

Математические методы исследования

УДК 519.25

К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК ПРИ СГЛАЖИВАНИИ ДАННЫХ

© В. Г. Зайцев¹*Статья поступила 21 октября 2016 г.*

Показано использование ядерных оценок при определении вероятностных плотностей и сглаживании последовательностей. В первом случае применяют условие равенства оценок нескольких центральных моментов выборки и моментов, найденных для ядерной оценки плотности распределения. При этом упрощается выбор показателя размытости. Дополнительно используют раздельную аппроксимацию ветвей оценки плотности. Для сглаживания последовательностей предложен метод модовой фильтрации. Определение сглаженного значения как аргумента, соответствующего максимуму оценки плотности распределения для локального участка последовательности, позволяет отслеживать резкие изменения среднего значения последовательности и отсеивать импульсные помехи.

Ключевые слова: ядерная оценка; оценивание вероятностной плотности; модовое сглаживание; импульсные помехи; скачкообразное изменение среднего значения.

Непараметрические ядерные оценки плотности — важный раздел нечисловой статистики. Методы использования этих оценок с анализом их эффективности уже подробно рассмотрены [1]. Известно, что для ядерного оценивания плотностей и регрессий с неизменным числом значений выборки уменьшению случайной ошибки при увеличении параметра локальности соответствует увеличение смещения оценок. Существующие методы сглаживания последовательностей со скачкообразным изменением среднего значения дают в районе скачка ошибки смещения. Устранение большого числа импульсных помех является проблематичным. Ниже приведены методы ядерного оценивания, практически устраняющие указанные недостатки.

Оценивание плотности

Рассмотрим две независимые случайные величины (с.в.) X и T с плотностями $p(x)$ и $K(t)$. Плотность суммы этих с.в.

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(y-t)p(t)dt. \quad (1)$$

Предположим, что имеется выборка случайной величины X : x_i , $i = 1, n$, с неизвестной плотностью, а плотность $K(t)$ известна. Определим оценку плот-

ности суммы с.в. X и T в виде ядерной оценки Розенблата – Парзена:

$$f_e(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(x-x_i). \quad (2)$$

Математическое ожидание оценки (2) совпадает с выражением (1).

Для определения оценки плотности с.в. X выражение (2) в приведенном виде не используют в связи с наличием смещения, зависящего от показателя растянутости плотности $K(t)$ [2]. Поэтому в формулу вводят показатель локальности (размытости), подбираемый в зависимости от объема выборки. Для уменьшения смещения также применяют аддитивную или мультипликативную корректировку оценок плотности за счет использования знакопеременных функций, а также комбинаций оценок с различными ядрами. Представим способ оценивания плотности, позволяющий существенно ослабить влияние параметра локальности на смещение оценки.

Поставим задачу определения оценки плотности с.в. X по полученной формуле (2) и с учетом известных параметров плотности $K(t)$. Очевидно, что при выполнении условий состоятельности для ядерной оценки плотности суммы с.в. (2) и выборочных моментов оценка плотности распределения выборки $p_e(x)$ также будет состоятельной. Повышение параметра размытости плотности $K(t)$ лишь излишне уве-

¹ Научно производственное предприятие геофизической аппаратуры «Луч», Новосибирск, Россия; e-mail: ost@looch.ru

личивает смещение оценки $p_e(x)$ в районе резких изменений плотности $p(x)$.

Предположим, что первые четыре момента с.в. X существуют. Обозначим среднее значение, среднеквадратическое отклонение (СКО), коэффициент асимметрии и эксцесс, а также их оценки для с.в. T, X и их суммы Y , а кроме того, оценки этих характеристик для с.в. X соответственно $m_T, \sigma_T, \gamma_T, E_T, m_X, \sigma_X, \gamma_X, E_X, m_Y, \sigma_Y, \gamma_Y, E_Y, m_{Xe}, \sigma_{Xe}, \gamma_{Xe}, E_{Xe}$. Для простоты положим $m_T = 0$.

