

УДК 620.178.152:539.214

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТИ ЛОКАЛЬНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КОНТАКТА ПРИ ОТНОСИТЕЛЬНОМ СКОЛЬЖЕНИИ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ¹

© А. С. Донсков, В. В. Карманов²*Статья поступила 10 января 2014 г.*

Приведено решение контактной упругопластической задачи относительного скольжения двух упругих тел, ограниченных нелинейными поверхностями. Показано, что математическое моделирование методом переменных параметров упругости позволяет установить закономерности изменения геометрических характеристик области контакта для различных условий взаимодействия контактируемых тел. Разработанная математическая модель контактного взаимодействия тел адекватно отображает физическую сущность процесса упругопластического деформирования контртела скользящим индентором.

Ключевые слова: упругопластическое полупространство; эффективная форма индентора; задача Герца; деформация; напряжения; пластическое течение; переменные параметры упругости; параметры области контакта.

В механике деформирования твердого тела большое внимание уделено исследованию контактных задач (см., например [1, 2]). Это связано с тем, что более 80 % случаев выхода из рабочего состояния различных механизмов и машин связаны с процессами, возникающими в области контакта соприкасающихся твердых тел.

Широко исследованы контактные задачи для двух тел, имеющих исходный контакт в точке, при различных условиях их упругого взаимодействия, в том числе при скольжении или качении одного из них. Во многих работах [1 – 3 и др.] рассмотрены вопросы взаимодействия абсолютно твердого или упругого тела с вязкоупругим или жесткопластическим телом, обычно представленным в виде полупространства. Имеются работы [4 – 6 и др.] по моделированию внедрения сферического тела в упругопластическое контртело. Однако в доступных источниках отсутствуют сведения по математическому моделированию процесса скольжения упругого тела по поверхности другого в условиях упругопластического деформирования последнего. Очевидно, это обусловлено сложностью данной контактной задачи, при решении которой следует учитывать, что в очаге деформации движущегося упругопластического контакта одновременно реализуются два процесса деформирования материала контртела:

а) нагружение контртела со стороны движущегося индентора, в результате которого возникает пласти-

ческое течение материала и его вытеснение из очага деформации контртела с образованием на поверхности последнего следа — канавки, начало которой имеет форму полуэллипсоидальной лунки;

б) упругая разгрузка материала контртела, обуславливающая давление на тыльную поверхность основания индентора со стороны образующейся на поверхности контртела канавки.

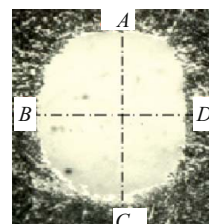
Совместное во времени протекание процессов нагружения и разгрузки в очаге деформации движущегося упругопластического контакта в геометрической форме отражает рис. 1 — фотография области контакта. Здесь полуэллипс ABC ограничивает область контакта передней полусферы индентора с контртелом, в точках которой происходит процесс нагружки. Тыльная часть области контакта, ограниченная полуэллипсом ADC , образована давлением канавки вследствие упругого восстановления деформированного материала контртела.

Исследования движущегося контакта тел, первоначально соприкасающихся в точке, важны для решения проблемы повышения сопротивляемости деталей машин и механизмов износу и разрушению. В работах [7, 8] приведены решения контактных задач для случаев скольжения жесткой сферы по поверхности упру-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (договор № 02.G25.31.0016) в рамках реализации Постановления Правительства РФ № 218.

² Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия; e-mail: tms2@pstu.ru

Рис. 1. Фотография области контакта сферического алмазного индентора, образующейся при его скольжении по поверхности валика диаметром 40 мм из стали 40Х (160 HB). Сила прижатия индентора $P = 100$ Н; радиус основания индентора $R = 3,2$ мм



