

DOI: 10.26896/1028-6861-2017-83-11-35-40

УДК (UDC) 536.2.023:519:669:699.86

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛА ПО ТРЕМ ТОЧКАМ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПЛАСТИНЫ

© А. К. Соколов

Ивановский государственный энергетический университет, г. Иваново, Россия; e-mail: sokolov@bjd.ispu.ru

Ивановская пожарно-спасательная академия Государственной противопожарной службы МЧС России, г. Иваново, Россия.

Статья поступила 8 февраля 2017 г.

Предложены сравнительно простые формулы для расчета температуропроводности численно-аналитическим методом по несимметричному температурному полю $T(x, \tau)$ неограниченной пластины толщиной R , полученному в результате физического эксперимента. Решением обратной задачи теплопроводности значения температуропроводности рассчитывают для каждого временного интервала $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ по температурам в трех точках пластины с координатами $x = 0, z, R$ ($0 < z < R$) для моментов времени τ_i . Выполнена оценка трудоемкости и точности определения температуропроводности $a_\tau(T)$ по тестовому (исходному) температурному полю стальной пластины толщиной $R = 0,07$ м, рассчитанному методом конечных разностей с заданной $a_\tau(T)$ при граничных условиях 2-го и 3-го родов. Функцию $a_\tau(T)$ задавали ломаной линией, а величина a_τ в ходе численного эксперимента изменялась почти в три раза. Среднеквадратичное отклонение $a_\tau(T)$ от исходной зависимости $a_\tau(T)$ для всего диапазона времени составило 3 %. Наибольшие погрешности наблюдались после изменения знака производной $da_\tau(T)/dT$. На линейном участке функции $a_\tau(T)$ погрешность определения температуропроводности не превышала 2 %. Метод сравнительно прост и нагляден, обработку данных несложно автоматизировать. Он не требует строгого соблюдения стандартных граничных условий: постоянства температуры среды, потока теплоты, адиабатных условий на одной из поверхностей пластины, что значительно упрощает организацию эксперимента и позволяет проводить его в реальных условиях эксплуатации материала.

Ключевые слова: определение температуропроводности; обратная задача теплопроводности; численно-аналитический метод; неограниченная пластина; сталь; несимметричное температурное поле.

DETERMINATION OF THE THERMAL DIFFUSIVITY OF A MATERIAL BY THREE POINTS OF THE TEMPERATURE FIELD OF ASYMMETRIC PLATE USING NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD

© А. К. Sokolov

Submitted February 8, 2017.

Relatively simple formulas are derived for calculating the thermal diffusivity by a numerical-analytical method in the asymmetric temperature field $T(x, \tau)$ of an infinite plate of thickness R obtained as a result of a physical experiment. By solving the inverse heat conduction problem, the thermal diffusivity values are calculated for each time interval $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ by the temperatures at three points of the plate with the coordinates $x = 0, z, R$ ($0 < z < R$) for the time moments τ_i . We estimated the complexity and accuracy of the thermal diffusivity determination $a_\tau(T)$ from the test (initial) temperature field of a steel plate (thickness $R = 0.07$ m) calculated by the method of finite differences with a given thermal diffusivity $a_\tau(T)$ under boundary conditions of the second and third kind. The function $a_\tau(T)$ is set by a broken line and the magnitude of a_τ varied almost threefold during numerical experiment. The root-mean-square deviation of $a_\tau(T)$ from the initial dependence $a_\tau(T)$ for the entire time range is 3%. The largest errors are observed after change in the sign of the derivative $da_\tau(T)/dT$. On the linear part of the function $a_\tau(T)$, the error of $a_\tau(T)$ determination did not exceed 2%. The method presented in the article does not require strict compliance with the standard boundary conditions: constant temperature of the ambient media, the same heat flow, adiabatic conditions on one of the plate surfaces, which simplifies the organization of the experiment to be carried out in real conditions of the material operation. The method is relatively simple and illustrative and data processing can be easily programmed using Microsoft Excel.

Keywords: determination of thermal diffusivity; inverse problem of heat conduction; numerical and analytical method; infinite plate; steel; asymmetrical temperature field.

