УДК 519.2:303.732.4

ОБ АЛГОРИТМАХ РАСЧЕТА МЕДИАНЫ КЕМЕНИ

© М. С. Жуков[1]

Статья поступила 9 декабря 2016 г.

Реализованы алгоритмы поиска медианы Кемени по методам Б. Г. Литвака, использованы некоторые подходы В. Н. Жихарева. Изучены результаты работы полученной экспертной системы на выборках случайных ответов экспертов. Исследована возможность добавления относительной авторитетности ранжировок экспертов. Компьютерное моделирование выполнено на языке Python. Сделаны выводы о применимости алгоритмов для получения прикладных результатов.

Ключевые слова: математика; экономика; управление; математическая статистика; прикладная статистика; статистика нечисловых данных; теория принятия решений; экспертные оценки; кластеризованные ранжировки; средние величины; медиана Кемени.

Экспертные процедуры применяют в таких областях [1 – 5], как технические исследования, менеджмент (особенно производственный), экономика, экология, социология, прогнозирование и т.д. Причем в основном используют те их разделы, что связаны с экспертными оценками [6].

При построении итогового мнения комиссии экспертов необходимо найти кластеризованную ранжировку, усредняющую ответы экспертов [7, 8]. Разработан ряд методов усреднения совокупности кластеризованных ранжировок, среди которых выделяется метод расчета медианы Кемени, основанный на использовании расстояния Кемени [9]. Вычислительные вопросы нахождения и исследования медианы Кемени имеют большое практическое значение.

Автором разработана и изучена экспертная система поиска медиан Кемени. В качестве основы расчетов использованы алгоритмы Б. Г. Литвака [10] и некоторые подходы В. Н. Жихарева [11]. Реализована возможность добавления авторитетности ранжировок экспертов. Компьютерная программа написана на языке Python.

Понятие кластеризованной ранжировки

Пусть имеется конечное число объектов, которые обозначим натуральными числами 1, 2, 3, ..., k и назовем «носителем». Под кластеризованной ранжировкой, определенной на заданном носителе, будем понимать следующую математическую конструкцию (специальный класс бинарных отношений [12]).

Пусть объекты разбиты на группы, которые назовем кластерами. В кластере может быть и один элемент. Входящие в один кластер объекты заключим в фигурные скобки. Например, объекты 1, 2, 3, ..., 10 могут быть разбиты на 7 кластеров: $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{8\}$, $\{9\}$, $\{10\}$. В этом разбиении один кластер ($\{5, 6, 7\}$) содержит три элемента, другой ($\{2, 3\}$) — два, остальные пять — по одному элементу. Кластеры не имеют общих элементов, а их объединение (как множеств) есть все рассматриваемое множество объектов.

Вторая составляющая кластеризованной ранжировки — это строгий линейный порядок между кластерами, т.е. задано, какой из них первый, какой второй и т.д. Будем изображать строгую упорядоченность с помощью знака <. При этом кластеры, состоящие из одного элемента, для простоты будем изображать без фигурных скобок. Тогда кластеризованную ранжировку на основе введенных выше кластеров можно представить следующим образом:

$$A = [1 < \{2, 3\} < 4 < \{5, 6, 7\} < 8 < 9 < 10].$$

Введенная описанным образом кластеризованная ранжировка является бинарным отношением на множестве $\{1, 2, 3, ..., 10\}$.

Каждую кластеризованную ранжировку, как и любое бинарное отношение, можно задать матрицей $\|x(a, b)\|$ из 0 и 1 порядка kxk. При этом $x(a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда $a < b$ либо $a = b$. В первом случае $x(b, a) = 0$, а во втором — $x(b, a) = 1$. При этом хотя бы одно из чисел — $x(a, b)$ или $x(b, a)$ — равно 1, причем $x(a, b) = x(b, a) = 1$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

Методы поиска медианы Кемени как итогового мнения комиссии экспертов. Назначение авторитетности экспертов

При построении итогового мнения комиссии экспертов необходимо найти кластеризованную ранжировку, усредняющую ответы экспертов. Разработан ряд методов усреднения совокупности кластеризованных ранжировок, среди которых выделяется метод

[1] МГТУ им Н. Э. Баумана, Москва, Россия;
e-mail: Mikhail.Zhukov@yahoo.ca

расчета медианы Кемени, основанный на использовании расстояния Кемени [9].