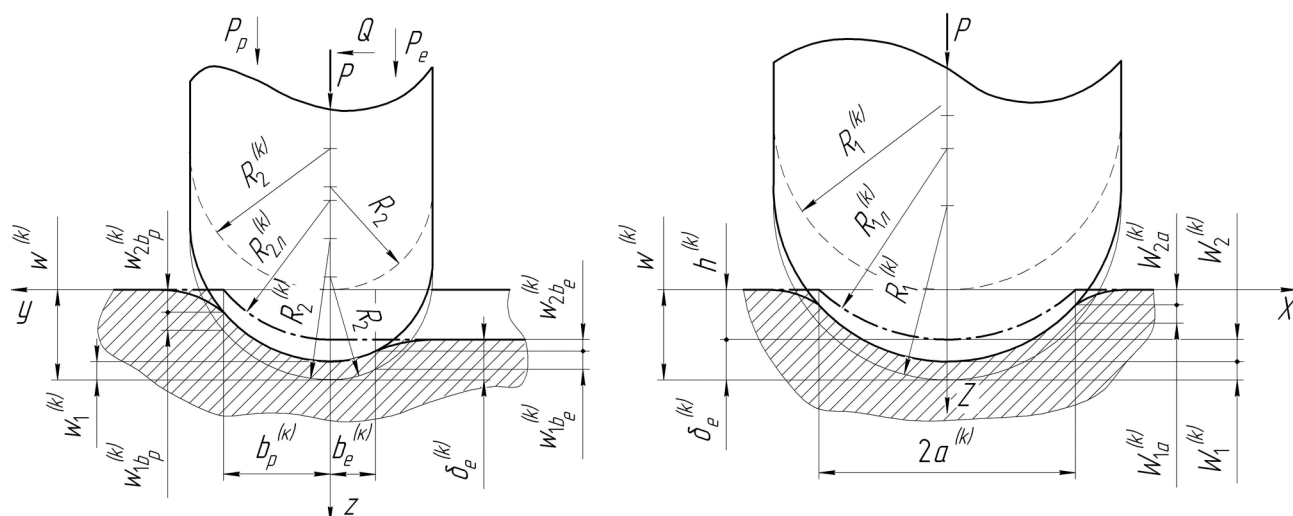


Рис. 2. Схема скольжения упругого эллипсоидального индентора по упругопластическому полупространству: — — схема скольжения индентора на k -й итерации решения задачи; - · - · - — границная поверхность пластического следа на поверхности полупространства после снятия нагрузки на k -й итерации решения задачи; --- — схема начального контакта гипотетического индентора с полупространством перед выполнением k -й итерации решения задачи (кривизна основания индентора в главных нормальных сечениях равна средней кривизне поверхностей лунки пластического отпечатка и переднего полуэллипсоида основания индентора, найденной на $k - 1$ итерации)

гопластического полупространства и сжатия двух упругих тел с развитием пластических деформаций в одном из них. Используя результаты решения этих задач, выполним математическое моделирование общего случая взаимодействия двух соприкасающихся твердых тел в следующей постановке контактной задачи.

Упругий индентор с неплоским эллиптическим в плане основанием под действием сил P и Q при отсутствии сил трения перемещается по неплоской поверхности контртела в условиях развития в последнем пластического течения материала с образованием на исходной поверхности контртела канавки.

Необходимо установить взаимосвязи параметров области упругопластического контакта контртела с силами P и Q , приложенными к индентору, геометрическими и механическими свойствами взаимодействующих тел.

Полагая, что размеры соприкасающихся тел значительно превышают площадку их контакта, рассмотрим задачу скольжения по упругопластическому полупространству упругого индентора с основанием, ограниченным поверхностью эллипсоида с радиусами кривизны в главных нормальных сечениях, равными средним радиусам R_1 и R_2 кривизны обоих исходных тел.

При совпадении плоскостей главных кривизн этих тел средние радиусы R_1 и R_2 находятся из следующих уравнений:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{11}} \pm \frac{1}{R_{12}}; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{21}} \pm \frac{1}{R_{22}}, \quad (1)$$

где R_{11} , R_{21} , R_{12} и R_{22} — радиусы кривизны в главных нормальных сечениях граничных поверхностей индентора и контртела. Если главные нормальные сечения граничных поверхностей контактируемых тел не совпадают, радиусы R_1 и R_2 вычисляются путем введения общей для тел системы координат [9].

Для конкретизации задачи полагаем, что скольжение индентора по поверхности контртела осуществляется в направлении малой оси образующейся эллиптической области контакта. В этом случае контактное взаимодействие тел может быть представлено в виде схемы (рис. 2), отражающей вышеописанный процесс упругопластического деформирования контртела.

С использованием основных положений концептуальной модели упругопластического взаимодействия тел [7, 8] поставленная задача может быть сведена к задаче построения гипотетического индентора с основанием эффективной формы. Данный индентор [10] должен иметь такие геометрические параметры (форму и размеры) своего основания, при которых приложение сил P и Q вызывает только упругое деформирование поверхности контртела. При этом величина упругого перемещения точек поверхности контртела равна упругому перемещению соответствующих точек поверхности контакта образующейся канавки при упругой разгрузке после прекращения действия сил P и Q на реальный индентор.

Для рассматриваемого контактного взаимодействия тел эффективная форма основания гипотетического индентора представляет собой сопряженные в плоскости $Y = 0$ поверхности двух геометрических тел (рис. 3). Передняя часть основания индентора

(в направлении его перемещения) ограничена поверхностью эллипсоида

$$\frac{x_p^2}{2R_1^{(k)}R_2^{(k)} - (R_2^{(k)})^2} + \frac{y_p^2}{(R_2^{(k)})^2} + \frac{z_p^2}{(R_2^{(k)})^2} = 1 \quad (2)$$

с радиусами кривизны $R_1^{(k)}$ и $R_2^{(k)}$ в главных нормальных сечениях $Y=0$ и $X=0$, равными соответствующим радиусам средней кривизны поверхностей основания реального индентора радиусами кривизны R_1 и R_2 и полулунки начала образующей канавки радиусами $R_{1л}^{(k)}$ и $R_{2л}^{(k)}$. Значения радиусов кривизны $R_{1л}^{(k)}$ и $R_{2л}^{(k)}$ определяются величиной интенсивности деформации материала полупространства в области ABC контакта (см. рис. 1). Тыльная часть основания гипотетического индентора ограничена поверхностью эллипсоида

$$\frac{x_e^2}{2R_1^{(k)}R_2 - R_2^2} + \frac{y_e^2}{R_2^2} + \frac{z_e^2}{R_2^2} = 1 \quad (3)$$

с радиусом кривизны $R_1^{(k)}$ в сечении $Y=0$ его основания и радиусом кривизны R_2 в сечении $X=0$.

