

УДК 620.171.3:678.664

ПОВЕДЕНИЕ ПОЛИУРЕТАНОВОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ТЕМПЕРАТУРАХ ОТ –80 ДО 100 °С

© А. Ю. Ларичкин, Е. В. Карпов¹

Статья поступила 8 декабря 2015 г.

Представлены экспериментальные данные по одноосным испытаниям полиуретанового материала duothan QA965, а также результаты испытаний демпфера из этого материала при отрицательных и положительных температурах. Отмечено существенное увеличение модуля упругости материала в диапазоне от –30 до –35 °С. Точное решение задачи осесимметричного деформирования цилиндрического демпфера сравнивается с результатами физического моделирования его поведения при комнатной температуре. Показано, что численные расчеты деформирования демпфера по модели Муни — Ривлина хорошо согласуются с экспериментом.

Ключевые слова: полиуретан; температура; демпфер; эксперимент; модель Генки; модель Муни — Ривлина.

В машиностроении происходит усовершенствование агрегатов и механизмов за счет усложнения конструкций и использования для их создания новых конструк-

ционных материалов. На смену изделиям из резины (манжеты топливных труб, отсечные клапаны, всевозможные гасители вибраций, демпферы, защитные пыльники, мягкие узлы сочленения рычагов подвески и т.д.), которые часто работают в агрессивных средах

¹ Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: larichking@gmail.com

(нефтепродукты, озон, солевые смеси), приходят термостойкие силиконы и пластики, полиуретаны и полимерные композитные материалы, физико-химические и механические характеристики которых выше, чем у резин. Свойства таких материалов могут быть «запрограммированы» для работы при заданных условиях эксплуатации еще на этапе проектирования. В этой связи возникает ряд задач, связанных с расширением области применения этих материалов, моделированием работы изделий из них в критических режимах эксплуатации и построением моделей для описания их механического и реологического поведения.

Методы моделирования вязкоупругого поведения полимерных материалов описаны в работе [1]. Авторы проанализировали ряд классических и новых упругих потенциалов и дали оценку наиболее подходящих среди них для моделирования механических свойств эластомеров. Они разработали современный подход к описанию связи реологических и механических свойств полимеров, основанный на замене параметров моделей материалов на операторы-функции, зависящие от немеханических параметров (температуры, доли содержания наполнителя и пр.). Такой подход позволяет учитывать зависимость свойств материала от времени.

Позднее [2] предложена многопараметрическая модель дисперсно-наполненного эластомерного материала, для нахождения параметров которой обрабатывали эксперименты по ступенчатому растяжению с релаксацией и ступенчатой разгрузкой с релаксацией; за истинную диаграмму $\zeta(\lambda)$ принимали линию, проходящую между установившимися значениями усилий на релаксационных ступенях. Такой подход позволил точно описывать поведение как однородных, так и дисперсно-наполненных эластомеров при растяжении. Авторы [2] построили модель материала (по аналогии с моделью Кельвина [3]) из пружинных, вязких элементов, элементов трения (Сен-Венана) и элементов качения определенной конфигурации с их последовательно-параллельным соединением. Количество искоемых параметров такой модели достигало восьми [2].

В связи с ростом вычислительных мощностей персональных компьютеров и широким применением на производстве систем расчетных пакетов программ на основе МКЭ становятся актуальными разработка и внедрение в эти пакеты пользовательских программ новых моделей материалов. Предложена технология расчета гиперупругих тел при конечных деформациях, где в качестве рабочего базиса выбирали главные оси левого тензора искажения и в терминах главных удлинений строили все соотношения, необходимые для постановки задачи и ее решения методом конечных элементов [4]. Дано новое представление тензора упругости четвертого порядка для гиперупругого изотропного материала Генки, компактность которого обусловлена использованием собственных проекций правого тензора деформаций Коши – Грина [5, 6]. В библиоте-

ку материалов пакета MSC.Marc введена модель гиперупругого материала Генки, где реализован метод конечных элементов решения задач механики деформируемого твердого тела в переменных Лагранжа [7].

Цель данного исследования — экспериментальное определение параметров моделей Генки и Муни – Ривлина для моделирования поведения полиуретановых демпфирующих элементов конструкций при различных температурах.

Исследуемый материал — ДУОТАН® QA965/А 250 МХ — квазиполимерная двухкомпонентная полиуретановая система горячего отверждения на основе сложных полиэфиров и МДИ (модифицированного дифенилметандиизоционата $C_{15}H_{10}N_2O_2$), которая используется при производстве высококачественных полиуретановых эластомеров с твердостью в диапазоне от 45 до 95 по Шору, шкала А.