Расстоянием Кемени между бинарными отношениями A и B, описываемыми матрицами $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ соответственно, называется число

$$D(A,B)=\sum|a_{ij}-b_{ij}|,$$

где суммирование производится по всем i, j от 1 до k. Расстояние Кемени — это число несовпадающих элементов в матрицах $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$.

С помощью расстояния Кемени находят итоговое мнение комиссии экспертов. Пусть ответы экспертов n представлены как упорядочения (кластеризованные ранжировки) $A(1), A(2), ..., A(n)$ или как бинарные отношения других типов (отношения эквивалентности, толерантности и др.). Для их усреднения используют так называемую *медиану Кемени* $\arg\min\sum_{s=1}^{n}D(A_s, A)$. Медиану Кемени используют для описания усреднения [13 – 15] ответов экспертов, представленных в виде бинарных отношений из рассматриваемого класса бинарных отношений.

Для ответов экспертов, представляющих кластеризованные ранжировки, вычисление медианы Кемени является задачей целочисленного программирования. Для ее нахождения используют различные алгоритмы дискретной математики, в частности, основанные на методе ветвей и границ, на разных подходах кластерного анализа. В настоящее время неизвестно ни одного точного алгоритма поиска множества всех медиан Кемени для заданного множества перестановок (ранжировок без связей), кроме полного перебора. Однако существуют алгоритмы поиска части медиан, разработанные Б. Г. Литваком [10], В. Н. Жихаревым [11]. В качестве методов поиска медиан в экспертной системе выбраны: эвристический; точный алгоритмы (при свойстве Кондорсе), предложенные Б. Г. Литваком; циклический алгоритм по методу выделения псевдомедиан Жихарева. *Модифицированная медиана* Кемени находится согласно работе А. И. Орлова [16]. В этом случае подсчет итогового мнения комиссии экспертов выполняется только среди указанных экспертами ответов, т.е. ищется суммарное минимальное расстояние от каждого из экспертов до определяемой таким образом модифицированной медианы Кемени. Основные ограничения, определения и область применимости этих алгоритмов рассмотрены в [17].

Ниже приведено краткое описание алгоритмов поиска:

Эвристический алгоритм Литвака. Пусть ранжирования экспертов заданы матрицами бинарных отношений $\mathbf{P}_i$, содержащими элементы p_{ij}. Расстояние от произвольного ранжирования P до всех ранжирований $P_1, ..., P_m$ определяется как

$$\sum_{v=1}^{m}d(P,P_v)=\sum_{v=1}^{m}\sum_{i<j}|p_{ij}(v)-p_{ij}|=\sum_{v=1}^{m}\sum_{i<j}d_{ij}(P,P_v),$$

где

$$d_{ij}(P, P_v)=|p_{ij}(v)-p_{ij}|.$$

Используется матрица потерь с элементами

$$r_{ij}=\sum_{v=1}^{m}d_{ij}(P,P_v).$$

На первом этапе эвристического алгоритма последовательно находят минимумы каждой из n сумм:

$$S_1=\sum_{j}^{n}r_{1j},\ S_n=\sum_{j}^{n}r_{nj},$$

после чего соответствующую минимальной сумме $S_{\min}=\sum_{j}^{n}r_{\min j}$ альтернативу $a_{(\min)}$ ставят на первое место, вычеркивая ее из матрицы потерь. Далее аналогичные действия проводят с уменьшенной матрицей потерь до тех пор, пока не получится ранжировка: $a_{i_1}\ldots a_{i_k}$. На втором этапе для полученной ранжировки последовательно проверяют соотношения $r_{i_k i_{k+1}}\le r_{i_{k+1}i_k}$, $k = n - 1, ..., 1$. Как только для некоторого k они нарушаются, альтернативы a_{i_k} и $a_{i_{k+1}}$ меняют местами в новом ранжировании.

