

Исследование структуры и свойств Structure and properties investigation

Физические методы
исследования и контроля

Physical methods
of investigation and monitoring

DOI: 10.26896/1028-6861-2017-83-12-24-28

УДК (UDC) 539.22:539.32

ИНВАРИАНТЫ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГИХ СВОЙСТВ МОНОКРИСТАЛЛОВ МЕТАЛЛОВ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

© Виктор Васильевич Красавин¹, Алексей Викторович Красавин²

¹ Ковровская государственная технологическая академия, г. Ковров, Россия; e-mail: v.v.krasavin@yandex.ru

² Королевский колледж Лондона, г. Лондон, Великобритания; e-mail: alexey.krasavin@kcl.ac.uk

Статья поступила 4 мая 2017 г.

На основе разработанной методики, заключающейся в преобразовании тензора коэффициентов упругой податливости в главных осях к новой произвольной системе координат с последующим использованием углов Эйлера, для кубических монокристаллов получены в явном виде уравнения компонентов матрицы коэффициентов упругой податливости для произвольных кристаллографических направлений, определяемых углами Эйлера. Углы Эйлера применяли следующим образом: поворот вокруг гексагональной оси z (азимутальный угол α), наклон гексагональной оси до произвольного положения z' (полярный угол β), поворот вокруг нового положения оси z' (угол направления сдвига γ). Анализ полученных уравнений для компонентов матрицы коэффициентов упругой податливости кубических монокристаллов выявил инвариантные комбинации компонентов, на основе которых найдены связи между кубической решеткой и техническими характеристиками упругих свойств монокристаллов металлов (модулем Юнга в произвольном кристаллографическом направлении, модулями сдвига и коэффициентами Пуассона в плоскости, перпендикулярной выбранному кристаллографическому направлению, модулем сдвига при кручении вокруг этого направления и др.). Справедливость полученных зависимостей проверяли расчетами для различных произвольных кристаллографических направлений разных монокристаллов. Приведены расчеты для монокристаллов меди и никеля.

Ключевые слова: кубические монокристаллы; коэффициенты упругой податливости; модули упругости; связи модулей упругости.

INVARIANTS IN ELASTIC PROPERTIES OF METAL SINGLE CRYSTALS OF CUBIC SYMMETRY

© Victor V. Krasavin¹ and Alexey V. Krasavin²

¹ Department of Physics, The Kovrov State Technological Academy, Kovrov, Russia; e-mail: v.v.krasavin@yandex.ru

² Department of Physics, King's College London, University of London, UK; e-mail: alexey.krasavin@kcl.ac.uk

Submitted May 4, 2017.

The equations of the elastic compliance matrix components are derived for arbitrary crystallographic directions determined by the Euler angles for cubic single crystals using the approach [4] developed by the authors which consists in transformation of the elastic compliance tensor in the principal axes into an arbitrary coordinate system with subsequent use of the Euler angles. Euler's angles are applied in the following format: rotation around the hexagonal axis z (azimuth angle α), inclination of the hexagonal axis to an arbitrary position z' (polar angle β), rotation around the new position of z' axis (shear direction angle γ). Analysis of the equations derived for the components of elastic compliance matrix S'_{ij} for cubic single crystals revealed invariant combinations of the components which, in turn, revealed relations between technical characteristics of the elastic properties of cubic single crystals: Young's modulus along an arbitrary crystallographic direction, shear modulus and Poisson's coefficients in a plane perpendicular to the selected crystallographic direction, shear modulus under torsion around this direction, and others. The validity of the obtained relations is verified in the calculations done for arbitrary crystallographic directions and various cubic single crystals. Calculations for single crystals of copper and nickel are presented.

Keywords: cubic single crystals; elastic compliance; moduli of elasticity; coupling between moduli of elasticity.