Скорректируем оценку (2) с использованием условий равенства первых четырех моментов выборки и искомого распределения. Оценке $p_e(x)$ плотности $p(x)$ соответствует оценка среднего значения m_{Xe} . Математическому ожиданию оценки (2) в сравнении с истинной плотностью соответствует увеличенное значение дисперсии. Поэтому первая корректировка сводится к увеличению ординаты оценки (2) и, соответственно, сжатию плотности вдоль оси абсцисс в $c = \sqrt{1 + 1/u^2}$ раз, где $u = \sigma_{Xe}/\sigma_T$. Поэтому вместо аргумента x в $f_e(x)$ нужно использовать аргумент $y = x/c$.

Отметим, что аналогичные выводы можно сделать о текущем сглаживании путем осреднения гистограммной оценки плотности при одинаковом значении интервала сглаживания. Здесь сглаженная оценка соответствует сумме исходной с.в. и с.в., распределенной по равномерному закону с диапазоном, равным интервалу сглаживания Δx . Таким образом, дисперсию, соответствующую гистограмме или оценке плотности, полученной сглаживанием первичной оценки на этом интервале, необходимо уменьшить на $\Delta x^2/12$.

Рассмотрим корректировку асимметрии оценки (2). Третий центральный момент для плотности $f(y)$ с учетом $m_T = 0$ составляет

$$m_{3y} = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_x)^3 \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(y-t)p(t)dt \right] dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} [(y-t) + (t - m_x)]^3 \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(y-t)p(t)dt \right] dy = m_{3k} + m_{3x}.$$

Коэффициент асимметрии плотности $f(y)$ равен $\gamma_y = (m_{3k} + m_{3x})/(\sigma_T^2 + \sigma_X^2)^{1.5}$. Полагая, что $\gamma_y = \gamma_{Xe}$, $\sigma_X = \sigma_{Xe}$, найдем такое значение коэффициента асимметрии для плотности $K(t)$, чтобы оценка плотности (2) имела коэффициент асимметрии, найденный по выборке

$$\gamma_t = \gamma_{Xe}[(1 + u^2)^{1.5} - u^3].$$

В зависимости от оценки эксцесса выборки аналогично несложно получить эксцесс E_t плотности $K(t)$:

$$E_t = E_{Xe}(1 + 2u^2) + 3u^4 - 3.$$

Наиболее проста связь параметров четырехпараметрического распределения с моментами для семейства кривых Пирсона. Тип кривой определяется по критерию вида

$$k = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)},$$

где $\beta_1 = \gamma_t^2$; $\beta_2 = E_t + 3$.

Для определенности примем для плотности $K(t)$ первую разновидность первого типа кривой Пирсона со значением критерия $k < 0$:

$$K(t) = K_0(x - a_1)^q(a_2 - x)^g, \quad q > 0, \quad g > 0,$$

где K_0 — нормирующий множитель. Чаще всего параметры кривой определяют по формулам $q = (a + a_1)/[c_2(a_2 - a_1)]$, $g = (a + a_2)/[c_2(a_2 - a_1)]$, $a_1 = u_1$, $a_2 = -u_2$, u_1 и u_2 — корни уравнения $x^2 + (c_1/c_2)x + c_0/c_2 = 0$, $c_0 = \sigma_{Xe}^2 \frac{(4\beta_2 - 3\beta_1)}{A}$, $c_1 = a = \sigma_{Xe} \frac{\sqrt{\beta_1(\beta_2 + 3)}}{A}$, $c_2 = (2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)/A$, $A = 10\beta_2 - 12\beta_1 - 18$. Однако для рассматриваемой кривой существует ограниченная область существования в координатной плоскости коэффициента эксцесса и квадрата коэффициента асимметрии. Поэтому можно ограничиться равенством первых трех моментов, а коэффициент β_2 представлять как функцию коэффициента β_1 .