Знание теплофизических характеристик материалов необходимо для математического моделирования температурных полей, например, в нагреваемых или охлаждаемых элементах оборудования, изделиях, подвергающихся тепловой обработке, и др. Точность значений теплофизических характеристик материалов в значительной степени определяет достоверность результатов математического моделирования процессов теплопереноса при решении задач энергосбережения, прогнозирования величин термических напряжений, разрушающих материалы конструкций, и др.

Задачи определения теплофизических характеристик не теряют своей актуальности, поскольку появляются новые материалы, свойства которых неизвестны, а теплофизические свойства известных материалов меняются в ходе их эксплуатации.

Теплофизические характеристики материалов, как правило, определяют в результате теплофизических экспериментов. Полученные данные обрабатывают с помощью методов, основанных на решении обратных задач теплопроводности [1, 2].

Значительная часть известных методов, включая методы регулярного и квазистационарного тепловых режимов, требуют строгого соблюдения граничных условий теплообмена, что усложняет технику проведения эксперимента. Кроме того, многие методы основаны на аналитических решениях уравнения теплопроводности при постоянных, не зависящих от температуры параметрах. Поэтому их сложно использовать в случае определения зависящих от температуры теплофизических характеристик, особенно когда их значения изменяются в несколько раз.

Для определения величин теплофизических характеристик по известному температурному полю применяют метод численно-аналитического моделирования процессов теплопроводности [3–10], который для решения дифференциального уравнения теплопроводности использует аналитические решения, полученные для расчетного интервала времени. При этом решение уравнения теплопроводности в частных производных для всего времени нагрева сводится к численному решению одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений.

Получение решений обратных задач теплопроводности для несимметричных температурных полей позволит расширить область применения метода и даст возможность обрабатывать температурные

поля, измеренные в реальных условиях (во время эксплуатации).

Цель работы — расчет температуропроводности численно-аналитическим методом для случая несимметричного температурного поля неограниченной пластины.

Рассмотрим математическое описание процесса теплообмена неограниченной пластины толщиной R , несимметрично нагреваемой сверху ($x = R$) и охлаждаемой снизу ($x = 0$). Схема теплообмена показана на рис. 1.

Примем начальное условие

$$T(X, \tau = 0) = T_{\text{н}}, \quad 0 \leq X \leq 1, \quad (1)$$

и граничные условия 2-го рода

$$\frac{\partial T}{\partial X}(X = 0, \tau) = \frac{q_0 R}{\lambda(T)}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial X}(1, \tau) = \frac{q_1 R}{\lambda(T)}, \quad (3)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К); $X = x/R$ (x — координата, $0 \leq x \leq R$); q_1 и q_0 — удельные потоки теплоты на поверхность ($X = 1$) и с поверхности ($X = 0$) пластины, в общем случае зависящие от времени и условий теплообмена.

Рассмотрим случай, когда из эксперимента известны температуры трех плоскостей: $T_1 = T_1(\tau_i) = T(X = 1, \tau_i)$, $T_Z = T_Z(\tau_i) = T(X = Z)$ и $T_0 = T_0(\tau_i) = T(X = 0)$ для моментов времени τ_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$). (В частном случае $Z = 0,5$ (середина пластины).)

Примем, что в конце расчетного интервала времени $\Delta\tau = \tau_i - \tau_{i-1}$ температура $T(X)$ пластины по ее сечению распределяется по формуле [10]:

$$T(X) = a_0 + a_1 X^2 + a_2(1 - X), \quad 0 \leq X \leq 1, \quad X = x/R, \quad (4)$$

где a_0, a_1, a_2 — коэффициенты аппроксимации (пока неизвестны).

Тогда с учетом (4) выражения для трех температур $T(X)$ с координатами $x = 0$, $x = z$, $x = R$ и относительными координатами $X = 0$, $X = Z$, $X = 1$ для моментов времени τ_i примут вид (здесь и далее для упрощения записи не используем индексы, обозначающие номер момента времени):

$$T_0 = T(0) = a_0 + a_2, \quad (5)$$

$$T_Z = T(Z) = a_0 + a_1 Z^2 + a_2(1 - Z), \quad (6)$$

$$T_1 = T(1) = a_0 + a_1. \quad (7)$$

При известных значениях T_0 , T_Z и T_1 в конце расчетного интервала времени решением линейной системы уравнений (5)–(7) можно получить выражения для расчета коэффициентов a_0, a_1, a_2 .