Применяя монокристаллы металлов в качестве конструкционных материалов, можно получить более высокие прочностные и оптимальные упругие характеристики материала. Перспективно использование монокристаллического состояния материала, получаемого методами направленной кристаллизации, в машино- и приборостроении, в частности, при производстве упругих элементов, линий задержки и др. При этом необходимо знать поведение технических упругих характеристик (модулей Юнга E и сдвига G , коэффициента Пуассона ν) в зависимости от кристаллографических направлений монокристалла, а также соотношения между ними. Для изотропных сред такие инвариантные соотношения известны, например,

$$E = 2G(1 + \nu), \quad E = 3K(1 - 2\nu).$$

Цель работы — определение инвариантных соотношений между техническими характеристиками упругих свойств монокристаллов металлов с кубической решеткой путем получения в явном виде аналитических зависимостей характеристик упругости от кристаллографических направлений в монокристалле.

Согласно обобщенному закону Гука упругие свойства описываются с помощью тензоров четвертого ранга, связывающих тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ϵ_{kl} (первый индекс — направление нормали к площадке, на которую действует компонента напряжения (деформации), второй — направление компоненты напряжения (деформации)) [1]. Теория упругости устанавливает линейную связь между σ_{ij} и ϵ_{kl} , в которой коэффициент пропорциональности — тензор четвертого ранга C_{ijkl} :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Линейную связь между тензорами ϵ_{ij} и σ_{kl} можно записать в обратной форме, более удобной для дальнейших расчетов:

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где S_{ijkl} — тензор коэффициентов упругой податливости.

Так как тензоры S_{ijkl} и C_{klij} обратны друг другу, можно найти связь между их компонентами. Свойство симметрии дает возможность свернуть по парам индексов трехмерный тензор четвертого ранга S_{ijkl} до шестимерного тензора второго ранга S_{ij} и представить обобщенный закон Гука в матричной форме:

$$\epsilon_i = S_{ij}\sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad (3)$$

где индексы $i, j = 1, 2, 3$ описывают нормальные напряжения и деформации по осям x, y, z , индексы $i, j = 4, 5, 6$ — сдвиговые напряжения и деформации в плоскостях yz, xz, xy ; S_{ij} — матрица коэффициентов упругой податливости (также симметрична, т.е. $S_{ij} =$

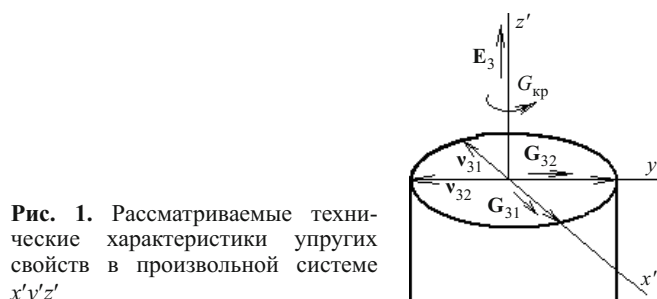


Рис. 1. Рассматриваемые технические характеристики упругих свойств в произвольной системе $x'y'z'$

$= S_{ji}$). Для кубических монокристаллов независимы в этой матрице только S_{11}, S_{12}, S_{44} .

Технические модули упругости выражали через компоненты матрицы S_{ij} . При этом практически значимые для расчета упругих деформаций технические характеристики исследовали в произвольном кристаллографическом направлении (рис. 1), а именно:

модуль Юнга — в кристаллографическом направлении, связанном с осью z' произвольно ориентированной системы отсчета $x'y'z'$:

$$E_3 = 1/S'_{33}$$

(здесь и далее знак «'» свидетельствует о том, что компонента S'_{33} принадлежит тензору в произвольной системе осей $x'y'z'$);

модули сдвига — в двух взаимно перпендикулярных направлениях плоскости, перпендикулярной z' :

$$G_{32} = 1/S'_{44}, \quad G_{31} = 1/S'_{44};$$

модуль сдвига (кручение) — при вращении вокруг выбранного кристаллографического направления z' [2]:

$$G_{кр}^{-1} = S'_{кр} = \frac{S'_{44} + S'_{55}}{2};$$

линейные коэффициенты Пуассона — в двух взаимно перпендикулярных направлениях плоскости, перпендикулярной z' :

$$\nu_{32} = -\frac{S'_{32}}{S'_{33}}, \quad \nu_{31} = -\frac{S'_{31}}{S'_{33}}.$$

Дополнительно анализировали коэффициент Пуассона как характеристику изменения площади сечения s в плоскости, перпендикулярной направлению растяжения (двумерный коэффициент Пуассона):

$$\nu_s = -\frac{\Delta s/s}{2\Delta l/l} = -\frac{S'_{32} + S'_{31}}{2S'_{33}}.$$