В качестве примера определим параметры кривой q, g, a_1, a_2 по оценкам моментов выборки с плотностью гамма-распределения $p(x) = (x - 20)^{\alpha-1} e^{-(x-20)/\beta} / [\beta^\alpha \Gamma(\alpha)]$, $x > 20$, с параметрами $\alpha = 4$, $\beta = 2$, которым соответствуют следующие значения квантилей для вероятностей P , равных 0,05; 0,10; 0,90; 0,95 и 0,99: $x_{0,05} = 20,71$; $x_{0,1} = 21,06$; $x_{0,9} = 27,78$; $x_{0,95} = 29,48$ и $x_{0,99} = 33,27$.

Моделировали 1000 выборок с.в. объемом $n = 50$ значений каждая. Зависимость коэффициентов β_2 и β_1 принимали в виде

$$\beta_2 = 1,575\beta_1 + 2,5.$$

Почти все квантили для вероятности $P = 0,99$ были меньше, чем теоретические. Несколько процентов выборок имели такие максимумы, что значения коэффициента β_1 превышали предельное для первой разновидности первого типа кривой Пирсона, равное 6,67. В этом случае выбирали $\beta_1 = 6,6$.

Для тех же исходных данных определяли ядерные оценки известным способом с выбором оптимального значения показателя размытости по формуле [2]

$$h_n = 1/n^{1/3}.$$

Вычисления проводили по выражению (2), в качестве ядра $K(x - x_i)$ использовали плотность нормального распределения, СКО которого для объема выборки 50 устанавливали равным $\sigma_k = h_n \sigma_{Xe} =$

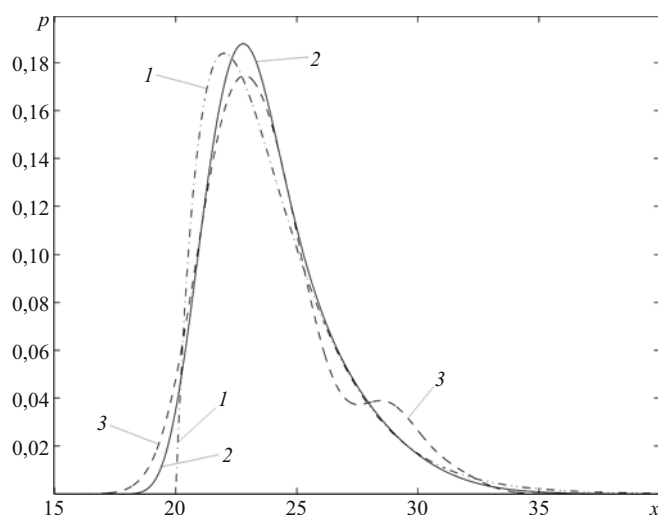


Рис. 1. Графики плотностей: 1 — теоретический (гамма-распределение); 2 — ядерная оценка с корректировкой моментов; 3 — ядерная оценка с выбором параметра локальности

$= 0,272\sigma_{xe}$. В табл. 1 приведены значения вторых моментов погрешностей определения квантилей для оценок плотности, определяемых этим способом и предложенным в данной работе. Если увеличивать показатель размытости, то для малых значений вероятности второй момент ошибки увеличится, а для больших P — уменьшится.

От отношения СКО u , которое при моделировании принимали равным 1–3, вторые моменты ошибок практически не зависели.

Если сделать предположение о принадлежности плотности всех полученных выборок к одной из кривых Пирсона, затем найти параметры этой кривой и посчитать для нее значения квантилей, то вторые моменты ошибок квантилей возрастут по сравнению с предложенным методом на десятки процентов (см. табл. 1).

На рис. 1 приведены графики плотностей: исходный $p(x)$, а также определенные для одной и той же выборки объемом 50 значений предложенным способом и ядерным оцениванием при оптимальном значении показателя размытости. В последнем случае большинство оценок плотностей имело две–три вершины. Если за счет увеличения показателя размытости приводить оценку к одновершинности, значения второго момента погрешности определения квантилей

для малых вероятностей возрастают на порядок (см. табл. 1).

Предложенный способ ядерного оценивания сходен с методом моментов, в котором вид плотности задан. Однако на практике этот вид часто сложно обосновать или выбрать.