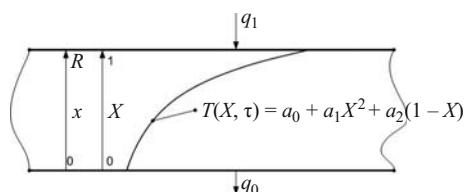


Рис. 1. Схема теплообмена неограниченной пластины толщиной R

Преобразуя уравнения (7) и (5), имеем

$$a_1 = T_1 - a_0, \quad (8)$$

$$a_2 = T_0 - a_0. \quad (9)$$

Выражение для расчета коэффициента a_0 получим из уравнения (6), подставив в него (8) и (9):

$$a_0 = \frac{T_Z - T_1 Z^2 - T_0(1-Z)}{Z - Z^2}. \quad (10)$$

Среднемассовую температуру для распределения температур (4) в конце интервала времени Δt находим интегрированием:

$$\begin{aligned} T_{\text{ср}} &= \int_0^1 T(X) dX = \int_0^1 [a_0 + a_1 X^2 + a_2(1-X)] dX = \\ &= a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение баланса теплоты пластины ($0 \leq x \leq R$) для расчетного интервала времени $\Delta t = \tau_i - \tau_{i-1}$ имеет вид:

$$cR(T_{\text{ср}} - T_{\text{ср,ни}}) = (q_1 - q_0)\Delta\tau, \quad (12)$$

где c — удельная объемная теплоемкость, Дж/(м³ · К); $T_{\text{ср,ни}}$, $T_{\text{ср}}$ — среднемассовые температуры в начале и конце расчетного интервала времени Δt .

Выразим удельные потоки теплоты через градиенты температур с учетом (4) для конца интервала Δt :

$$q_0 = \frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial X}(0, \tau) = -\frac{\lambda}{R} a_2, \quad (13)$$

$$q_1 = \frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial X}(1, \tau) = \frac{\lambda}{R} (2a_1 - a_2). \quad (14)$$

Подставив выражения для описания потоков теплоты (13) и (14) в уравнение баланса теплоты (12), получим

$$cR(T_{\text{ср}} - T_{\text{ср,ни}}) = \frac{\lambda}{R} (2a_1) \Delta\tau. \quad (15)$$

Из уравнения (15) находим формулу для расчета температуропроводности a_τ :

$$a_\tau = \frac{\Delta Fo R^2}{\Delta\tau}, \quad (16)$$

где

$$\Delta Fo = \frac{T_{\text{ср}} - T_{\text{ср,ни}}}{2a_1} \text{ или}$$

$$\Delta Fo = \frac{a_0 + a_1/3 + a_2/2 - T_{\text{ср,ни}}}{2a_1}. \quad (17)$$

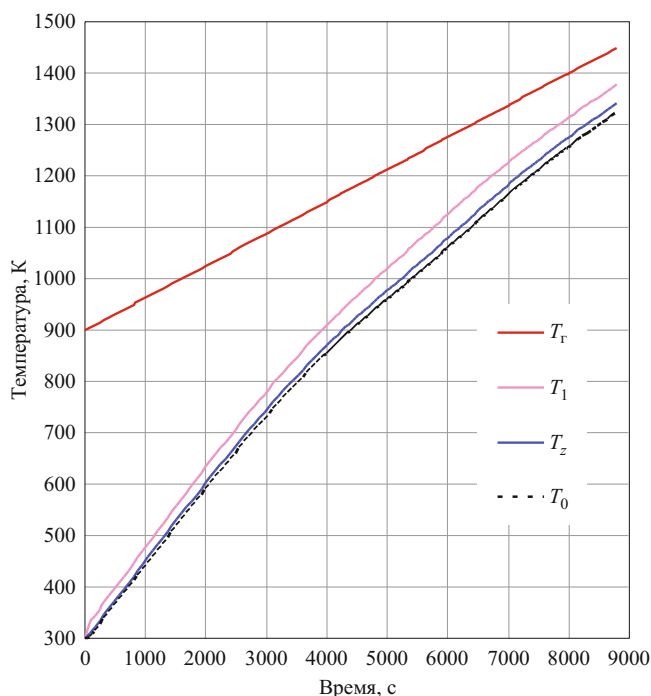


Рис. 2. Температура газа T_g и параметры температурного поля T_1 , T_z и T_0

Численными экспериментами по исследованию погрешности метода установлено [5–10], что величина расчетного интервала времени $\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ примерно должна соответствовать числам Фурье $0,05 < \Delta Fo < 0,12$ ($\Delta Fo = a_\tau \Delta\tau / R^2$, где a_τ — температуропроводность). Значение a_τ , определяемое для интервала времени $\Delta\tau$, можно отнести к среднеинтегральной температуре пластины $T_{\text{ср,инт}} = (T_{\text{ср,i}} + T_{\text{ср,i-1}})/2$ для всего интервала времени или среднемассовой температуре в конце i -го интервала времени $T_{\text{ср,i}}$.