Таким образом, математическое моделирование процесса упругопластического деформирования контртела скользящим реальным индентором заключается в определении радиусов кривизны $R_1^{(k)}$ и $R_2^{(k)}$ в главных нормальных сечениях $Y=0$ и $X=0$ основания гипотетического индентора (см. рис. 3). Радиусы $R_1^{(k)}$ и $R_2^{(k)}$ основания гипотетического индентора найдем [7], применяя метод переменных параметров упругости [11] по алгоритму выполнения двух (k и l) итерационных процессов. В k -процессе с использованием зависимости $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$, (σ_i и ε_i — интенсивности напряжений и деформации) выявляется наличие пластического течения материала в точках области ABC нагрузки полупространства. В l -процессе по величине деформации ε_i вычисляются с заданной точностью переменные параметры упругости G_* и μ_* материала полупространства, по которым далее определяются значения $R_1^{(k)}$ и $R_2^{(k)}$ основания гипотетического индентора для выполнения следующей итерации k -процесса. Если при выполнении очередной k -й итерации для скорректированных граничных условий возникает ситуация, когда скольжение гипотетического индентора по полупространству не вызывает пластического течения материала в области контакта полупространства, то итерационный процесс определения параметров $R_1^{(k)}$ и $R_2^{(k)}$ эффективной формы индентора считается законченным.

Применительно к сформулированной задаче скольжения упругого индентора с эллипсоидальным

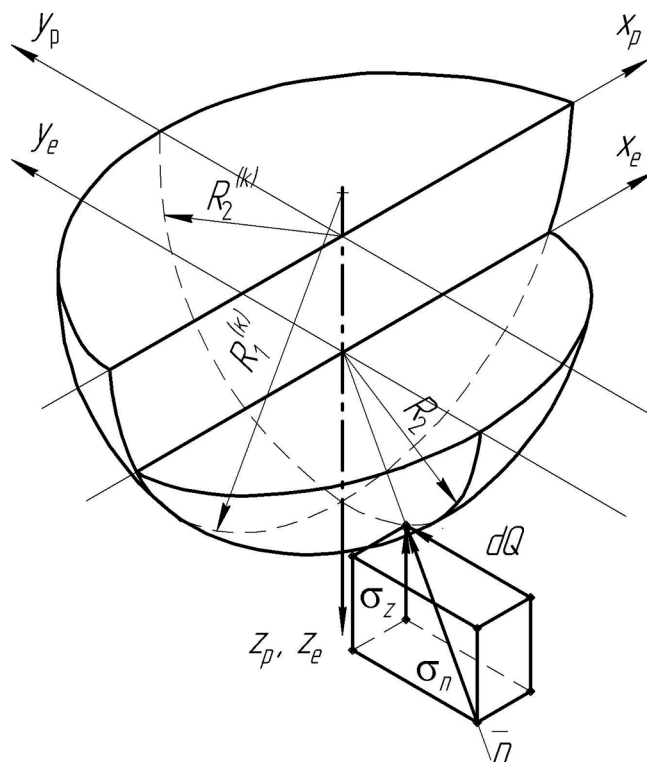


Рис. 3. Модель основания гипотетического индентора, скользящего по упругопластическому полупространству

основанием по упругопластическому полупространству можем записать уравнения равновесия

$$P = \iint_s p(x, y) ds, \quad Q = \iint_s p(x, y) \frac{\cos(\bar{n}, \bar{y})}{\cos(\bar{n}, \bar{z})} ds \quad (4)$$

и граничные условия

$$\sigma_z = \begin{cases} 0, & z \notin s; \\ -p(x, y), & z \in s, \end{cases} \quad (5)$$

где $p(x, y)$ — нормальная нагрузка, действующая на поверхности s полупространства; $\bar{n}$ — нормаль к поверхности основания индентора в точке (x, y, z) области его контакта с полупространством (см. рис. 3); σ_z — нормальные напряжения на поверхности полупространства. Кроме того, в точках области контакта на оси координат X соблюдается условие неразрывности для напряжений σ_z :

$$\sigma_z|_{y \leq 0} = \sigma_z|_{y \geq 0}. \quad (6)$$

Исходя из работ [9, 12], для любой k -й итерации решения задачи скольжения индентора по упругому полупространству с параметрами упругости E_* ,

G_* , μ_* напряжения σ_z определяются следующими отношениями:

$$\begin{cases} \sigma_{z_p}^{(k)} = -\frac{3}{2} \frac{2P_p^{(k)}}{\pi a^{(k)} b_p^{(k)}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^{(k)2}} - \frac{y^2}{b_p^{(k)2}}} \text{ при } y \geq 0; \\ \sigma_{z_e}^{(k)} = -\frac{3}{2} \frac{2P_e^{(k)}}{\pi a^{(k)} b_e^{(k)}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^{(k)2}} - \frac{y^2}{b_e^{(k)2}}} \text{ при } y \leq 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $P_p^{(k)}$ и $P_e^{(k)}$ — составляющие нормальной силы P , действующие со стороны индентора в области нагрузки и разгрузки соответственно; $a^{(k)}$, $b_p^{(k)}$, $b_e^{(k)}$ — полуоси полуэллипсов контакта (см. рис. 2).

Согласно условию (6)

$$\frac{3}{2} \frac{2P_p^{(k)}}{\pi a^{(k)} b_p^{(k)}} = \frac{3}{2} \frac{2P_e^{(k)}}{\pi a^{(k)} b_e^{(k)}} = p_{\max}^{(k)},$$

где $p_{\max}^{(k)}$ — максимальное давление в области контакта.