Для распределений с тяжелыми хвостами выбросы значений выборки приводят к большому рассеянию коэффициента асимметрии и существенной потере эффективности предлагаемого метода. Однако можно обойтись и без определения оценки коэффициента асимметрии. Считается, что большинство используемых методов оценивания плотностей распределений, в том числе и ядерный, либо переглаживают плотность, либо показывают пики в хвостовой части (частях) [2]. В рамках предлагаемого подхода переглаживание оказывает гораздо меньшее влияние, более значима точность определения параметров выборки. Если предполагать отсутствие пиков в хвостовой части, то проблема пиков выборочной плотности легко решается ее аппроксимацией кривой заданного вида.

Определим оценку плотности в виде ядерной оценки (2) для различных значений параметра размытости (СКО плотности $K(t)$) $\sigma_i = (0,5 - 2,0)i\sigma_{xe}/n$, $i = 1, M$, где $M = 8 - 12$. Определим моду и максимум оценки плотности для каждой оценки, а затем по этим данным — теоретические зависимости моды и максимума от СКО σ_i или его квадрата с использованием, например, кубической параболы. После этого найдем теоретические моду и максимум для значения $\sigma_i = 0$. Аппроксимацию оценки плотности с $\sigma_{i1} = (0,5 \dots 2,0)\sigma_{xe}/n$ поочередно по обе стороны от моды проведем с использованием кривой $p_i = p_0 \exp[-a(x - Mo)^m]$, где p_0 , Mo — теоретические максимум и мода; a , m — параметры, определяемые по минимуму невязки между ветвями плотностей распределений p_i и f_e . После этого получим СКО σ_a для аппроксимированной оценки плотности, которая сжимается вдоль оси абсцисс в $c = (1 + 1/v^2)^{0.5}$ раз, где $v = \sigma_a/\sigma_i$, а затем нормируется.

Рассмотрим этот подход на примере определения плотности по выборке объемом $n = 50$ с логнормальным распределением. Так же, как и выше, находили вторые моменты ошибки определения квантилей для вероятностей P , равных 0,05; 0,10; 0,90; 0,95 и 0,99, для плотностей, полученных этим методом и ядерным оцениванием с параметром локальности $\sigma_{\lambda} = 0,44\sigma_{xe}$ и

Таблица 1. Вторые моменты ошибок определения квантилей

Вид оценивания	P				
	0,05	0,10	0,90	0,95	0,99
С корректировкой моментов	0,15	0,17	0,76	1,45	4,56
С оптимальным значением показателя размытости 0,272	0,14	0,07	1,27	2,30	9,33
Со значением показателя размытости 0,44	0,62	0,56	1,26	2,12	7,53
Приведение оценки к одновершинности	1,37	0,60	1,25	2,11	7,10
Кривая Пирсона	0,46	0,77	3,22	3,31	11,49

использованием плотности нормального распределения в качестве ядра $K(x - x_i)$. Значения квантилей для заданных вероятностей составили: $x_{0,05} = 0,32$; $x_{0,95} = 0,46$; $x_{0,05} = 5,94$; $x_{0,95} = 8,54$ и $x_{0,99} = 16,88$. В табл. 2 приведены значения вторых моментов погрешностей определения квантилей для оценок плотности, определяемых указанными способами для 300 выборок.

На рис. 2 приведены графики плотностей: исходный $p(x)$, а также определенные для одной и той же выборки объемом 50 значений предложенным способом и ядерным оцениванием при оптимальном значении параметра локальности.

При малом объеме выборки непрерывно распределенной величины этот объем можно искусственно увеличить, для чего вместо каждого значения выборки следует получить его суммы с каждым значением выборки, после чего оставить только несовпадающие значения. Вместо n значений получим $0,5(n^2 + n)$ несовпадающих значений.