Испытания проводили на установке Zwick/Roell Z100 (максимальная нагрузка 100 кН, чувствительность датчика силы 1 Н, частота записи данных 100 раз в секунду). Нагружение осуществляли при помощи электромеханического привода высокой точности, позволяющего задавать постоянную скорость движения траверсы от $1,7 \cdot 10^{-11}$ до 0,2 м/с. Испытания на простой сдвиг проводили на этой же установке с использованием модуля кручения (максимальный крутящий момент 200 Н · м). Часть образцов испытывали с использованием конвекционной климатической камеры W91255 (диапазон температур от –80 до 120 °С, колебания целевой температуры ± 1 °С) и системы визуального стереофото фиксирования полей деформаций Vic-3D. Система Vic-3D предназначена для измерения полей деформаций и перемещений на поверхности объектов методом численной корреляции цифровых изображений [8]. База измерений варьируется от 10^{-5} до 1 м².

Схема испытываемого образца представлена на (рис. 1, а): $L_0 = 36,00 \cdot 10^{-3}$ м; $d = 14,69 \cdot 10^{-3}$ м; $H = 63,00 \cdot 10^{-3}$ м; $h = 13,50 \cdot 10^{-3}$ м; $D = D_1 = 32,80 \cdot 10^{-3}$ м; $p = 2,50 \cdot 10^{-3}$ м. Деформирование таких образцов проводили до больших степеней растяжения и сжатия (рис. 1, б, в); при сжатии происходила осевая потеря устойчивости. Для описания поведения материала использовались модели Муни – Ривлина и Генки. Удлинения образцов определяли при помощи системы Vic-3D с погрешностью измерения 0,05 %.

Определение параметров модели Генки. Модель Генки основана на использовании логарифмических деформаций и потенциала Генки [7].

В случае модели Генки из одноосных экспериментов определяли ненулевую компоненту тензора Нолла в главных осях правого тензора логарифмической деформации:

$$\bar{\epsilon} = J\sigma,$$

где $J = \lambda_r \lambda_\theta \lambda_z$; $\sigma = P/S$, $S = \pi R^2 = \pi(R_0 \lambda_r)^2$, $\lambda_r = R/R_0 = u_r/R_0 + 1 = \lambda_\theta$, $\lambda_z = l/l_0 = u_z/l_0 + 1$.

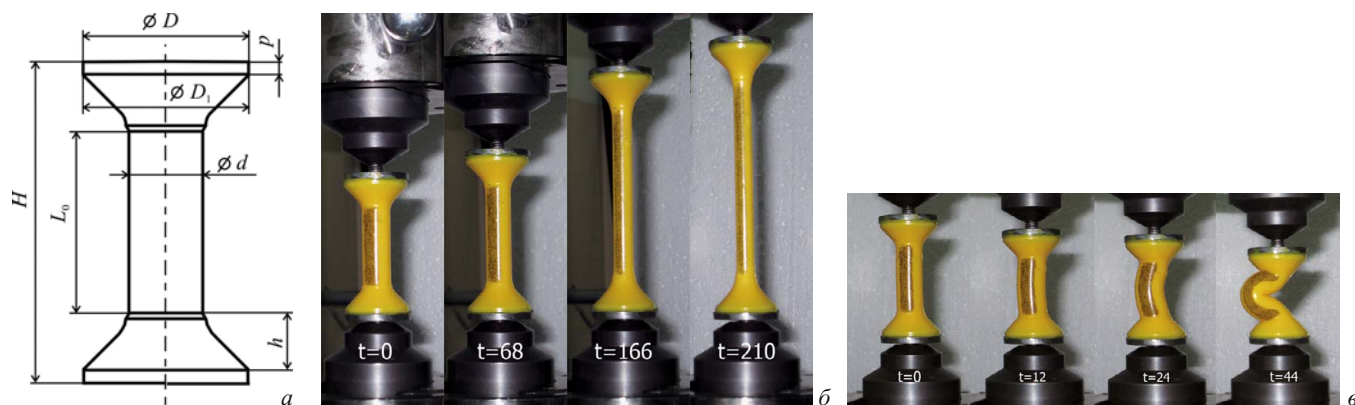


Рис. 1. Схема образца (а) и фрагменты образцов после одноосных испытаний на растяжение (б) и сжатие (в): t — значение времени после начала деформирования в секундах; скорость перемещения верхнего захвата — 25 мм/мин

Здесь P — приложенная сила; R_0 , l_0 и R , l — начальное и текущее значения радиуса и длины рабочей части; u_r и u_z — изменение линейных размеров образца вдоль радиуса и длины соответственно.