Для эвристического поиска не требуется условие выполнения свойства Кондорсе для ранжирований $P_1, ..., P_m$. Ограничением такого подхода является возможность вычисления лишь одной медианы Кемени приближенно: алгоритм позволит найти верхнюю границу $\arg\min\sum_{s=1}^{n}D(A_s, A)$ [17].

Точный алгоритм Литвака. В алгоритме, использующем метод ветвей и границ, предполагается последовательное фиксирование расположения части альтернатив (наилучших альтернатив Кондорсе и наименее предпочтительных альтернатив), определение верхней и нижней границ значений целевой функции на уменьшенном таким образом множестве ранжирований и отбрасывание заведомо бесперспективных при поиске медианы Кемени вариантов. Точный алгоритм Б. Г. Литвака описан, в частности, Д. А. Сумкиным (в коллективной монографии [18]). Для работы точного алгоритма требуется выполнение свойства Кондорсе для ранжирований $P_1, ..., P_m$. Ранжирование P обладает свойством Кондорсе, если любое подмножество альтернатив $a_1, ..., a_n$ обладает альтернативой Кондорсе. Пусть матрица потерь построена для единственного ранжирования P. Если в упорядочивании P

альтернатива a_i предпочтительнее альтернативы a_j, то $r_{ij} < r_{ji}$. Матрица потерь $r_{il} \le r_{li}$, когда $r_{ij} \le r_{ji}$ и $r_{jl} \le r_{lj}$, называется транзитивной. Матрица потерь может быть нетранзитивна в случае непоследовательности ответов экспертов при парных сравнениях. Пусть ранжирования $P_1, ..., P_m$ обладают альтернативой Кондорсе. Это означает, что матрица потерь содержит строку i_1 такую, что $r_{i_1 j} \le r_{j i_1}$, $j \in \{1, ..., n\}$. Благодаря свойству транзитивности (последовательности экспертов в своих выборах) после удаления некой альтернативы a_{i_1} альтернативой Кондорсе становится a_{i_2}.

Циклический поиск по методу псевдомедиан Жихарева [10]. Начинаем алгоритм с поиска модифицированной медианы [16] среди заданных исходных экспертных ответов. Далее следует цикл: проделываем все инверсии, т.е. рассматриваем окрестность единичного радиуса при использовании расстояния Кемени с центром в модифицированной медиане Кемени. Выбираем в этой окрестности ту точку, в которой используемая в определении медианы Кемени сумма минимальна. Эта точка в пространстве ранжировок будет являться псевдомедианой Кемени в указанном множестве.

Псевдомедианой совокупности E экспертных перестановок в множестве V называется перестановка $p_m(E, V)$, для которой сумма расстояний $D(x, E)$ до элементов совокупности E принимает минимальное значение среди всех перестановок x множества V. Переходим в эту точку. Повторяем цикл, выделяем новую окрестность единичного радиуса, пытаемся уменьшить суммарное расстояние. Если нельзя уменьшить сумму по сравнению с суммой на предыдущем шаге (для первого шага — модифицированной медианы), останавливаемся. Если минимум в окрестности достигается в нескольких точках, то далее случайным образом выбираем точку минимума для продолжения.

Одна из важных задач данной работы — исследование зависимости итогового решения комиссии от назначенной некоторыми способами «авторитетности» того или иного эксперта. Например, авторитетность каждого эксперта V может задаваться весовым коэффициентом-мультипликатором k_v таким образом, что расстояние от произвольного ранжирования P до всех ранжирований $P_1, ..., P_m$ вычисляют следующим образом:

$$\sum_{v=1}^{m} d(P, P_v) = \sum_{v=1}^{m} \sum_{i<j} k_v^* \, | p_{ji}^{(v)} - p_{ij} | = \sum_{v=1}^{m} \sum_{i<j} d_{ij}(P, P_v),$$

где $d_{ij}(P, P_v) = k_v^* \, | p_{ij}(v) - p_{ij} |$.