Среднее значение и дисперсия новой выборки увеличатся вдвое, а коэффициент асимметрии уменьшится в $\sqrt{2}$ раз. После ядерного оценивания по формуле (2) среднее значение полученной оценки плотности нужно уменьшить вдвое. Чтобы оценке распределения соответствовала дисперсия σ_{xe}^2 , ординату оценки (2) следует увеличить и, соответственно, сжать вдоль оси абсцисс в $d = (2 + 1/u^2)^{0,5}$ раз, где $u = \sigma_{xe}/\sigma_r$. Так что вместо аргумента x в $f_e(x)$ нужно использовать аргумент $y = x/d$.

Корректировку по асимметрии можно обеспечить сжатием или растяжением оси абсцисс одной из ветвей относительно моды. После этого полученную кривую необходимо отнормировать и еще раз откорректировать среднее значение и дисперсию.

Ядерным оценкам плотности с конечной областью определения, особенно при использовании весовых функций на неограниченном интервале, присущ следующий недостаток: искажение плотности в точках, близких к граничным. Для устранения этого недостатка либо используют оценки проекционного типа, либо применяют в предполагаемой области определения плотности переменный параметр локальности [1]. Уменьшить указанный недостаток в предлагаемом способе можно повторным использованием формулы (2) к исходным данным, но в качестве весовой функции можно брать повторно скорректированную по моментам оценку $p_e(x)$, полученную на предыдущем этапе.

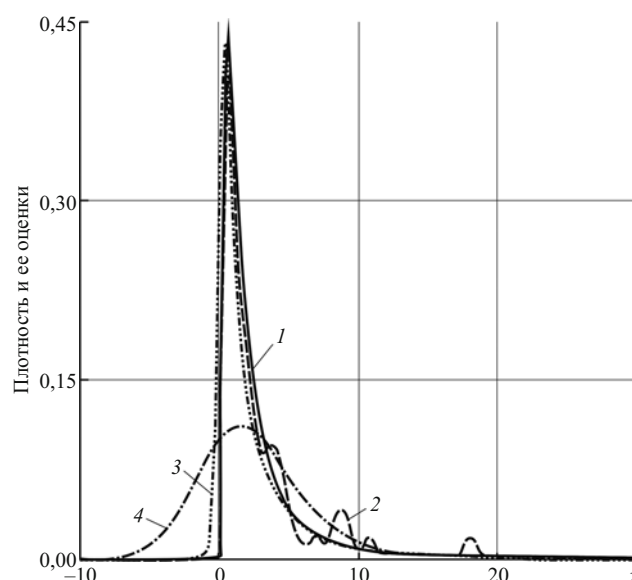


Рис. 2. Распределение теоретической плотности и ее оценок: 1 — теоретическая кривая; 2 — ядерная оценка плотности с малым значением параметра локальности; 3 — аппроксимированная ядерная оценка; 4 — ядерная оценка при оптимальном значении параметра локальности

Модовое сглаживание последовательности

Рассмотрим использование ядерных оценок для сглаживания случайной последовательности (с.п.), у которой регулярная составляющая может скачкообразно меняться. Для простоты положим однократное изменение среднего значения с.п. и одномодальность плотности $p(x)$. Оцениваемая по (1) плотность для участка с.п. с изменением среднего значения будет оценкой смеси двух плотностей. При симметричности функции $K(x - x_i)$ и плотности $p(x)$ максимумы выражения (2), определенного для последовательно расположенных участков с.п., точнее отслеживают среднее значение с.п., чем оценки среднего значения или медианы смеси распределений. Момент скачка среднего значения свяжем с переходом абсолютного максимума оценки (2) с одной вершины на другую при последовательном оценивании этой плотности для сдвинутых относительно друг друга участков последовательности. Определим алгоритм сглаживания формально, не задавая вида изменения среднего.