Чтобы определить зависимость коэффициентов упругой податливости от произвольных кристаллографических направлений монокристалла и известных значений S_{11}, S_{12} и S_{44} , необходимо привести матрицу S_{ij} в главных осях кристалла, совпадающих с кристал-

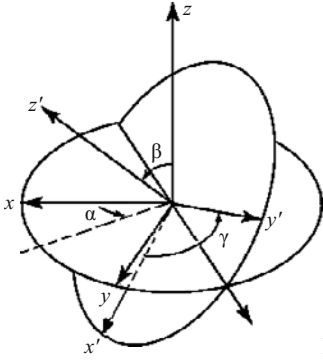


Рис. 2. Углы Эйлера

лографическими направлениями [100], [010], [001], к другим осям $x'y'z'$, связав, например, ось z' новой системы отсчета с выбранным кристаллографическим направлением. Для этого использовали правило преобразования тензоров к новым координатным осям [3]:

$$S'_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}S_{pqrs}, \quad (4)$$

где S'_{ijkl} и S_{pqrs} — компоненты тензоров в системах координат $x'y'z'$ и xyz (главные оси монокристалла); α_{ip} , α_{jq} , α_{kr} , α_{ls} — косинусы углов между соответствующими осями «новой» и «старой» систем координат.

Определив с помощью такого преобразования компоненты тензора S'_{ijkl} , находим искомые характеристики упругости в произвольном кристаллографическом направлении:

$$\begin{aligned} S'_{33} = S'_{3333} &= S_{11} - (2S_{11} - 2S_{12} - S_{44}) \times \\ &\times (\alpha_{31}^2 \alpha_{32}^2 + \alpha_{31}^2 \alpha_{33}^2 + \alpha_{32}^2 \alpha_{33}^2), \\ S'_{44} &= 4S'_{3232} = S_{44} + (4S_{11} - S_{44}) \times \\ &\times (\alpha_{31}^2 \alpha_{21}^2 + \alpha_{32}^2 \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 \alpha_{23}^2) + (8S_{12} + 2S_{44}) \times \\ &\times (\alpha_{31}\alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{21}\alpha_{33}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{23}), \\ S'_{32} = S'_{3322} &= S_{12} + (S_{11} - S_{12}) \times \\ &\times (\alpha_{31}^2 \alpha_{21}^2 + \alpha_{32}^2 \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 \alpha_{23}^2) + \\ &+ S_{44}(\alpha_{31}\alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{21}\alpha_{33}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{23}). \end{aligned}$$

Далее с помощью углов Эйлера [α (поворот вокруг z), β (вокруг y'), γ (поворот вокруг z')] (рис. 2), связанных с коэффициентами α_{ik} , определяли ориентацию исследуемых кристаллографических направлений [4, 5].

Угол α (см. рис. 2) — азимутальный, β — полярный угол сферической системы координат, в которой этими углами можно задать кристаллографическое направление z' . Угол γ указывает направление определения модуля сдвига и коэффициента Пуассона в плоскости, перпендикулярной выбранному кристаллографическому направлению z' .

Путем перехода к произвольной системе отсчета $x'y'z'$ и преобразований углов Эйлера получили в явном виде аналитические выражения для коэффициентов упругой податливости S'_{ij} в произвольном кристаллографическом направлении кубических кристаллов. Для компоненты S'_{33} матрицы коэффициентов упругой податливости, через которую выражается модуль Юнга в направлении z' , имеем:

$$S'_{33} = E_{33}^{-1} = S_{11} - 2S(\cos^2\alpha \sin^2\alpha \sin^4\beta + \cos^2\beta \sin^2\beta), \quad (5)$$

где $S = S_{11} - S_{12} - S_{44}/2$, S_{11} , S_{12} и S_{44} — компоненты матрицы коэффициентов упругой податливости в главных осях.