В одноосном случае связь компонент тензоров Нолла $\bar{\epsilon}$ и первого тензора Пиолы – Кирхгофа σ_0 (инженерное напряжение) выглядит следующим образом:

$$\bar{\epsilon} = \lambda_z \sigma_0, \text{ где } \sigma_0 = F/S_0, S_0 = \pi R_0^2.$$

Коэффициент Пуассона выражается через кратности удлинений по формуле

$$\nu = - \frac{\ln \lambda_r}{\ln \lambda_z}.$$

Модуль Юнга E находили из наклона прямолинейного участка кривой $(\bar{\epsilon}, \ln \lambda_z)$ методом наименьших квадратов, достоверность определяли по коэффициенту детерминации R^2 .

Определение параметров модели материала Муни – Ривлина из экспериментальных данных. Использовали двухконстантную модель Муни – Ривлина в предположении несжимаемости материала:

$$\lambda_r \lambda_\theta \lambda_z = 1.$$

В этом случае $\bar{\epsilon} = \sigma = \lambda_z \sigma_0 = \lambda_z F/S_0$, $\lambda_r = \lambda_\theta = \sqrt{1/\lambda_z}$, $\lambda_z = \lambda$. Константы C_1 и C_2 определяли из условия минимума функции

$$F = \sum_{j=1}^m [\sigma(\lambda_j^{\text{exp}}) - \sigma(\lambda_j^{\text{theor}})]^2,$$

где $\sigma(\lambda_j^{\text{exp}})$ — значение σ из эксперимента в j -й точке экспериментальной диаграммы; $\sigma(\lambda_j^{\text{theor}})$ — значение, полученное по формуле

$$\sigma = 2C_1 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) + 2C_2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

для соответствующего λ_j .

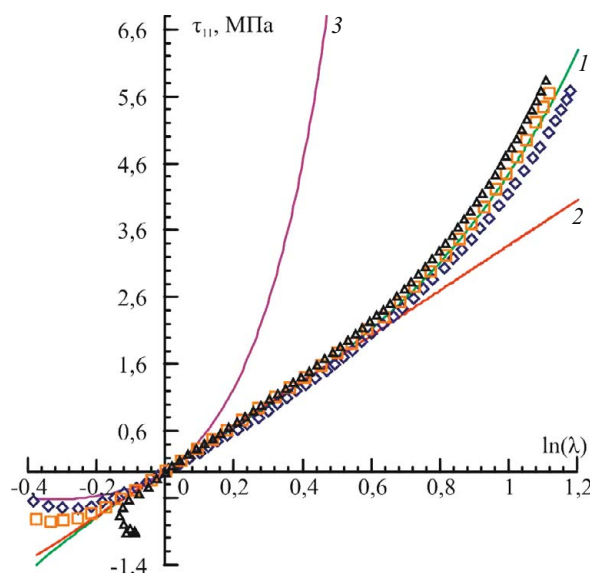


Рис. 2. Диаграммы одноосного деформирования образцов из дуотана, полученные путем обработки экспериментальных данных в рамках моделей материала Муни – Ривлина (1), Генки (2), Кирхгофа – Сен-Венана (3); значки $\triangle$, $\square$, $\diamond$ — экспериментальные данные

Результаты испытаний приведены на рис. 2, а значения параметров моделей — в таблице. Из экспериментов по одноосному деформированию получены параметры и определены границы применимости указанных моделей для материала Дуотан QA965. Для модели Генки $\tilde{\lambda} \in (0,75; 1,50)$, для модели Муни – Ривлина $\tilde{\lambda} \in (0,75; 2,80)$, для модели Кирхгофа – Сен-Венана $\tilde{\lambda} \in (0,90; 1,05)$; здесь $\tilde{\lambda} = l/l_0$ кратность осевого удлинения.

Испытания при различных температурах. Серию образцов подвергали одноосному испытанию при пониженных температурах. Эксперименты проводили в климатической камере, в качестве хладагента использовали жидкий азот. Температуру внутри камеры регулировали и измеряли посредством штатного датчика климатической камеры euroterm.