Интуитивно это означает, что чем больше значимость эксперта (больше коэффициент k_v), тем сильнее будет учитываться вклад разногласия с ним в матрице потерь, измеряемого расстоянием в матрице ранжировок.

Проведение экспериментов и результаты

При изучении экспертной системы проводят ряд численных экспериментов для сравнения найденных медиан. Исходные экспертные ранжировки взяты случайным путем и отличаются по суммарному расстоянию (мерой несогласованности) между ответами экспертов.

Эксперимент 1. В табл. 1 – 3 представлены исходные ответы экспертов. Они взяты случайным путем и отличаются мерой несогласованности (расстоянием между ними).

Матрица потерь:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Матрица расстояний:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Модифицированная медиана Кемени: [1, 2, 4, 3]. Для эвристического и точного алгоритмов Литвака медиана Кемени — [1, 2, 4, 3] и [1, 2, 4, 3] соответственно.

В табл. 2 представлены ответы экспертов с бóльшим разбросом.

Матрица потерь:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Таблица 1. Исходные ответы экспертов с минимальным разбросом

1-й эксперт	2-й эксперт	3-й эксперт	Расстояния
a_1	a_1	a_2	1 – 2 эксперты: 2
a_2	a_2	a_1	1 – 3 эксперты: 2
a_4	a_3	a_4	2 – 3 эксперты: 4
a_3	a_4	a_3	Сумма: 8

Таблица 2. Исходные ответы экспертов с разбросом в ответах, бóльшим, чем в табл. 1

1-й эксперт	2-й эксперт	3-й эксперт	Расстояние
a_1	a_4	a_4	1 – 2 эксперты: 8
a_2	a_2	a_1	1 – 3 эксперты: 4
a_4	a_3	a_2	2 – 3 эксперты: 4
a_3	a_1	a_3	Сумма: 16

Матрица расстояний:

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\8\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\0\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

Модифицированная медиана Кемени: [4, 1, 2, 3]. Для эвристического и точного алгоритмов Литвака медиана Кемени — [4, 1, 2, 3] и [4, 1, 2, 3] соответственно.

В табл. 3 приведены ответы экспертов с еще бóльшим разбросом.

Матрица потерь:

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\2\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\\0\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\\2\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

Матрица расстояний:

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\8\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\0\\10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\10\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

Модифицированная медиана Кемени: [1, 2, 4, 3]. Для эвристического и точного алгоритмов Литвака медиана Кемени — [1, 4, 2, 3] и [1, 4, 2, 3] соответственно; для циклического поиска по методу псевдомедиан Жихарева — [1, 4, 2, 3].

Расстояние от модифицированной до точной медианы Кемени: 1 – 1:2.

Эксперимент 2. Увеличим количество экспертов и объектов ранжирования (табл. 4).

Матрица потерь:

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\0\\2\\0\\8\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\6\\0\\2\\8\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\8\\6\\0\\8\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\8\\8\\6\\8\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

Матрица расстояний:

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\2\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\4\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\0\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\6\\6\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

Модифицированная медиана Кемени: [1, 5, 2, 3, 4, 6]. Для эвристического и точного алгоритмов Литвака медиана Кемени — [1, 5, 2, 3, 4, 6] и [1, 5, 2, 3, 4, 6] соответственно; при циклическом поиске по методу псевдомедиан Кемени — [1, 5, 2, 3, 4, 6].