Таким образом, зная экспериментальные температуры поверхностей пластины в трех точках $T_1(\tau_i) = T(1, \tau_i)$, $T_z(\tau_i) = T(X=Z, \tau_i)$ и $T_0(\tau_i) = T(0, \tau_i)$, где $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, можно последовательно, начиная с $i = 1$, определить a_0 , a_1 , a_2 , $T_{\text{ср,i}}$, ΔFo , $a_{\tau,i}$, $q_{0,i}$ и $q_{1,i}$.

Отметим, что $a_{\tau,i}$ можно найти для каждого интервала времени и, следовательно, определить зависимость температуропроводности от температуры $a_\tau(T)$ ($T = T_{\text{ср,инт}}$ или $T = T_{\text{ср,i+1}}$).

Пусть из эксперимента для момента времени (например, $i = 4$) $\tau_4 = 320$ с известны температуры плоскостей пластины толщиной $R = 0,07$ м: $T_1 = T(1, \tau_i) = 369,6$, $T_z = T(Z, \tau_i) = 346,8$ ($Z = 0,5$) и $T_0 = T(0, \tau_i) = 338,1$ К. А $T_{\text{ср,ни}} = T_{\text{ср}}(\tau_3) = 336,8$ К (получена из расчета по предыдущему ($i = 3$) интервалу времени). Среднемассовая температура в начале $i = 1$ -го интервала времени известна из начальных условий: $T_{\text{ср,ни}} = T_{\text{ср}}(\tau_{i=0} = 0) = T_n$.

Рассчитаем коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 :

$$a_0 = \frac{T_z - T_1 Z^2 - T_0(1-Z)}{Z - Z^2} =$$

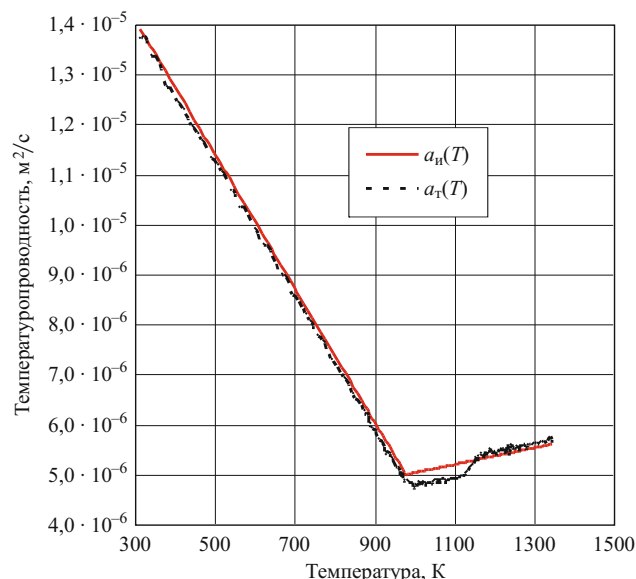


Рис. 3. Зависимости исходной $a_n(T)$ и расчетной $a_t(T)$ температуропроводности от температуры

$$= \frac{346,8 - 369,6 \cdot 0,5^2 - 338,1(1 - 0,5)}{0,5 - 0,5^2} = 341,4 \text{ К},$$

$$a_1 = T_1 - a_0 = 369,6 - 341,4 = 28,2,$$

$$a_2 = T_0 - a_0 = 338,1 - 341,4 = -3,3 \text{ К}.$$

Определим среднемассовую температуру в конце интервала по формуле (10):

$$T_{\text{ср.}i=4} = T_{\text{ср}} = a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{2} = 341,4 + \frac{28,2}{3} - \frac{3,3}{2} = 349,2 \text{ К}.$$

Вычислим ΔFo и температуропроводность a_t по формулам (17) и (16):

$$\Delta Fo = \frac{T_{\text{ср}} - T_{\text{ср.ни}}}{2a^2} = \frac{349,2 - 336,8}{2 \cdot 28,2} = 0,218,$$

$$a_t = \frac{\Delta Fo R^2}{\Delta \tau} = \frac{0,218 \cdot 0,07^2}{320 - 240} = 13,5 \cdot 10^{-6}.$$

Для следующего момента времени ($i = 5$) $\tau_5 = 400$ с расчет выполняется аналогично при $T_{\text{ср.ни}} = T_{\text{ср.}i=4} = 349,2 \text{ К}$.