Пусть с.п. $x_i = m_i + z_i$, $i = \overline{1, n}$, где z_i и m_i — случайная с нулевым средним и регулярная составляющие с.п. x_i . Сглаженное значение $x_{ej} \approx m_j$ для j -го участка с.п. длиной $2\Delta n + 1$ будем считать соответствующим абсолютному максимуму функции

Таблица 2. Вторые моменты ошибок определения квантилей для выборки с логнормальным распределением

Вид оценивания	P				
	0,05	0,10	0,90	0,95	0,99
С корректировкой моментов и раздельной аппроксимацией ветвей	0,28	0,14	1,32	3,08	22,71
С оптимальным значением параметра локальности	18,29	10,26	11,64	16,50	44,40

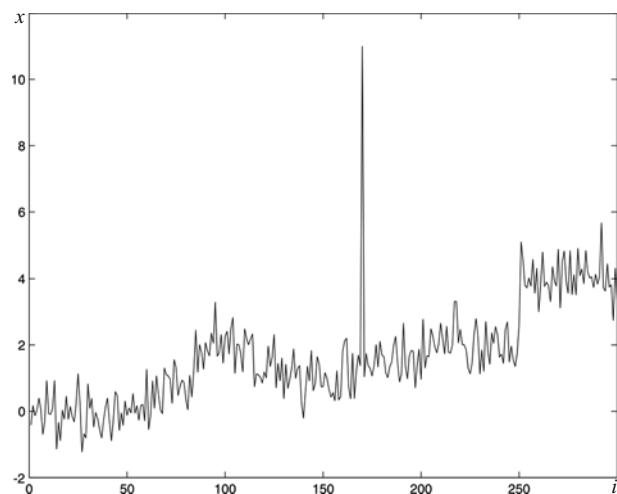


Рис. 3. Моделируемая последовательность

$$p_j(x) = \frac{1}{2\Delta n + 1} \sum_{i=j-\Delta n}^{j+\Delta n} K(x-x_i), \quad (3)$$

т.е. $x_{ej} = \arg \max p_j(\Delta n, x, \sigma)$, где $K(x-x_i)$ — весовая функция с параметром локальности σ .

Примем, что x_{ej} соответствует середине j -го интервала. После получения одного smoothed значения новый участок относительно предыдущего сдвигается на одно значение. Находим $(j+1)$ -е значение оценки:

$$p_{j+1}(x) = \frac{1}{2\Delta n + 1} [p_j(x)(2\Delta n + 1) + K(x-x_{j+1+\Delta n}) - K(x-x_{j-\Delta n})],$$

а затем $(j+1)$ -е значение максимума.

Чтобы получить число smoothed значений $n_e = n$, дополним с.п. x_i в начале и конце Δn нулевыми значениями, так что номера точек x_i , $i = -\Delta n, n + \Delta n$, и x_{ej} , $i = \overline{1, n}$, совпадут. Данный метод в связи с использованием моды на стационарном участке не чувствителен к импульсным помехам, ширина которых мала в сравнении с интервалом сглаживания $2\Delta n + 1$.

Рассмотрим использование подобного метода для с.п. с несимметричной плотностью $p(x)$ и однократным изменением среднего значения в точке $i = n_0 < n + \Delta n$. В этом случае вместо (3) удобнее использовать выражение

$$p_{Kj}(x) = \frac{1}{2\Delta n + 1} \sum_{i=j-\Delta n}^{j+\Delta n} K[x_i - (x-m)], \quad (4)$$

если среднее значение m для весовой функции не равно нулю. Формально выражение (4) соответствует разности с.в. X , представленной выборкой x_i , $i = -\Delta n, n + \Delta n$, и с.в. с нулевым математическим ожиданием, представленной генеральной совокупностью с плотностью $K(t)$. Математическое ожидание оценки