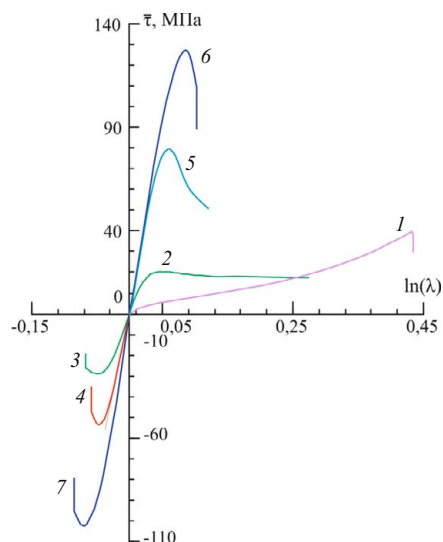


Рис. 3. Результаты обработки данных экспериментов одноосного деформирования образцов при пониженных температурах: 1 и 2 — растяжение при T , равной -30 и -35 °C; 3 и 4 — сжатие при T , равной -35 и -40 °C; 5 и 6 — растяжение при T , равной -68 и -80 °C; 7 — сжатие при $T = -80$ °C

На рис. 3 представлены обработанные данные экспериментов по растяжению и сжатию образцов из дуотана при пониженных температурах. Пересчет экспериментальных данных в соответствующие величины на диаграммах проводили с учетом гипотезы о несжимаемости материала. Поскольку испытания в климатической камере проводили без применения Vic-3D, то перемещение при деформировании замеряли по traversе. Относительную осевую кратность удлинения вычисляли по формуле $\tilde{\lambda} = u_z/l_0 + 1$, где при комнатной температуре l_0 равно 52 и 45 мм для испытаний по сжатию и растяжению дуотана. Такие значения l_0 получены из конечноэлементного моделирования растяжения и сжатия образцов с указанными выше размерами (см. рис. 1, а) из соображений линейности участка образующей боковой поверхности образца при том или ином виде нагружения. Пересчет радиуса образца R_0 и длины l_0 для каждой температуры проводили по формуле

$$Z_0(T) = [\alpha(T - T_0) + 1]Z_0(T_0),$$

где $Z_0(T_0)$ — значение линейного размера при температуре $T = 23$ °C; α — коэффициент линейного теплового расширения материала, который в данной работе

Значение констант моделей материала Генки и Муни – Ривлина для разных партий образцов при $T = 23$ °C

Номер партии	Модель Генки		Модель Муни – Ривлина	
	E , МПа	ν	C_1 , МПа	C_2 , МПа
1	5,157	0,485	0,331	0,443
2	3,373	0,445	0,182	0,365
3	5,827	0,473	0,321	0,595

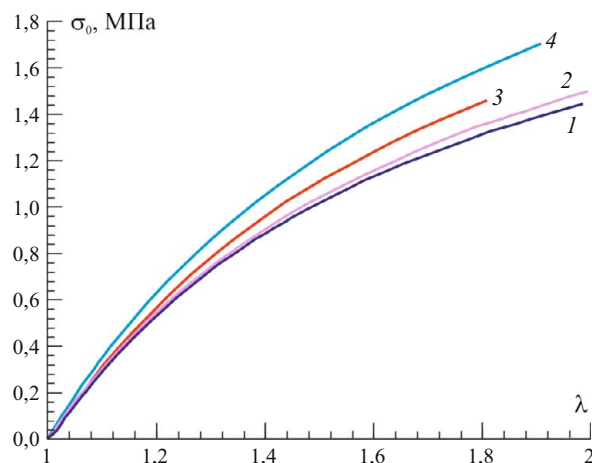


Рис. 4. Диаграммы растяжения образцов при температурах T , равных 23 (1), 40 (2), 60 (3) и 80 °C (4)

по результатам измерений диаметров и высот трех различных образцов (см. рис. 1) при температурах T , равных 23, 60, 80, 100 °C, был принят равным $1,49 \cdot 10^{-4}$ 1/°C.

На рис. 3 загибы графиков 3, 4, 7 в области сжатия связаны с геометрической потерей устойчивости образцов, а подобные загибы кривых 2, 5, 6 в области растяжения — с достижением предельного состояния материала, при котором у дуотанового образца начинается образование «шейки», подобно шейкам у металлических образцов при пластическом деформировании. Из графиков видно, что с уменьшением температуры при переходе $T = -30$ °C происходит существенное повышение модуля упругости материала.