Видно, что предлагаемый метод достаточно прост.

Точность расчета температуропроводности a_t и границ области применения метода оценивали, используя заранее рассчитанные температурные поля стальных пластин (теплофизическими характеристиками стали a_n , c и λ и граничные условия теплообмена задавались). Расчеты проводили с помощью диалоговой программы для моделирования температурных полей [10].

По вышеописанному алгоритму определяли зависимость температуропроводности материала от тем-

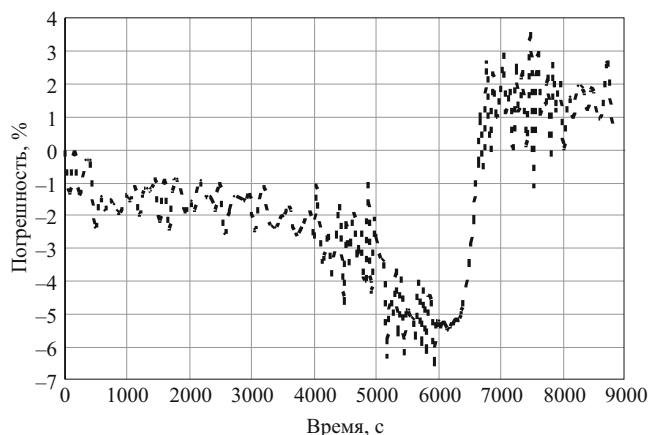


Рис. 4. Относительные погрешности определения температуропроводности по несимметричному температурному полю стальной пластины толщиной $R = 0,07 \text{ м}$

пературы $a_t(T)$ и сравнивали ее с известными значениями $a_n(T)$, при которых рассчитывалось исходное (тестовое) температурное поле.

На рис. 2 приведены температура газа T_r и параметры температурного поля T_1 , $T_{z=0,5}$ и T_0 для стальной пластины толщиной $R = 0,07 \text{ м}$ (интервал времени $\Delta \tau = 80 \text{ с}$). Величина ΔFo менялась от 0,22 до 0,09.

Зависимости коэффициентов тепло- и температуропроводности стали от температуры для тестового поля аппроксимировали ломаными линиями [10] (расчет выполняли при граничных условиях 3-го и 2-го рода):

$$\lambda = 63,404 - 32,56T/1000, \quad T \leq 1142,72 \text{ К},$$

$$\lambda = 16,228 + 8,721T/1000, \quad T > 1142,72; \quad (18)$$

$$a_n = (18,1 - 13,4T/1000) \cdot 10^{-6}, \quad T \leq 977,6,$$

$$a_n = (3,378 + 1,667T/1000) \cdot 10^{-6}, \quad T > 977,6 \text{ К}. \quad (19)$$

Удельные потоки теплоты q_1 и q_0 (Вт/м^2) соответственно на верхнюю поверхность ($X = R$) и с нижней поверхности пластины ($X = 0$) задавали коэффициентами радиационного [$\sigma = 4,0 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$] и конвективного [$\alpha = 30 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$] теплообменов в виде:

$$q_1 = \sigma(T_r^4 - T_1^4) + \alpha(T_r - T_0) =$$

$$= 4,0 \cdot 10^{-8} (T_r^4 - T_1^4) + 30(T_r - T_0), \quad (20)$$

$$q_0 = 1000 + 5T_0. \quad (21)$$

При этом q_0 задавались значительно ниже q_1 , поскольку нижняя поверхность пластины при нагреве обычно теплоизолируется (например, металл на поду печи).

На рис. 3 приведены зависимости исходной $a_n(T)$ и расчетной $a_t(T)$ температуропроводности от температуры, полученные по формулам (17) и (16). Видно, что погрешность расчета значительно возрастает по-

сле изменения знака производной функции $a_n(T)$ при $T \approx 978$ К, а затем снижается.