Полуоси $a^{(k)}$, $b_p^{(k)}$, $b_e^{(k)}$ полуэллипсов контакта, полное $\delta^{(k)}$ и упругое $\delta_e^{(k)}$ сближения тел определяются по следующим формулам:

$$a^{(k)} = \alpha_a \sqrt[3]{2P_p^{(k)} (v_1 + v_*^{(k)}) R_1^{(k)}}; \quad (8)$$

$$b_p^{(k)} = a^{(k)} \sqrt{1 - e^2}, \quad b_e^{(k)} = a^{(k)} \sqrt{1 - e_e^{(k)2}}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(k)} &= \left[\frac{2P_p^{(k)}}{\sqrt{R_1^{(k)}}} (v_1 + v_*^{(k)}) \right]^{2/3} \alpha_\delta; \\ \delta_e^{(k)} &= \left[\frac{2P_p^{(k)}}{\sqrt{R_1^{(k)}}} (v_1 + v_2) \right]^{2/3} \alpha_\delta. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $v_1 = \frac{1 - \mu_1}{G_1}$, $v_*^{(k)} = \frac{1 - \mu_*^{(k)}}{G_*^{(k)}}$ (μ_1 и G_1 — параметры

упругости индентора — коэффициент Пуассона и модуль сдвига; $\mu_*^{(k)}$, $G_*^{(k)}$ — переменные параметры упругости контртела, вычисленные на k -м шаге итерационного процесса решения задачи); α_a , α_δ и $\alpha_{\delta_e}^{(k)}$ — функции эксцентриситетов e и $e_e^{(k)}$ полуэллипсов ABC и ADC контакта:

$$\alpha_a = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi} \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)]};$$

$$\alpha_\delta = K(e) \sqrt[3]{\frac{9e^2}{32\pi^2 [K(e) - E(e)]}}.$$

Значения эксцентриситетов e и $e_e^{(k)}$ полуэллипсов области контакта находятся из решения уравнений [9]

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} &= \frac{(1-e)[K(e) - E(e)]}{E(e) - (1-e^2)K(e)}, \\ \frac{R_2}{R_1^{(k)}} &= \frac{(1-e_e^{(k)})[K(e_e^{(k)}) - E(e_e^{(k)})]}{E(e_e^{(k)}) - (1-e_e^{(k)2})K(e_e^{(k)})}. \end{aligned} \quad (11)$$

Приведенные в уравнениях (7) – (11) $a^{(k)}$, $b^{(k)}$, $\delta^{(k)}$ и другие параметры взаимодействия тел определяются величиной интенсивности упругопластической деформации $\varepsilon_i^{(k)} = \frac{\varepsilon_{i0}^{(k)} + \varepsilon_{ia}^{(k)} + \varepsilon_{ib}^{(k)}}{3}$, т.е. средним значением интенсивностей деформации $\varepsilon_{i0}^{(k)}$, $\varepsilon_{ia}^{(k)}$, $\varepsilon_{ib}^{(k)}$ в

точках $x = y = 0$, $x = a$, $y = b_p$ области нагрузки. При этом каждая из них вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{\sqrt{(\sigma_{xj}^{(k)} - \sigma_{yj}^{(k)})^2 + (\sigma_{yj}^{(k)} - \sigma_{zj}^{(k)})^2 + (\sigma_{zj}^{(k)} - \sigma_{xj}^{(k)})^2}}{3\sqrt{2}G_*^{(k)}}, \quad (12)$$

в которой напряжения $\sigma_{ij}^{(k)}$ в точках $x = y = 0$, $x = a$, $y = b_p$ полуэллипса ABC контакта выражаются следующим образом [12]:

$$x = y = 0: \sigma_x^{(k)} = -p_{\max}^{(k)} \frac{\beta + 2\mu_*^{(k)}}{1 + \beta};$$

$$\sigma_y^{(k)} = -p_{\max}^{(k)} \frac{1 + 2\mu_*^{(k)}\beta}{1 + \beta}; \quad \sigma_z^{(k)} = -p_{\max}^{(k)};$$

$$x = a: \sigma_x^{(k)} = -\sigma_y^{(k)} = p_{\max}^{(k)} (1 - 2\mu_*^{(k)}) \frac{\beta}{e^2} \left(\frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} - 1 \right),$$

$$\sigma_z^{(k)} = 0, \quad y = b_p:$$

$$\sigma_x^{(k)} = -\sigma_y^{(k)} = p_{\max}^{(k)} (1 - 2\mu_*^{(k)}) \frac{\beta}{e^2} \left(\frac{\beta}{e} \arctg \frac{e}{\beta} - 1 \right); \quad \sigma_z^{(k)} = 0,$$

$$\text{где } \beta = \frac{b_p^{(k)}}{a^{(k)}} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Подставив в уравнение (12) выражения для напряжений, получим

$$\varepsilon_{i0}^{(k)} = \frac{1}{3} p_{\max}^{(k)} \frac{1 - 2\mu_*^{(k)}}{G_*^{(k)}} \frac{\sqrt{1 - \beta + \beta^2}}{1 + \beta};$$

$$\varepsilon_{ia}^{(k)} = \frac{\sqrt{3}}{3} p_{\max}^{(k)} \frac{1 - 2\mu_*^{(k)}}{G_*^{(k)}} \frac{\beta}{e^2} \left(\frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} - 1 \right);$$

$$\varepsilon_{ib}^{(k)} = \frac{\sqrt{3}}{3} p_{\max}^{(k)} \frac{1 - 2\mu_*^{(k)}}{G_*^{(k)}} \frac{\beta}{e^2} \left(\frac{\beta}{e} \arctg \frac{e}{\beta} - 1 \right).$$