В данные обработки экспериментов по деформированию дуотана при отрицательных температурах внесена ошибка, поскольку удлинение или укорочение образца замеряли по перемещению traversы машины, однако эта ошибка невелика (порядка 1 %) в силу того, что даже при $T = -80$ °C дуотан испытывает развитые деформации (перемещение до шейкообразования при растяжении 4 мм на базе замеров 36 мм). Кроме того, учет жесткости машины показывает, что ошибка измерения перемещения не превышает 1 %.

На рис. 4 представлены диаграммы растяжения образцов при повышенных температурах. Видно, что с ростом температуры происходит незначительное повышение модуля упругости материала ($E = 5,36$ МПа при $T = 23$ °C и $E = 5,47$ МПа при $T = 80$ °C). На рис. 5 приведена качественная картина изменения модуля упругости как параметра модели материала Генки в зависимости от температуры испытания.

Моделирование осесимметричного деформирования демпфера. Демпфер — упругое шарнирное соединение безлюфтового типа, представляющее собой эластомерный буфер, помещенный между двумя цилиндрическими металлическими втулками и запрессованный или приклеенный к ним. Иногда роль внешней втулки стабилизатора играет крепежное отверстие

одной из соединяемых деталей (обычно рычага). Такие мягкие буферы смягчают удары по кузову и гасят высокочастотные колебания подвески, неизбежные при движении автомобиля. На них приходится большая часть ударных нагрузок, получаемых подвеской. Демпферы сопротивляются значительному деформированию одновременно в различных плоскостях и направлениях, обеспечивая не только угловую, но также радиальную и осевую податливость.

Металлические части демпфера рассматриваются как абсолютно жесткие тела и их влияние на полимерный блок моделируется жестким закреплением внешней границы блока и склейкой внутренней втулки с материалом. К внутренней втулке вдоль оси прикладывали нагрузку путем перемещения траверсы. Это перемещение задается в качестве граничного условия, т.е. нагружение блока моделируется путем вдавливания втулки в направлении оси симметрии. На рис. 5, а приведено типичное расположение демпферов в узлах рычагов подвески автомобиля, а на рис. 5, б представлена схема нагружения модельного демпфера со следующими линейными размерами: $r_1 = 25 \cdot 10^{-3}$ м; $r_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м; $h = 20 \cdot 10^{-3}$ м. Цилиндрическая поверхность тела с радиусом r_1 фиксируется в пространстве, к поверхности радиусом r_2 приклеивается жесткая втулка, которая перемещается посредством траверсы с постоянной скоростью.

Аналитическое решение этой задачи приведено в работе [9]. Пусть точки тела перемещаются по следующему закону в декартовых координатах:

$$y_1 = \zeta x_1, y_2 = \zeta x_2, y_3 = x_3 / \zeta^2 + f(\zeta x_1, \zeta x_2),$$

где ζ — константа; f — функция своих аргументов. Рассматриваются такие деформации изотропного материала, при которых точки недеформированного тела перемещаются параллельно x_3 на расстояние, зависящее только от их положения в плоскости x_1, x_2 . Эта задача включает в качестве частных случаев задачи простого сдвига и сдвига цилиндрических колец. Выбираем подвижную систему координат, совпадающую с прямоугольной декартовой y_i . Инварианты для этого типа деформаций запишутся в виде

$$I_1 = 2\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^4} + \zeta^2 I, I_2 = \frac{2}{\zeta^2} + \zeta^4 + \zeta^4 I,$$

где $I = (\partial f / \partial y_1)^2 + (\partial f / \partial y_2)^2$. В этом случае функция энергии деформации W зависит от одной переменной I . Значения компонент напряжений примут следующий вид:

$$\sigma_{11} = \zeta^4 \left(\frac{\partial f}{\partial y_2} \right)^2 \psi + p, \sigma_{22} = 2\zeta^4 \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \right)^2 \frac{\partial W}{\partial I} + p,$$

$$\sigma_{33} = 2 \left[I - \left(1 - \frac{1}{\zeta^6} \right) \right] \frac{dW}{dI} + p,$$