Таблица 3. Исходные ответы экспертов с разбросом в ответах, бóльшим, чем в табл. 1 и 2

1-й эксперт	2-й эксперт	3-й эксперт	Расстояния
a_1	a_4	a_1	1 – 2 эксперты: 8
a_2	a_2	a_3	1 – 3 эксперты: 6
a_4	a_3	a_4	2 – 3 эксперты: 10
a_3	a_1	a_2	Сумма: 24

Таблица 4. Исходные ответы экспертов при большем числе объектов ранжирования

1-й эксперт	2-й эксперт	3-й эксперт	4-й эксперт	Расстояния
a_1	a_1	a_5	a_1	1 – 2 эксперты: 2
a_5	a_5	a_1	a_5	1 – 3 эксперты: 2
a_2	a_2	a_2	a_3	1 – 4 эксперты: 4
a_3	a_4	a_3	a_2	2 – 3 эксперты: 4
a_4	a_3	a_4	a_6	2 – 4 эксперты: 6
a_6	a_6	a_6	a_4	Сумма: 18

Таблица 5. Зависимость коллективного ответа от авторитетности 2-го эксперта

Авторитетность k_v	1	2	4
Медиана Кемени	[1, 5, 2, 3, 4, 6]	[1, 5, 2, 3, 4, 6]	[1, 5, 2, 4, 3, 6] — совпадает с ответом 2-го эксперта

Таблица 6. Зависимость коллективного ответа от авторитетности 3-го эксперта

Авторитетность k_v	1	2	3
Медиана Кемени	[1, 5, 2, 3, 4, 6]	[1, 5, 2, 3, 4, 6]	[5, 1, 2, 3, 4, 6] — совпадает с ответом 3-го эксперта

Таблица 7. Зависимость коллективного ответа от авторитетности 4-го эксперта

Авторитетность k_v	1	2	3	4
Медиана Кемени	[1, 5, 2, 3, 4, 6]	[1, 5, 2, 3, 4, 6]	[1, 5, 2, 3, 6, 4]	[1, 5, 3, 2, 6, 4] — совпадает с ответом 4-го эксперта

Исследуем, как изменяется коллективное мнение экспертов (рассчитываемое по методу медианы Кемени) в зависимости от увеличения относительной авторитетности (k_v) каждого из экспертов по отдельности ($v = 2, 3, 4, ..., N$). Авторитетность остальных экспертов фиксируем равной единице (табл. 5 – 7).

Далее рассмотрим более рассогласованный пример с бóльшим числом ответов и экспертов (табл. 8).

Матрица потерь:

$$\left[\begin{bmatrix}0\\6\\4\\2\\4\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\4\\2\\6\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\\0\\2\\4\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\6\\6\\0\\8\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\\4\\0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\6\\6\\4\\8\\0\end{bmatrix}\right].$$

Матрица расстояний:

$$\left[\begin{bmatrix}0\\12\\18\\12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\0\\14\\16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18\\14\\0\\18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\16\\18\\0\end{bmatrix}\right].$$

Таблица 8. Исходные ответы экспертов с разбросом в ответах большим, чем в табл. 4

1-й эксперт	2-й эксперт	3-й эксперт	4-й эксперт	Расстояния
a_1	a_3	a_3	a_5	1 – 2 эксперты: 12
a_5	a_2	a_5	a_2	1 – 3 эксперты: 18
a_2	a_1	a_4	a_6	1 – 4 эксперты: 12
a_3	a_5	a_6	a_1	2 – 3 эксперты: 14
a_4	a_6	a_2	a_4	2 – 4 эксперты: 16
a_6	a_4	a_1	a_3	Сумма: 72

При точном алгоритме Литвака медианы Кемени — [3, 5, 2, 6, 1, 4], [5, 2, 1, 3, 6, 4], [5, 2, 3, 1, 6, 4]; при эвристическом алгоритме Литвака — [5, 2, 3, 1, 6, 4]. Модифицированная медиана Кемени — [1, 5, 2, 3, 4, 6], [3, 2, 1, 5, 6, 4].

