2014. N 3. P. 20 – 23 [in Russian].
11. Kutuzov O. I., Tatarnikova T. M. K otsenivaniyu i sopostavleniyu ocheredei klassicheskikh i fraktal'nykh sistem massovogo obsluzhivaniya [For evaluation and comparison of classical and fractal queues queueing systems] / Inf.-Upravl. Sist. 2016. N 2. P. 48 – 55 [in Russian].