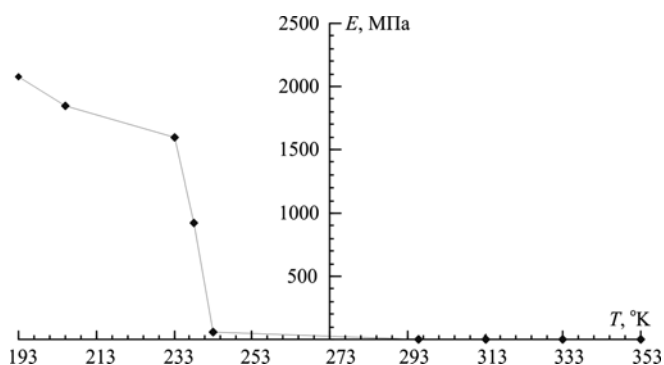


Рис. 5. Зависимость модуля упругости от температуры испытания

$$\sigma_{12} = -\zeta^4 \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial f}{\partial y_2}, \sigma_{13} = 2 \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{dW}{dI}, \sigma_{23} = 2 \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{dW}{dI}.$$

Пусть функция перемещения f имеет постоянные значения на замкнутых цилиндрических поверхностях, одна из которых полностью содержит другую внутри себя, и образующие их параллельны x_3 . Примем $\zeta = 1, f = 0$ при $r = r_1$ и $f = K$ при $r = r_2$. Для цилиндрической системы координат в случае модели Муни – Ривлина напряжения составят:

$$\sigma_{rr} = -C_2 \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + q, \sigma_{\theta\theta} = C_2 \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + q,$$

$$\sigma_{33} = (2C_1 + C_2) \left(\frac{df}{dr} \right)^2 + q - D,$$

$$\sigma_{r3} = 2(C_1 + C_2) \frac{df}{dr}, \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta 3} = 0,$$

где $q = 8A [C_2 f - (C_1 + C_2)y_3 + B]$, $D = 0$.

В рассматриваемой области функция

$$f = Ar_2 + 2b \ln(r) + 2c,$$

где

$$b = \frac{K - A(r_1^2 - r_2^2)}{2 \ln(r_1 / r_2)}, c = \frac{A(r_1^2 \ln r_2 - r_2^2 \ln r_1) - K \ln r_2}{2 \ln(r_1 / r_2)}.$$

В случае $A = 0$ функция

$$f = 2b \ln \frac{r}{r_2},$$

$$\text{где } b = \frac{K}{2 \ln(r_1 / r_2)}, c = -b \ln(2r_2).$$

Результирующая продольная сила на единицу длины деформированной поверхности, действующая параллельно оси x_3 , равна

$$F = \int_0^{2\pi} [\sigma_{r3} r]_{r=r_1} d\theta = 2\pi r_1 [\sigma_r^3]_{r=r_1}.$$

В эксперименте постоянная скорость перемещения втулки обеспечивается движением наковальни испытательной машины. Проводили замеры перемещения $u = u(t)$ и осевого усилия $F = F(t)$. На рис. 6, а приведены экспериментальные данные циклического осесимметричного деформирования модельного демпфера путем перемещения втулки вдоль оси на $30 \cdot 10^{-3}$ м при комнатной (линия 1 — $T = 23^\circ\text{C}$) и по-

ниженных (линия 2 — $T = -25^\circ\text{C}$, линия 3 — $T = -30^\circ\text{C}$) температурах. На рис. 6, б представлены результаты деформирования модельного демпфера при комнатной температуре (точки), а также данные КЭ расчетов с константами материалов партий 2 (кривая 1) и 3 (кривые 2, 4) и аналитического решения (кривая 3) для партии 2. На рис. 6, в показано изменение положения точек свободной поверхности в зависимости от перемещения втулки. Отметим, что подобная форма внешней поверхности наблюдается в эксперименте.

Численные расчеты деформирования демпфера по модели Генки показали, что при достижении максимума по силе конечные элементы, примыкающие к втулке, начинают испытывать большие растяжения, происходит локализация деформаций в этих элементах и