В последних уравнениях переменные параметры упругости $G_*^{(k)}$ и $\mu_*^{(k)}$ в точках $x = y = 0$, $x = a$, $y = b_p$ полуэллипса ABC контакта вычислены с заданной точностью при выполнении итерационного l -процесса. Максимальное давление $p_{\max}^{(k)}$ в области контакта может быть найдено из условий (4), (5). Подставив выражения (7) в первое из условий (4) и выполнив интегрирование по площадке контакта $ABCD$, получим

$$P = \frac{\pi}{3} p_{\max}^{(k)} a^{(k)2} \beta \left(1 + \frac{\beta_e^{(k)}}{\beta} \right);$$

$$p_{\max}^{(k)} = \frac{3P}{\pi a^{(k)2} \left[\beta \left(1 + \frac{\beta_e^{(k)}}{\beta} \right) \right]^{-1}}, \quad (13)$$

где $\beta_e^{(k)} = \frac{b_e^{(k)}}{a^{(k)}} = \sqrt{1 - e_e^{(k)2}}$.

Интенсивность деформации $\varepsilon_i^{(k)}$ в области контакта позволяет установить наличие или отсутствие пластического течения материала контртела на k -й итерации процесса уточнения граничных условий взаимодействия реальных тел.

При отсутствии на первой итерации ($k = 1$) пластического течения ($\varepsilon_i^{(k)} < \varepsilon_s$, ε_s — предел текучести материала контртела) имеет место упругое деформирование контртела при скольжении индентора при заданных силах P и Q . В этой ситуации математическое моделирование поставленной задачи осуществляется по соотношениям (8) – (10), в которых переменные параметры упругости контртела равны их исходным значениям: $\mu_*^{(1)} = \mu_2$, $G_*^{(1)} = G_2$.

Если на выполняемой k -й итерации ($k > 1$) скольжение гипотетического индентора с радиусами кривизны $R_1^{(k)}$ и $R_2^{(k)}$ основания вызывает пластическое течение материала полупространства ($\varepsilon_i^{(k)} > \varepsilon_s$), то по приведенному выше алгоритму вычисляются значения радиусов $R_1^{(k+1)}$ и $R_2^{(k+1)}$ основания гипотетического индентора для выполнения очередной $k + 1$ итерации. При этом предполагается, что повторное приложение сил P и Q к индентору с радиусами $R_1^{(k+1)}$ и $R_2^{(k+1)}$ основания, установленному в полулунку начала образованной на k -й итерации канавки, приводит только к упругому деформированию канавки, не вызывая скольжения индентора. Следовательно, для упругого контакта такого индентора с остаточным пластическим следом на k -й итерации имеем

$$a^{(k)} = \alpha_a \sqrt[3]{2P_p^{(k)} (v_1 + v_2) R_1^{(k+1)}}; \quad (14)$$

$$\delta_e^{(k)} = \alpha_\delta \left[\frac{2P_p^{(k)}}{\sqrt{R_1^{(k+1)}}} (v_1 + v_2) \right]^{2/3}; \quad (15)$$

$$w_1^{(k)} = \frac{v_1}{v_1 + v_2} \delta_e^{(k)}; w_2^{(k)} = \frac{v_2}{v_1 + v_2} \delta_e^{(k)};$$

$$w^{(k)} = h^{(k)} + w_1^{(k)} + w_2^{(k)}, \quad (16)$$

где $w^{(k)}$ — полное перемещение индентора; $h^{(k)}$ — глубина канавки; $w_1^{(k)}$ и $w_2^{(k)}$ — перемещения индентора вследствие собственного упругого деформирования и упругого деформирования канавки.

Приравняв выражения (8) и (14) с учетом формул (9), (11), а также

$$R_1^{(k+1)} = \frac{R_1^{(k)} R_{1л}^{(k)}}{R_{1л}^{(k)} - R_1^{(k)}},$$

получим

$$R_{1л}^{(k)} = \frac{R_1^{(k)}}{\omega^{(k)}}; R_1^{(k+1)} = \frac{R_1^{(k)}}{1 - \omega^{(k)}}; R_2^{(k+1)} = \frac{R_2^{(k)}}{1 - \omega^{(k)}}, \quad (17)$$

где $\omega^{(k)} = 1 - \frac{v_1 + v_2}{v_1 + v_*^{(k)}} \quad (18)$

функция переменных параметров упругости G_* и μ_* материала контртела ($0 \leq \omega^{(k)} \leq 1$).