Компоненты матрицы S'_{jj} ($j = 4, 5$) коэффициентов упругой податливости, через которые выражаются модули сдвига в плоскости, перпендикулярной z' , зависят не только от углов α и β , но и от угла γ , указывающего направление сдвига. Для них преобразование Эйлера приводит к выражению

$$\begin{aligned} S'_{jj}(\alpha, \beta, \gamma) &= G^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = S_{44} + \\ &+ 8S[\sin^2\alpha \cos^2\alpha \sin^2\beta \cos^2\gamma + \\ &+ \frac{\sin\beta \sin(2\beta) \sin(4\alpha) \sin\gamma \cos\gamma}{8} + \\ &+ \sin^2\beta \cos^2\beta (1 - \sin^2\alpha \cos^2\alpha) \sin^2\gamma]. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом надо иметь в виду, что γ отсчитывается от оси x' , а поворот вокруг z' на угол $\gamma = 90^\circ$ приводит к смене индексов в компоненте S'_{jj} , т.е.

$$S'_{jj}(\alpha, \beta, 0) = S'_{55}(\alpha, \beta), \quad S'_{jj}(\alpha, \beta, 90^\circ) = S'_{44}(\alpha, \beta).$$

Наконец, для последней необходимой для определения технических характеристик упругих свойств компоненты S'_{3j} ($j = 1, 2$), через которую выражаются поперечное сужение при растяжении, а следовательно, и коэффициенты Пуассона для выбранного кристаллографического направления, в результате преобразований имеем:

$$\begin{aligned} S'_{3j}(\alpha, \beta, \gamma) &= S_{12} + \\ &+ 2S[\sin^2\alpha \cos^2\alpha \sin^2\beta \cos^2\gamma + \\ &+ \frac{1}{8} \sin\beta \sin(2\beta) \sin(4\alpha) \sin\gamma \cos\gamma + \\ &+ \sin^2\beta \cos^2\beta (1 - \sin^2\alpha \cos^2\alpha) \sin^2\gamma]. \end{aligned} \quad (7)$$

Как и для (6), справедливым остается условие

$$S'_{3j}(\alpha, \beta, 0) = S'_{31}(\alpha, \beta), \quad S'_{3j}(\alpha, \beta, 90^\circ) = S'_{32}(\alpha, \beta).$$

Из полученных выражений можно сделать ряд важных выводов о поведении компонентов матрицы коэффициентов податливости при изменении кристаллографического направления и направлений сдвига. Во-первых, сумма компонентов S'_{jj} ($j = 4, 5$) матрицы коэффициентов упругой податливости для сдвига во взаимно перпендикулярных направлениях не зависит от угла γ . Это означает, что угловая анизотропия сдвига в плоскости, перпендикулярной произвольно выбранному кристаллографическому направлению, такова, что сумма коэффициентов упругой податливости сдвигу в любых двух взаимно перпендикулярных направлениях постоянна:

$$S'_{jj}(\alpha, \beta, \gamma) + S'_{jj}(\alpha, \beta, \gamma + 90^\circ) = 2S_{44} + 8S(\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \sin^4 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \beta) = \text{const.}$$

Аналогичным свойством обладают и компоненты S'_{3j} ($j = 1, 2$), через которые выражается поперечное сужение при растяжении по z' :

$$S'_{3j}(\alpha, \beta, \gamma) + S'_{3j}(\alpha, \beta, \gamma + 90^\circ) = 2S_{12} + 2S(\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \sin^4 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \beta) = \text{const.}$$

Через эти суммы для модуля сдвига при кручении $G_{\text{кр}}$ и коэффициента Пуассона, характеризующего изменение площади поперечного сечения при растяжении, можно записать:

$$G_{\text{кр}}^{-1} = S'_{\text{кр}} = \frac{S'_{44} + S'_{55}}{2} = S_{44} + 4S(\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \sin^4 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \beta), \quad (8)$$

$$\nu_s = -\frac{S_{12} + S(\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \sin^4 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 \beta)}{S'_{33}}. \quad (9)$$

Во-вторых, из уравнений (6) и (7) следует, что в кубическом кристалле существуют два кристаллографических направления ($[001]$ и $[111]$, а также физически эквивалентные им направления), для которых коэффициенты сдвиговой податливости и линейные коэффициенты Пуассона в плоскости, им перпендикулярной, не зависят от γ , т.е. обладают свойством изотропии.