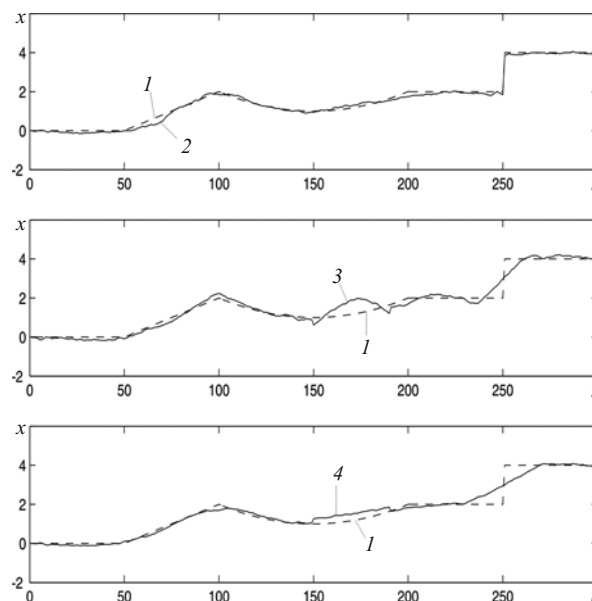


Рис. 4. Нестационарное среднее и smoothed значения: 1 — заданное среднее; 2 — модовое сглаживание; 3 — метод локальной аппроксимации; 4 — текущее осреднение

$$p_\Sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-x+m)p(t)dt.$$

При одинаковых плотностях $K(z)$ и $p(t)$ плотность $p_\Sigma(x)$ симметрична и максимум выражения (4) соответствует среднему значению с.в. с плотностью $p(t)$. Если заранее вид плотности $p_\Sigma(x)$ неизвестен, но предполагается асимметричным, вместо ядра $K(y)$ в (4) можно брать свертку с симметричной плотностью. В силу коммутативности операций сложения — вычитания максимуму такой оценки также будет соответствовать среднее значение с.п. на каждом участке.

Таким образом, при скачкообразном изменении среднего значения плотность $p_\Sigma(x)$ можно формально представить смесью двух симметричных распределений с различными весом и средним значением. Как и при сглаживании по (3) оценка (4) точнее выделяет резкие изменения среднего значения и не отслеживает импульсные помехи. Параметр локальности весовой функции и интервал сглаживания желательно выбирать совместно и в связи с предполагаемым характером изменения среднего значения. Чем больше его изменчивость, тем короче должен быть интервал и больше параметр локальности.

Пример. Моделировали последовательности длиной 350 значений с изменением среднего значения, одним выбросом и случайной нормально распределенной высокочастотной составляющей (рис. 3). Проводили сглаживание предложенным методом, методом локальной аппроксимации (МЛА) и обычным текущим осреднением (рис. 4). Для всех вариантов использовали одинаковый и постоянный по отсчетам последовательности интервал сглаживания, содержа-

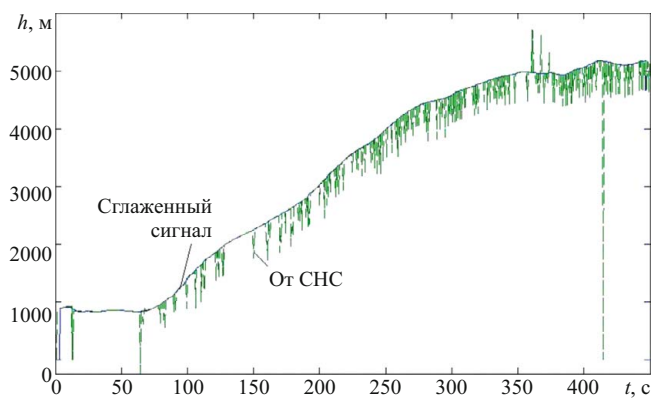


Рис. 5. Модовое сглаживание сигнала высоты от СНС

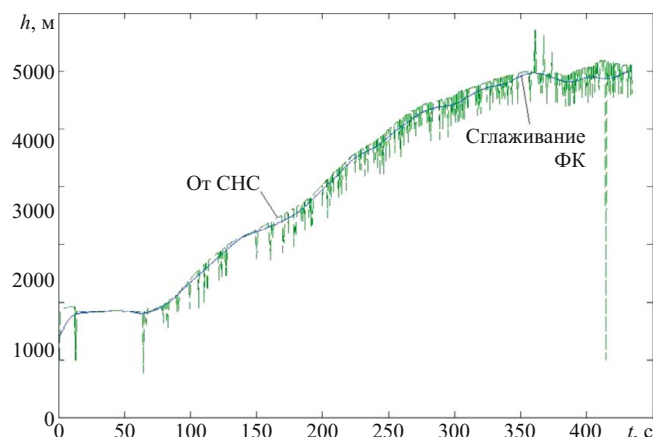


Рис. 6. Сглаживание сигнала высоты от СНС адаптивным фильтром Калмана

щий 41 значение. Для МЛИА в качестве линии регрессии использовали полином третьей степени.