Наряду с выражением (14) из геометрических построений (см. рис. 2) имеем

$$a^{(k)} = \sqrt{R_1^{(k)2} - [R_1^{(k)} - (h^{(k)} + \delta_e^{(k)} - w_{1a}^{(k)} - w_{2a}^{(k)})]^2}, \quad (19)$$

где $w_{1a}^{(k)}$ и $w_{2a}^{(k)}$ — упругие смещения точки $x = a$ поверхности индентора и сопряженной с ней точки $x = a$ поверхности контртела контура эллиптической площадки контакта [9]:

$$w_{1a}^{(k)} = \frac{v_1}{v_1 + v_2} \delta_e^{(k)} \left(1 - \frac{\alpha_a^2}{2\alpha_\delta} \right);$$

$$w_{2a}^{(k)} = \frac{v_2}{v_1 + v_2} \delta_e^{(k)} \left(1 - \frac{\alpha_a^2}{2\alpha_\delta} \right). \quad (20)$$

Приравняв выражения (14) и (19) с учетом формул (15) – (17), (20), после преобразований получим

$$h^{(k)} = \frac{\omega^{(k)}}{1 - \omega^{(k)}} \frac{\delta_e^{(k)}}{2} \frac{\alpha_a^2}{\alpha_\delta}. \quad (21)$$

N -я итерация k -процесса решения задачи, на которой начинается выполнение условий $\varepsilon_i^{(n)} \leq \varepsilon_s$, $R_1^{(n)} = R_1^{(n-1)}$, $R_2^{(n)} = R_2^{(n-1)}$, является конечной операцией построения скользящего гипотетического индентора с радиусами кривизны $R_1^{(n)}$ и $R_2^{(n)}$ основания, вызывающего только упругое деформирование поверхности контртела. Ее результаты позволяют определить геометрические характеристики области

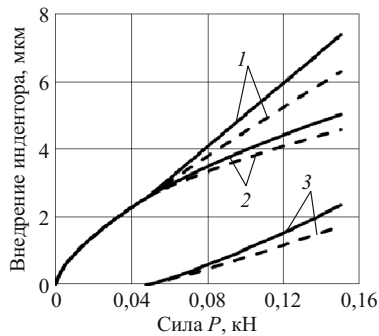


Рис. 4. Динамика внедрения индентора радиусом $R = 1,2$ мм в контртело из стали 40X (55 HRC) в зависимости от силы прижатия тел: — — скольжение индентора; - - - статическое сжатие тел; 1 — полное внедрение w ; 2 — упругая составляющая δ_e внедрения w ; 3 — глубина h пластического следа

контакта, входящие в состав граничных условий постановки упругопластической контактной задачи при относительном скольжении двух тел с нелинейными соприкасающимися поверхностями.

Для конечных значений радиусов кривизны $R_1^{(n)}$, $R_2^{(n)}$ эффективной формы индентора соотношения (1) и (17) принимают вид

$$\frac{1}{R_1^{(n)}} = \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}^{(n)}}, \quad \frac{1}{R_2^{(n)}} = \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}^{(n)}},$$

$$R_1^{(n)} = \frac{R_1}{1-\omega}, \quad R_2^{(n)} = \frac{R_2}{1-\omega}, \quad R_{1n} = \frac{R_1}{\omega}, \quad (22)$$

где функция ω переменных параметров упругости имеет суммарное (накопленное при выполнении $n - 1$ итераций k -процесса) значение. Следовательно, на конечной n -й итерации с учетом (13) и (22) соотношения (9), (14) – (16) и (21) принимают следующий вид:

$$a = \alpha_a \sqrt[3]{\frac{2P(v_1 + v_2)}{1-\omega} R_1 \left(1 + \frac{b_e}{b_p}\right)^{-1}};$$

$$b_p = a\sqrt{1-e^2}; \quad b_e = a\sqrt{1-e_e^2}; \quad (23)$$

$$\delta_e = \left[\frac{2P(v_1 + v_2)}{\sqrt{R_1/(1-\omega)}} \left(1 + \frac{b_e}{b_p}\right)^{-1} \right]^{2/3} \alpha_\delta;$$

$$h = \frac{\omega}{1-\omega} \frac{\delta_e}{2} \frac{\alpha_a^2}{\alpha_\delta}; \quad (24)$$

$$w_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_2} \delta_e; \quad w_2 = \frac{v_2}{v_1 + v_2} \delta_e; \quad w = h + w_1 + w_2. \quad (25)$$

В приведенных зависимостях значение эксцентриситета e находится из решения первого уравнения (11) для отношения R_2/R_1 радиусов, вычисленных по формулам (1) для исходных значений радиусов кривизны

контактируемых тел. Эксцентриситет e_e находится из решения второго уравнения (11), левая часть которого имеет вид $R_2(1-\omega)/R_1$. Для установления взаимосвязи силы Q с параметрами области контакта выполним интегрирование второго уравнения (4), пренебрегая в выражении $\cos(\bar{n}, \bar{y})/\cos(\bar{n}, \bar{z}) = y/z$ малыми величинами первого и более порядков, т.е. полагая $\cos(\bar{n}, \bar{y})/\cos(\bar{n}, \bar{z}) = y/R_2$ в точке (x, y, z) основания индентора. В результате интегрирования уравнения (4) с использованием вышеприведенных зависимостей получим

$$Q = \frac{3}{8} \frac{P}{R_2} \sqrt{2R_1 h + R_1 \delta_e} \frac{\alpha_a^2}{\alpha_\delta} \sqrt{1-e^2} \left(1 - \sqrt{\frac{1-e_e^2}{1-e^2}}\right). \quad (26)$$