Расстояния от модифицированных медиан до точных медиан Кемени: 1 – 1:10; 1 – 2:4; 1 – 3:6; 2 – 1:4; 2 – 2:10; 2 – 3:8.

Циклический поиск по методу псевдомедиан Кемени: со стартом в ответе 1-го эксперта — [1, 5, 2, 3, 4, 6]; со стартом в ответе 2-го эксперта — [3, 2, 1, 5, 6, 4].

Исследуем, как изменяется коллективное мнение экспертов (рассчитываемое по методу медианы Кемени) в зависимости от увеличения относительной авторитетности k_v каждого из экспертов по отдельности ($v = 1, 2, 3, ..., N$). Авторитетность остальных экспертов фиксируем равной единице (табл. 9 – 12).

Разработанная экспертная система позволяет вычислять медианы Кемени, используя эвристический и точный алгоритмы Литвака, а также находить модифицированную медиану Кемени, осуществлять поиск медиан по методу Жихарева с циклическим использованием окружности единичного радиуса.

Можно сделать следующие выводы.

1. Для всех проведенных экспериментов множество медиан Кемени, найденное с помощью эвристического алгоритма Литвака, входит во множество медиан Кемени, определенное с помощью точного алгоритма.

2. Модифицированная медиана Кемени является хорошим приближением к медиане Кемени при относительно небольшой несогласованности ответов среди экспертов, мерой которой является расстояние Кемени. Отсюда можно заключить, что в повседневных задачах, где велика доля согласия между ранжировками экспертов (с точностью до перестановок отдельных

Таблица 9. Зависимость коллективного ответа от авторитетности 1-го эксперта для случая большего разброса ответов экспертов

Авторитетность k_v	1	2	3	10
Медиана Кемени	[5, 2, 3, 1, 6, 4]	[5, 2, 3, 1, 6, 4]	[5, 2, 3, 1, 6, 4]	[5, 2, 3, 1, 6, 4]

Таблица 10. Зависимость коллективного ответа от аторитетности 2-го эксперта для случая большего разброса ответов экспертов

Авторитетность k_v	1	2	5	10
Медиана Кемени	[5, 2, 3, 1, 6, 4]	[5, 3, 2, 1, 6, 4]	[5, 3, 2, 1, 6, 4]	[5, 3, 2, 1, 6, 4]

Таблица 11. Зависимость коллективного ответа от авторитетности 3-го эксперта для случая большего разброса ответов экспертов

Авторитетность k_v	1	2	3	4	5	10
Медиана Кемени	[5, 2, 3, 1, 6, 4]	[5, 3, 2, 6, 1, 4]	[5, 3, 6, 2, 4, 1]	[5, 3, 6, 4, 2, 1]	[5, 3, 6, 4, 2, 1]	[5, 3, 6, 4, 2, 1]

Таблица 12. Зависимость коллективного ответа от авторитетности 4-го эксперта для случая большего разброса ответов экспертов

Авторитетность k_v	1	2	3
Медиана Кемени	[5, 2, 3, 1, 6, 4]	[5, 2, 3, 6, 1, 4]	[5, 2, 6, 1, 4, 3] совпадает с ответом 4-го эксперта

объектов), в качестве заключения комиссии можно брать модифицированную медиану Кемени.

3. Мнение наиболее авторитетного эксперта может склонить итоговое ранжирование комисии экспертов в свою пользу при относительно небольшой степени несогласованности ответов экспертов, измеряемой расстоянием Кемени (см. табл. 5 – 7). Однако такой вывод не всегда верен в случае, если несогласованность в мнениях экспертов велика (см. табл. 9 – 11). Это может означать следующее: если в комиссии экспертов есть ответы слишком ортогональные авторитетным ответам, при составлении итогового мнения они все равно могут оказывать влияние на итоговое ранжирование комиссии экспертов.