Предложенный метод использовали при обработке бортовых сигналов на летательных аппаратах. Рассмотрим погрешности пилотажно-навигационного комплекса на базе спутниковой навигационной системы (СНС). Сигналы спутников испытывают влияние атмосферных изменений, электрических разрядов, которые вызывают искажения полезного сигнала или его потерю. Большие города создают сильную интерференцию сигнала. Возможны отказ одного или нескольких спутников, искажения сигналов из-за искусственных помех. Основные погрешности носят флуктуационный, квазистационарный характер. Распределение стационарной помехи близко к нормальному. К ней добавляются кратковременные скачкообразные изменения уровня (или исчезновение) сигнала, а также импульсные помехи.

Рассмотрим в качестве примера сглаживание сигналов от СНС, полученных в летном эксперименте на самолете Ту-134. Были выбраны записи с большим числом импульсных сбоев (рис. 5). В качестве функции влияния при вычислении по (4) использовали плотность нормального распределения, где параметр локальности σ определяли как среднееквадратическое отклонение (СКО) для первых 50 точек. Отметим, что влияние величины интервала предварительного сглаживания на результат основного сглаживания незначительно. В результате текущего модового сглаживания все импульсные помехи были устранены (см. рис. 5).

Для сравнения на рис. 6 представлены результаты сглаживания того же сигнала с помощью адаптивного фильтра Калмана, алгоритм которого реализован в программной среде Matlab. Параметры фильтра подбирали с учетом уже всей сглаживаемой последовательности из условия минимума максимального отклонения сглаженной последовательности от предполагаемых точных значений, которые легко определяются «на глаз». Это максимальное отклонение для высоты примерно равно 300 м.

Таким образом, уменьшить влияние показателя размытости на ошибку ядерного оценивания плотности распределения можно с использованием условия равенства оценок нескольких центральных моментов выборки и моментов, найденных для ядерной оценки плотности распределения. Для устранения ложных пиков оценки плотности предлагается использовать аппроксимацию этой оценки поочередно по обе стороны от моды, с последующим нормированием оценки. Для увеличения гладкости оценки плотности можно искусственно увеличить объем выборки, для чего вместо каждого значения следует получить его суммы с каждым значением выборки. Затем из набора объемом n^2 надо оставить только несовпадающие значения и далее их обрабатывать.

При наличии в сигналах импульсных помех, скачков текущего среднего предлагаемое модовое сглаживание в сравнении с известными методами имеет преимущество. Последнее может быть важным при решении задачи определения момента скачка среднего значения сигнала. Чем больше предполагаемая изменчивость среднего значения, тем короче должен быть интервал сглаживания и больше параметр размытости весовой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов А. И. Математические методы исследования и диагностика материалов (обобщающая статья) / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69. № 3. С. 53 – 65.
2. Маркович Н. М. Методы оценивания характеристик тяжелохвостовых случайных величин по конечным выборкам. [Электронный ресурс]: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. — М., 2004. Режим доступа: http://www.lib.ua_ru.net/diss/cont/58036.html (10.11.2013).

REFERENCES

1. Orlov A. I. Mathematical methods of research and diagnostics of materials (generalizing article) / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2003. Vol. 69. N 3. P. 53 – 65 [in Russian].
2. Markovich N. M. Methods for estimating the characteristics of heavy-tail random variables from finite samples. Doctoral Thesis. — Moscow, 2004. on-line: http://www.lib.ua_ru.net/diss/cont/58036.html (10.11.2013) [in Russian].