Рассмотренная задача является общей по отношению к частным задачам контактного взаимодействия тел с начальным касанием в точке. К ним, прежде всего, относятся задачи о сжатии двух тел, скольжении одного из них по поверхности другого в условиях развития упругих деформаций в обоих телах, упругопластических деформаций в одном из них с образованием круговой, эллиптической и более сложной по геометрической форме области контакта. Естественно, что выбранный метод решения общей задачи должен обеспечивать и решение частных относящихся к данному классу задач. На рис. 4 представлены результаты проверки возможности использования полученной методом переменных параметров упругости математической модели общей контактной задачи для решения перечисленных выше задач применительно к исследованию динамики внедрения сферического индентора при его скольжении по поверхности контртела и статическом сжатии тел в условиях развития малых упругопластических деформаций. Приведенные результаты свидетельствуют об их сходимости с данными, полученными в работах [3, 5, 7 и др.]. Следует отметить, что решение контактной задачи методом переменных параметров упругости позволяет рассматривать также предельные случаи упругопластического деформирования контртела индентором, при котором величина пластической деформации на порядок и более превышает упругие деформации, т.е. когда в рассматриваемой задаче $\omega \rightarrow 1$. В частности, при определении по формуле $f_{\text{деф}} = Q/P$ деформационной составляющей коэффициента трения при скольжении по поверхности полупространства жесткого сферического индентора в условиях пластического контакта имеем: $R_1 = R_2 = R$; $e = 0$; $v_1 = 0$; $\omega \rightarrow 1$; $e_e \rightarrow 1$; $v_* = \infty$; $\delta_e = 0$. Используя выражение (26) для силы Q , получим $f_{\text{деф}} = Q/P = 0,53\sqrt{h/R}$, что согласуется с результатом работы [3].

Для оценки адекватности математической модели были выполнены экспериментальные исследования геометрических параметров области скользящего контакта на цилиндрических образцах диаметром 20 –

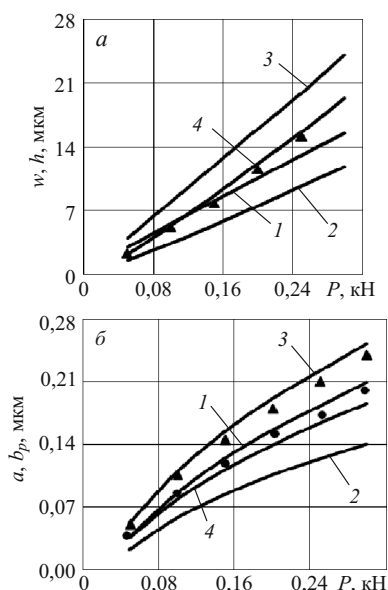


Рис. 5. Изменение параметров области упругопластического контакта тел при их сжатии и относительном скольжении: *a* — *w* — полное сближение тел при сжатии (кривая 1) и при скольжении индентора (кривая 3); *h* — глубина пластического отпечатка при сжатии (кривая 2) и глубина канавки при скольжении индентора (кривая 4); *b* — *a*, *b_p* — полуоси полуэллипса области нагрузки контртела при сжатии тел (кривые 1, 2) и скольжении индентора (кривые 3, 4); значки — экспериментальные данные величин *h*, *a*, *b_p* области скользящего контакта

40 мм и пластинах из сталей 40X твердостью 160 HB и 55 HRC и дуралюмина Д16Т (130 HB). В качестве индентора применялись алмазные сферические выглаживатели радиусом 1,2; 2,4 и 3,2 мм. В опытах измерялись нормальная *P* и касательная *Q* силы, геометрические параметры области контакта [13] с записью профиллограмм поверхности оставляемым индентором пластического следа в его поперечном сечении. В вычислительном эксперименте в качестве зависимости $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ материала контртела использовалась модель неупрочняемого упругопластического тела с параметрами, приведенными в таблице.

На рис. 5 приведены результаты моделирования и опытные данные влияния на геометрические параметры области контакта нормальной силы *P* прижатия алмазного выглаживателя радиусом 2,4 мм к поверхности цилиндрического образца диаметром 20 мм из стали 40X (160 HB) при неподвижном инденторе (кривые 1, 2) и его скольжении (кривые 3, 4). Полученные зависимости указывают, что при взаимодействии тел в условиях пластического течения материала в точках области контакта одного из них имеет место линейная связь между полным сближением тел *w* и силой *P* как при статическом сжатии тел, так и при относительном их скольжении (см. рис. 4, 5, *a*). Однако в отличие от сжатия тел, где имеет место линейная связь между глубиной *h* пластического отпечатка и силой *P*, при скольжении индентора существует нелинейная зависимость глубины оставляемой индентором канавки на

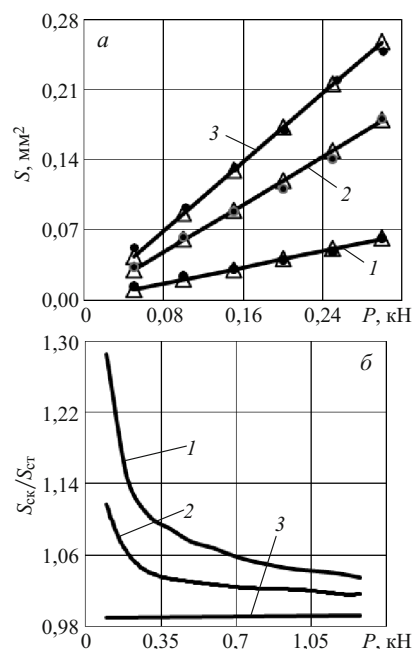


Рис. 6. Результаты моделирования площади упругопластического контакта тел при их сжатии и относительном скольжении: *a* — площадь *S* упругопластического контакта тел при скольжении индентора (сплошная линия) и при сжатии тел (Δ); $\bullet$ — экспериментальные данные площади скользящего контакта; 1 — 40X (55 HRC); 2 — 40X (160 HB); 3 — Д16Т (130 HB); *b* — отношение площадей $S_{ск}/S_{ст}$ контакта при скольжении индентора $R = 2,4$ мм и сжатии тел при пластическом (1, 2) и упругопластическом (3) деформировании контртела: 1 — Д16Т; 2 — 40X (160 HB)