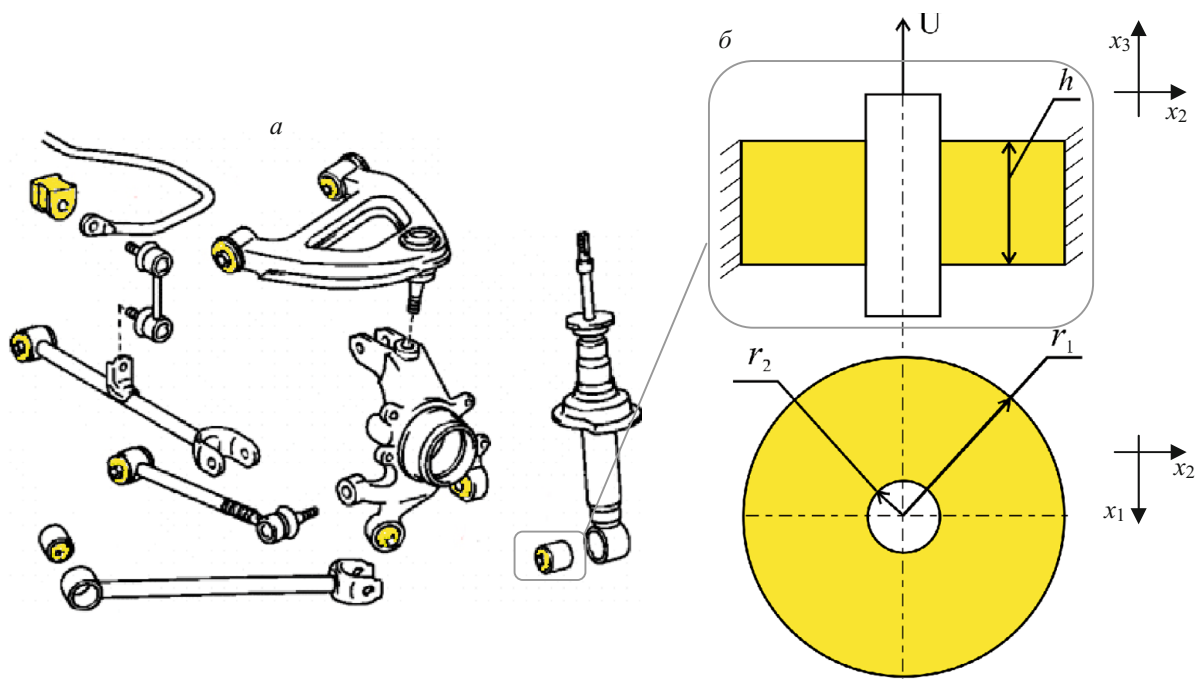


Рис. 6. Расположение демпферов в узлах подвески автомобиля (а) и осесимметричная схема нагружения демпфера (б)

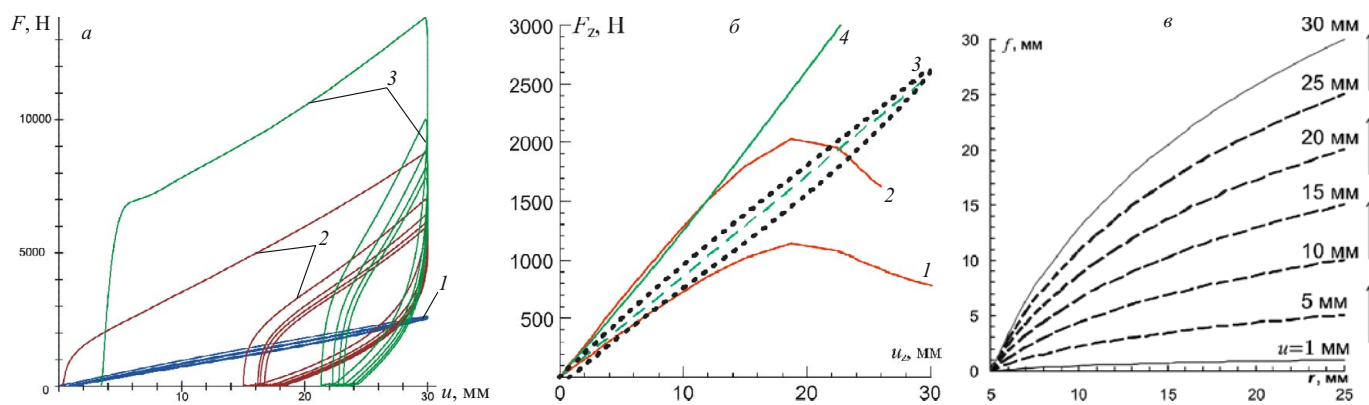


Рис. 7. Экспериментальные данные и аналитические зависимости осесимметричного деформирования модельного демпфера: а — результаты экспериментов по циклическому перемещению втулки вдоль оси при температурах, равных 23°C (1), -25°C (2), -30°C (3); б — расчетные (кривые 1, 2, 4), теоретические (кривая 3) и экспериментальные (точки) кривые нагружения; в — перемещение точек свободной поверхности при деформировании (аналитическое решение А. Грина при $A = 0$)

картина деформирования не согласуется с наблюдаемой в эксперименте.