На рис. 4 показаны относительные погрешности расчетного определения температуропроводности. Видно, что наименьшая (менее 2 %) погрешность наблюдается до момента времени $\tau = 5000$ с, когда производная функции $a_n(T)$ меняет знак с минуса на плюс.

Среднеквадратичное отклонение $a_T(T)$ от исходного $a_n(T)$ для всего диапазона времени составило 3 %. Можно предположить, что для более тонкой пластины и/или при режимах нагрева, близких к режиму $q \approx \text{const}$, погрешности будут меньше.

Выражение (4) довольно точно аппроксимирует распределение температур и их градиентов соответственно по сечению пластины и на ее границах по трем точкам ($X = 1; 0,5; 0$).

На рис. 5 приведены значения потоков теплоты на поверхность ($X = 1$) и с поверхности ($X = 0$), рассчитанные по градиентам температурного поля. Видно, что градиенты температур на обогреваемой поверхности ($X = 1$) определяются точнее. Поток теплоты на поверхность q_1 сначала увеличивается до 52 000, а затем уменьшается до 37 000 Вт/м². При этом поток теплоты с нижней поверхности q_0 постоянно растет.

Для уточнения границ области применения метода температуропроводности по температурному полю стальной пластины толщиной $R = 0,1$ м рассчитывали при аналогичных граничных условиях теплообмена. Среднеквадратичное отклонение зависимости $a_T(T)$ от исходной $a_n(T)$ для всего диапазона времени и температур составило около 5,3 %. Можно предположить, что для рассмотренных условий, чтобы обеспечить приемлемый уровень погрешности, максимальная толщина пластины не должна превышать 0,07 м.

Для описания зависимости $T(X)$ применяли также функцию

$$T(X) = a_0 + a_1 X^2 + a_2 (1 - X)^2. \quad (22)$$

Результаты, полученные при использовании (4) и (22), практически совпали.

Отметим, что в уравнении баланса теплоты (12) используются средние для интервала времени потоки теплоты $q = q_{\text{ср}}$, а в формулах (13) и (14) — потоки теплоты для конца временного интервала $q = q_k$. При выводе формул (16) и (17) и расчете по ним принято, что эти потоки равны. В случае значительных изменений q на расчетном интервале Δt погрешность определения a_T должна увеличиваться, поэтому для повышения точности расчета температуропроводности в формулах (12) – (14) следует использовать разные значения $q_{\text{ср}}$ и q_k .

Таким образом, предложенный алгоритм для расчета температуропроводности численно-аналитическим методом по несимметричному температурному полю $T(x, \tau)$ пластины толщиной R , полученному в результате физического эксперимента, позволил найти

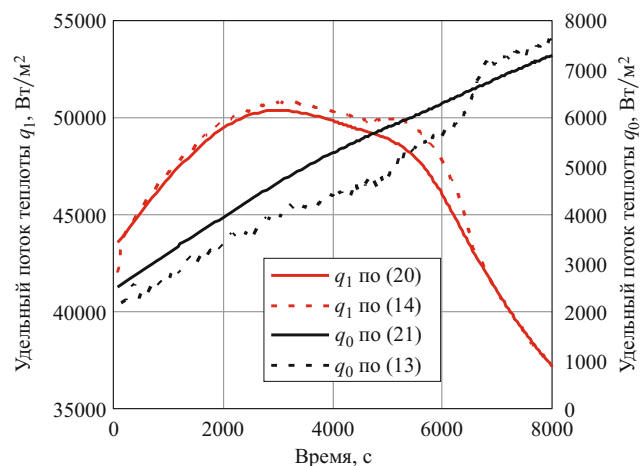


Рис. 5. Исходные (сплошные линии) и расчетные (пунктирные) потоки теплоты на поверхность q_1 [по (14) и (20)] и с поверхности q_0 [по (13) и (21)]