4. Циклический алгоритм поиска медиан Кемени по методу псевдомедиан Жихарева оказался эффективным при небольших разногласиях экспертов. Однако этот алгоритм не смог успешно найти медианы при больших расстояниях между ответами экспертов. Это означает, что при большом разбросе экспертных мнений медианы Кемени могут лежать относительно далеко от модифицированных медиан Кемени (не удается подойти к ним единичными окружностями).

Следует принимать во внимание ограничения к алгоритмам, а также способ введения авторитетности экспертов, описанные выше. Для корректного поиска медианы Кемени по точному алгоритму Литвака требуется выполнение свойства Кондорсе, эвристический алгоритм не требует этого условия. Целесообразно провести большее число экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Орлов А. И.** Экспертные оценки / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1996. Т. 62. № 1. С. 54 – 60.
2. **Орлов А. И.** Организационно-экономическое моделирование: учебник. Ч. 2. Экспертные оценки. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. — 486 с.
3. **Орлов А. И.** Теория экспертных оценок в нашей стране / Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2013. № 93. С. 1 – 11.
4. **Миркин Б. Г.** Проблема группового выбора. — М.: Наука, 1974. — 256 с.
5. **Шрейдер Ю. А.** Равенство, сходство, порядок. — М.: Наука, 1971. — 256 с.
6. **Орлов А. И.** Организационно-экономическое моделирование: учебник. В 3-х ч. Ч. 1: Нечисловая статистика. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. — 542 с.
7. **Орлов А. И.** Анализ экспертных упорядочений / Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2015. № 112. С. 21 – 51.
8. **Орлов А. И.** Эконометрика. — М.: Экзамен, 2002. — 576 с.
9. **Кемени Дж., Снелл Дж.** Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения. — М.: Советское радио, 1972. — 192 с.
10. **Литвак Б. Г.** Экспертная информация. Методы получения и анализа. — М.: Радио и связь, 1982. — 184 с.
11. **Жихарев В. Н.** Медиана Кемени. [Электронный ресурс] URL: http://www.bmstu.ru/ps/%7Eorlov/ (дата обращения 05.09.2016).
12. **Кострикин А. И.** Введение в алгебру. Основы алгебры. — М.: Физматлит, 1994. — 320 с.
13. **Орлов А. И.** О развитии статистики объектов нечисловой природы / Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2013. № 93. С. 41 – 50.
14. **Орлов А. И.** О средних величинах / Управление большими системами. Вып. 46. — М.: ИПУ РАН, 2013. С. 88 – 117.
15. **Орлов А. И.** Средние величины и законы больших чисел в пространствах произвольной природы / Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2013. № 89. С. 175 – 200.
16. **Орлов А. И.** Роль медиан Кемени в экспертных оценках и статистическом анализе данных / Теория активных систем: Труды международной научно-практической конференции (14 – 16 ноября 2011 г., Москва, Россия). Т. I / Под общ. ред. В. Н. Буркова, Д. А. Новикова. — М.: ИПУ РАН, 2011. С. 172 – 176.
17. **Жуков М. С., Орлов А. И.** Задача исследования итогового ранжирования мнений группы экспертов с помощью медианы Кемени / Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета [Электронный ресурс]. 2016. № 08(122). С. 785 – 806. IDA [article ID]: 1221608055. Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/55.pdf.
18. **Батурин Ю. М., Черток Б. Е., Шуров А. И., Кричевский С. В., Сумкин Д. А.** Космонавтика XXI века. Попытка прогноза развития до 2101 года. — М.: РТСофт, 2011. — 864 с.

UDC 519.2:303.732.4

ON THE ALGORITHMS FOR KEMENY MEDIAN CALCULATION

© M. S. Zhukov

Submitted December 9, 2016.

We implemented algorithms developed by B. G. Litvak for calculation of Kemeny median using some approaches of V. N. Zhikharev to analyze the results of modelling random sets of expert answers using the expert system thus obtained. A possibility of adding the relative authority (credibility) of the expert ranking is considered. Computer simulation is done in Python. The conclusions regarding practical applications of the algorithms, their validity and restrictions are discussed.