Результаты расчетов по модели Муни – Ривлина оказались близки к экспериментальным.

Полученные данные деформирования демпферов из дуотана при пониженных температурах необходимы для моделирования поведения сайлентблоков, виброгасителей, манжет в зимнее время и проектировки виброгасителей в условиях эксплуатации Крайнего Севера.

Для дальнейшего моделирования поведения демпфера при неосесимметричном перемещении и кручении втулки в азимутном направлении наиболее подходящей является модель материала Муни – Ривлина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамов А. А., Матвеев В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. Методы прикладной вязкоупругости. — Екатеринбург: УрО РАН, 2003. — 411 с.
2. Пелевин А. Г., Свистков А. Л., Адамов А. А., Lauke B., Heinrich G. Алгоритм поиска констант в модели механического поведения резины / Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16. № 3. С. 313 – 328. № 4. С. 597 – 611.
3. Малкин А. Я., Исаев А. И. Реология концепции методы и приложения / Пер. с англ. — СПб.: Профессия, 2007. — 560 с.
4. Роговой А. А. Конечные деформации в материалах со структурными изменениями / Физико-химическая кинетика в газовой динамике. URL: www.chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-021.pdf.
5. Коробейников С. Н. Применение собственных проекций симметричных тензоров к определению коротационных производных и интегралов / Успехи механики сплошных сред (к 70-летию академика В. А. Левина): сб. науч. тр. — Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 352 – 367.
6. Коробейников С. Н., Олейников А. А. Лагранжева формулировка определяющих соотношений гиперупругого материала Генки / Дальневосточный математический журнал. 2011. Т. 11. № 2. С. 155 – 180.
7. Коробейников С. Н., Олейников А. А., Ларичкин А. Ю., Бабичев А. В., Алехин В. В. Численная реализация лагранжевой формулировки определяющих соотношений изотропного гиперупругого материала Генки / Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13. № 2. С. 222 – 249.
8. Sutton M. A., Orteu J.-J. O., Schreier H. W. Image correlation for shape, motion and deformations measurements. — Columbia (USA) – Albi (France): Springer Science+Business Media, LLC, 2009. — 321 p.
9. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругопластические деформации и нелинейная механика сплошной среды. — М.: Мир, 1965. — 456 с.

REFERENCES

1. Adamov A. A., Matveenko V. P., Trufanov N. A., Shardakov I. N. Methods of applied viscoelasticity. — Yekaterinburg: Izd. UrO RAN, 2003. — 411 p. [in Russian].
2. Pelevin A. G., Svistkov A. L., Adamov A. A., Lauke B., Heinrich G. Rheology concept of methods and applications / Mekh. Kompozits. Mater. Konstr. 2010. Vol. 16. N 3. P. 313 – 328. N 4. P. 597 – 611 [in Russian].
3. Malkin A. Ya., Isaev A. I. Search algorithm constants in the model of mechanical behavior of rubber. — St. Petersburg: Professiya, 2007. — 560 p. [in Russian].
4. Rogovoi A. A. Finite strain in materials with structural changes / Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics. URL: www.chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-021.pdf [in Russian].
5. Korobeinikov S. N. Application of eigen-projections symmetric tensors to definition of corotation derivatives and integrals / Advances in the mechanics of continuous media (to the 70th anniversary of Academician V. A. Levin): a collection of scientific papers. — Vladivostok: Dal'nauka, 2009. P. 352 – 367 [in Russian].
6. Korobeinikov S. N., Oleinikov A. A. Lagrangian formulation of constitutive relations of hyperelastic Henky material / Far Eastern Math. J. 2011. Vol. 11. N 2. P. 155 – 180 [in Russian].
7. Korobeinikov S. N., Oleinikov A. A., Larichkin A. Yu., Babichev A. V., Alekhin V. V. Numerical implementation of Lagrangian formulation of defining relations of isotropic hyperelastic Henky material / Far Eastern Math. J. 2013. Vol. 13. N 2. P. 222 – 249.
8. Sutton M. A., Orteu J.-J. O., Schreier H. W. Image correlation for shape, motion and deformations measurements. — Columbia (USA) – Albi (France): Springer Science+Business Media, LLC, 2009. — 321 p.
9. Grin A., Adkins Dzh. Large elastoplastic deformation and nonlinear continuum mechanics. — Moscow: Mir, 1965. — 456 p. [in Russian].