поверхности контртела от силы. Эта нелинейность связи между *h* и *P* в наибольшей степени проявляется при малых величинах сближения тел *w*, при которых упругая составляющая полного сближения тел превышает или одного порядка с глубиной образующейся канавки и обуславливает значительную площадь полуэллипса области упругой разгрузки материала контртела.

Приведенные на рис. 5, *b* результаты свидетельствуют о независимости характера изменения полуосей области контакта от вида взаимодействия тел (сжатия или относительного скольжения). Несколько завышенные значения расчетных данных по отношению к экспериментальным обусловлены неучетом упрочнения деформируемого материала контртела.

Согласно результатам вычислительного эксперимента площадь контакта при малых упругопластических деформациях контртела не зависит от вида взаимодействия тел и изменяется по линейному зако-

Параметры модели неупрочняемого упругопластического тела

Материал	Твердость	Модуль упругости, МПа	Коэффициент Пуассона	Предел текучести ε_s
40X	55 HRC	220 000	0,35	0,005
40X	160 HB	220 000	0,35	0,0017
Д16Т	130 HB	71 000	0,31	0,0045

ну от силы давления индентора, что подтверждается экспериментальными данными, полученными при деформировании различных материалов (рис. 6, а). Выше было отмечено, что полученная математическая модель позволяет рассматривать предельный случай деформирования контртела, при котором упругой составляющей внедрения индентора по отношению к пластической составляющей полного внедрения индентора можно пренебречь. Выполненное моделирование для такого предельного случая показало, что при скольжении и статическом внедрении индентора в случае пластического деформирования контртела площадь контакта определяется как силой сжатия тел, так и видом их взаимодействия. Приведенные на рис. 6, б данные расчета показывают, что при пластическом деформировании контртела с увеличением силы давления индентора площадь скользящего контакта увеличивается в большей степени, чем площадь неподвижного контакта. При этом интенсивность увеличения площади скользящего контакта $S_{ск}/S_{ст}$ подчиняется гиперболической зависимости от силы давления индентора, стремясь к своей асимптоте $S_{ск}/S_{ст} = 1$. Аналогичный результат следует из работы [3] при скольжении индентора в условиях отсутствия трения в области контакта.

Таким образом, приведено решение контактной упругопластической задачи относительного скольжения двух упругих тел, ограниченных нелинейными поверхностями. Показано, что моделирование методом переменных параметров упругости позволяет исследовать процесс упругопластического деформирования граничной поверхности контртела скользящим индентором начиная от условий упругого контакта до развития в области контакта значительных пластических деформаций.

Экспериментальная проверка показала, что разработанная математическая модель контактного взаимодействия тел качественно и количественно адекватно

отражает физическую сущность процесса упругопластического деформирования контртела скользящим индентором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 510 с.
2. Морозов Е. М., Зернин М. В. Контактные задачи разрушения. — М.: Машиностроение, 1999. — 544 с.
3. Михин Н. М. Внешнее трение твердых тел. — М.: Наука, 1977. — 194 с.
4. Донсков А. С. Математическое моделирование процесса внедрения жесткого штампа в упругопластическое полупространство / Деформация и разрушение материалов. 2011. № 3. С. 16 – 22.
5. Дрозд М. С., Матлин М. М., Сидякин Ю. И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. — М.: Машиностроение, 1986. — 224 с.
6. Бакиров М. Б., Зайцев М. А., Фролов И. В. Математическое моделирование процесса вдавливания сферы в упругопластическое полупространство / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. № 1. С. 37 – 47.
7. Донсков А. С. Контактная упругопластическая задача для полупространства, деформируемого скользящим индентором / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 6. С. 46 – 53.
8. Донсков А. С., Гордеева В. А. Задача упругопластического контакта тел с нелинейными граничными поверхностями / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2013. Т. 79. № 8. С. 46 – 54.
9. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
10. Pharr G. M., Bolshakov A. Understanding nanoindentation unloading curves / J. Mater. Res. 2002. Vol. 17. N 10. P. 2660.
11. Биргер И. А. Некоторые методы решения задач пластичности / ПММ. 1951. Т. 15. № 6. С. 765 – 770.
12. Коровчинский М. В. Распределение напряжений в окрестности локального контакта упругих тел при одновременном действии нормальных и касательных усилий в контакте / Машиностроение. 1967. № 6. С. 85 – 96.
13. А. с. 564576 СССР. Способ выявления пятна контакта алмазного инструмента с обрабатываемой деталью / Е. А. Евсин, В. М. Торбило, А. С. Донсков, А. В. Якимов. — № 2190819/28; заявл. 17.11.75; опубл. 05.07.77. — Бюл. № 25.