искомые решения. При этом температуропроводность рассчитывается с использованием простых формул для каждого временного интервала $\Delta \tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ по температуре в трех точках с координатами $x = 0, z, R$ ($0 < z < R$) для моментов времени τ_i . Оценка точности определения температуропроводности $a_T(T)$ по тестовому (исходному) температурному полю стальной пластины толщиной $R = 0,07$ м, рассчитанному методом конечных разностей с заданной температуропроводностью $a_n(T)$ при граничных условиях 2-го и 3-го рода, показала, что среднеквадратичное отклонение $a_T(T)$ от исходной зависимости $a_n(T)$ для всего диапазона времени составило 3 %. Наибольшие погрешности отмечены после изменения знака производной $da_n(T)/dT$. На линейном участке $a_n(T)$ погрешность определения температуропроводности не превышала 2 %. Рассмотренный метод не требует строгого соблюдения стандартных (стабильных) граничных условий, что значительно упрощает организацию эксперимента и дает возможность провести его в реальных условиях эксплуатации материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фокин В. М., Чернышов В. Н. Неразрушающий контроль теплофизических характеристик строительных материалов. — М.: Машиностроение-1, 2004. — 212 с.
2. Жуков Н. П., Майникова Н. Ф. Многомодельные методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов и изделий. — М.: Машиностроение-1, 2004. — 288 с.
3. Соколов А. К. К решению обратной задачи теплопроводности для определения температуропроводности материалов численно-аналитическим методом / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2014. Т. 80. № 11. С. 36 – 39.
4. Соколов А. К., Якубина О. А. Определение температуропроводности материалов численно-аналитическим методом при малых числах Фурье / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2016. Т. 82. № 6. С. 27 – 39.
5. Соколов А. К. Численно-аналитический метод расчета несимметричного нагрева пластины с учетом окалинаобразования / Изв. вузов и ЭО СНГ. Энергетика. 1994. № 5 – 6. С. 75 – 80.

6. **Соколов А. К.** Экономичная математическая модель температурного поля двухслойной пластины / Инженерно-физический журнал. 1995. Т. 68. № 2. С. 337 – 338.
7. **Соколов А. К., Попов Г. В.** Решение задач теплопроводности численно-аналитическим методом сложения температурных полей / Изв. РАН. Энергетика. 2002. № 4. С. 118 – 130.
8. **Соколов А. К.** Численно-аналитический метод расчета температурного поля неограниченной пластины при малых числах Фурье / Изв. вузов. Черная металлургия. 2007. № 3. С. 23 – 28.
9. **Соколов А. К.** Численно-аналитический метод расчета температурных полей многослойных пластин в начальной стадии нагрева / Изв. РАН. Энергетика. 2009. № 1. С. 138 – 151.
10. **Соколов А. К.** Математическое моделирование нагрева металла в газовых печах. — Иваново: Ивановский государственный энергетический университет имени В. И. Ленина, 2011. — 396 с.
3. **Sokolov A. K.** To solve the inverse heat conduction problem for the determination of thermal diffusivity materials numerically-analytical method / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2014. Vol. 80. N 11. P. 36 – 39 [in Russian].
4. **Sokolov A. K., Yakubina O. A.** Determination of thermal materials numerical-analytical method for small numbers of Fourier / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2016. Vol. 82. N 6. P. 27 – 39 [in Russian].
5. **Sokolov A. K.** Numerical-analytical method of calculation of asymmetrical heating plate considering scaling / Izv. Vuzov ÉO SNG. Énerget. 1994. N 5 – 6. P. 75 – 80 [in Russian].
6. **Sokolov A. K.** Economical mathematical model of the temperature field of a two-layer plate / Inzh.-Fiz. Zh. 1995. Vol. 68. N 2. P. 337 – 338 [in Russian].
7. **Sokolov A. K., Popov G. V.** Solution heat conduction problems numerically-analytical method of addition of temperature fields / Izv. RAN. Énerget. 2002. N 4. P. 118 – 130 [in Russian].
8. **Sokolov A. K.** Numerical-analytical method of calculation of the temperature field of infinite plate with small Fourier numbers / Izv. Vuzov. Cher. Metallurg. 2007. N 3. P. 23 – 28 [in Russian].
9. **Sokolov A. K.** Numerical-analytical method of calculation of temperature fields of multi-layer plates in the initial stage of the heating / Izv. RAN. Énerget. 2009. N 1. P. 138 – 151 [in Russian].
10. **Sokolov A. K.** Mathematical modeling of the heating of the metal in the gas ovens. — Ivanovo: Izd. Ivanovskii gosudarstvennyi énergeticheskii universitet imeni V. I. Lenina, 2011. — 396 p. [in Russian].

REFERENCES