Keywords: mathematics; economics; management; mathematical statistics; applied statistics; statistics of non-numerical data; decision theory; expert estimations; clustered rankings; mean quantity; Kemeny median.

REFERENCES

1. **Orlov A. I.** Expert analysis (conclusions) / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 1996. Vol. 62. N 1. P. 54 – 60 [in Russian].
2. **Orlov A. I.** Organizational economic modeling. Part 2. Expert assessements. — Moscow: Izd. MGTU im. N. É. Baumana, 2011. — 486 p. [in Russian].
3. **Orlov A. I.** Expert assessments theory in our country / Politemat. Set. Élektron. Nauch. Zh. Kuban. Gos. Agrar. Univ. 2013. N 93. P. 1 – 11 [in Russian].
4. **Mirkin B. G.** The problem of group choice. — Moscow: Nauka, 1974. — 256 p. [in Russian].
5. **Shreider Yu. A.** Equality, similarity, and order. — Moscow: Nauka, 1971. — 256 p. [in Russian].
6. **Orlov A. I.** Organizational economic modeling. In 3 parts. Part 1: Non-numeric statistics. — Moscow: Izd. MGTU im. N. É. Baumana, 2009. — 542 p. [in Russian].
7. **Orlov A. I.** Analysis of expert rankings / Politemat. Set. Élektron. Nauch. Zh. Kuban. Gos. Agrar. Univ. 2015. N 112. P. 21 – 51 [in Russian].
8. **Orlov A. I.** Econometrics. — Moscow: Ékzamen, 2002. — 576 p. [in Russian].
9. **Kemeni Dzh., Snell Dzh.** Kibernetic modeling. Some application. — Moscow: Sovet-skoe radio, 1972. — 192 p. [Russian translation].
10. **Litvak B. G.** Expert information. Methods of exptraction and analysis. — Moscow: Radio i svyaz', 1982. — 184 p. [in Russian].
11. **Zhikharev V. N.** Kemeny's Median. [on-line] URL: http://www.bmstu.ru/ps/%7Eorlov/ (accessed 05.09.2016) [in Russian].
12. **Kostrikin A. I.** Introduction to Algebra. Basics. — Moscow: Fizmatlit, 1994. — 320 p. [in Russian].
13. **Orlov A. I.** About development of non-numeric statistics / Politemat. Set. Élektron. Nauch. Zh. Kuban. Gos. Agrar. Univ. 2013. N 93. P. 41 – 50 [in Russian].
14. **Orlov A. I.** About average values / Managing large systems. Issue 46. — Moscow: Izd. IPU RAN, 2013. P. 88 – 117 [in Russian].
15. **Orlov A. I.** Average values and laws of big numbers in the spaces of various nature / Politemat. Set. Élektron. Nauch. Zh. Kuban. Gos. Agrar. Univ. 2013. N 89. P. 175 – 200 [in Russian].
16. **Orlov A. I.** The Kemeny's median role in expert assessments and statistical analysis / V. N. Burkov, D. A. Novikov (eds.). Theory of active systems: Proc. of the International Scientific and Practical Conference (November 14 – 16, 2011, Moscow, Russia). Vol. I. — Moscow: Izd. IPU RAN, 2011. P. 172 – 176 [in Russian].
17. **Zhukov M. S., Orlov A. I.** The research of final rankings of expert assessments by means of Kemeny's median / Politemat. Set. Élektron. Nauch. Zh. Kuban. Gos. Agrar. Univ. 2016. N 08(122). P. 785 – 806. IDA [article ID]: 1221608055. [on-line] http://ej.kubagro.ru/2016/08/pdf/55.pdf [in Russian].
18. **Baturin Yu. M., Chertok B. E., Shurov A. I., Krichevskii S. V., Sumkin D. A.** Astrounavtics of 21st age. The attempts of development forecast till 2101. — Moscow: RT-Soft, 2011. — 864 p. [in Russian].