В-третьих, из анализа выражений следует, что существуют комбинации компонентов матрицы S'_{ij} коэффициентов упругой податливости, не зависящие от выбора кристаллографического направления. Таких независимых инвариантов, численные значения которых определяются комбинациями компонентов матрицы модулей упругой податливости в главных осях, как минимум три:

$$2S'_{33} + S'_{\text{кр}} = \text{inv}1 = 2S_{11} + S_{44},$$

$$S'_{33} + S'_{3j}(\gamma) + S'_{3j}(\gamma + 90^\circ) = \text{inv}2 = S_{11} + 2S_{12},$$

$$S'_{jj}(\gamma) - 4S'_{3j}(\gamma) = \text{inv}3 = S_{44} - 4S_{12}. \quad (10)$$

Эти инварианты позволяют упростить расчет технических характеристик упругости в кубических кристаллах и найти полезные соотношения между ними.

Из первого инварианта следует связь модулей Юнга и сдвига для кручения в любом кристаллографическом направлении:

$$2E^{-1} + G_{\text{кр}}^{-1} = \text{inv}1 = 2S_{11} + S_{44}; \quad (11)$$

Результаты расчета инвариантов (для монокристаллов никеля и меди)

	<i>inv</i> 1	<i>inv</i> 2, $\cdot 10^{-3}$	<i>inv</i> 3	<i>E</i> , ГПа	<i>G</i> _{кр} , ГПа	ν_s	$\nu(\alpha, \beta, \gamma)$
Cu, $\alpha = \pi/3, \beta = \pi/4, \gamma = \pi/5$							
<i>inv</i> (<i>E</i> , <i>G</i> , ν)	0,043	2,43	0,038	159	32,6	0,306	0,56
<i>inv</i> (<i>S</i> ₁₁ , <i>S</i> ₁₂ , <i>S</i> ₄₄)	0,043	2,43	0,038				
Cu, $\alpha = \pi/4, \beta = \pi/2, \gamma = 0$ (ауксетическое направление $[110]$)							
<i>inv</i> (<i>E</i> , <i>G</i> , ν)	0,043	2,43	0,038	159	32,6	0,306	-0,136
<i>inv</i> (<i>S</i> ₁₁ , <i>S</i> ₁₂ , <i>S</i> ₄₄)	0,043	2,43	0,038				
Cu, $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/6, \gamma = \pi/7$							
<i>inv</i> (<i>E</i> , <i>G</i> , ν)	0,043	2,43	0,038	110	39,8	0,366	0,37
<i>inv</i> (<i>S</i> ₁₁ , <i>S</i> ₁₂ , <i>S</i> ₄₄)	0,043	2,43	0,038				
Ni, $\alpha = \pi/3, \beta = \pi/4, \gamma = \pi/5$							
<i>inv</i> (<i>E</i> , <i>G</i> , ν)	0,023	1,85	0,019	268	64,7	0,252	0,43
<i>inv</i> (<i>S</i> ₁₁ , <i>S</i> ₁₂ , <i>S</i> ₄₄)	0,023	1,85	0,019				
Ni, $\alpha = \pi/4, \beta = \pi/2, \gamma = 0$ (ауксетическое направление $[110]$)							
<i>inv</i> (<i>E</i> , <i>G</i> , ν)	0,023	1,85	0,019	233	71,0	0,285	-0,068
<i>inv</i> (<i>S</i> ₁₁ , <i>S</i> ₁₂ , <i>S</i> ₄₄)	0,023	1,85	0,019				
Ni, $\alpha = \pi/5, \beta = \pi/6, \gamma = \pi/7$							
<i>inv</i> (<i>E</i> , <i>G</i> , ν)	0,023	1,85	0,019	205	77,4	0,311	0,35
<i>inv</i> (<i>S</i> ₁₁ , <i>S</i> ₁₂ , <i>S</i> ₄₄)	0,023	1,85	0,019				

из второго — связь модуля Юнга в любом кристаллографическом направлении и двумерного коэффициента Пуассона:

$$E^{-1}(1 - 2\nu_s) = inv2 = S_{11} + 2S_{12}; \quad (12)$$

из третьего — связь модуля Юнга в произвольном кристаллографическом направлении, модуля сдвига в любом направлении плоскости, перпендикулярной выбранному кристаллографическому направлению, и линейного коэффициента Пуассона в том же направлении:

$$G^{-1}(\gamma) + 4E^{-1}\nu(\gamma) = inv3 = S_{44} - 4S_{12}. \quad (13)$$

В таблице приведены результаты проверки справедливости полученных соотношений путем сравнения инвариантов $inv(E, G, \nu)$ и $inv(S_{ij})$, рассчитанных по техническим характеристикам и компонентам матрицы модулей упругой податливости в главных осях соответственно. При расчетах использовали программу Mathcad для произвольных кристаллографических направлений (α, β, γ произвольны) и разных монокристаллов. Коэффициенты упругой податливости рассчитывали по модулям упругости [6, 7].

Видно, что инвариантные соотношения (11) – (13) справедливы в том числе и для кристаллографических направлений, обладающих ауксетическими свойствами ($\nu < 0$).

Соотношение (11) используют также в форме [2]:

$$2E^{-1} + G_{кр}^{-1} = \text{const.}$$

Однако численное значение константы не определено. Вместе с тем в соотношениях (11) – (13) численные значения инвариантов определены через компоненты матрицы коэффициентов упругой податливости в главных осях S_{11} , S_{12} и S_{44} (каждый монокристалл имеет собственные численные значения инвариантов).

Уравнения (11) – (13) позволяют исключить компоненты матрицы коэффициентов упругой податливости в главных осях и получить соотношение, связывающее модуль Юнга и сдвига ($G_{кр}$, $G(\nu)$), а также коэффициенты Пуассона (ν_s , $\nu(\gamma)$):

$$E = 4G_{кр}G(\gamma) \frac{\nu_s - \nu(\gamma)}{G_{кр} - G(\gamma)}. \quad (14)$$

Эта связь технических характеристик упругих свойств не зависит от характеристик упругости обобщенного закона Гука и верна для любых кубических монокристаллов и кристаллографических направлений в них, кроме направлений [001] и [111], при которых вследствие изотропии модуля сдвига и коэффици-

ента Пуассона в плоскости, им перпендикулярной, дробный множитель в формуле (14) становится неопределенным. Справедливость формулы (14) подтверждали расчетами модуля Юнга (по формулам (5) и (14)) для различных произвольных кристаллографических направлений разных монокристаллов.

Таким образом, на основе анализа уравнений для компонентов матрицы коэффициентов упругой податливости кубических монокристаллов получены инвариантные комбинации компонентов этой матрицы, найдены не известные ранее связи между техническими характеристиками упругих свойств монокристаллов металлов и сплавов с кубической решеткой, проведена проверка соотношений между техническими характеристиками упругих свойств для произвольных кристаллографических направлений ряда монокристаллов. Выявленные инвариантные связи технических характеристик упругости найдут практическое применение, например, в расчетах жесткости изделий и элементов конструкций, выполненных из кубических монокристаллов, в определении оптимального направления роста монокристаллов в технологиях направленной кристаллизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 415 с.
2. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. — М.: Наука, 1979. — 639 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1977. — 639 с.
4. Красавин В. В., Красавин А. В. Расчет характеристик сдвиговой упругости в кубических кристаллах / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. Т. 70. № 2. С. 32 – 35.
5. Красавин В. В., Красавин А. В. Анизотропия упругих свойств монокристаллов металлов кубической системы. — Лап Ламберт академик паблишинг (Германия), 2011. — 106 с.
6. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. — М.: Мир, 1972.
7. Адамеску Р. А., Гельд П. В., Митюшов Е. А. Анизотропия физических свойств металлов. — М.: Metallurgiya, 1985. — 136 с.

REFERENCES

1. Lekhnitskii S. G. Theory of elasticity of an anisotropic body. — Moscow: Nauka, 1977. — 415 p. [in Russian].
2. Sirotnin Yu. I., Shaskol'skaya M. P. Fundamental crystallography. — Moscow: Nauka, 1979. — 639 p. [in Russian].
3. Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. — Moscow: Nauka, 1977. — 639 p. [in Russian].
4. Krasavin V. V., Krasavin A. V. Calculation of shear elasticity characteristics in cubic crystals / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2004. V. 70. No 2. P. 32 – 35 [in Russian].
5. Krasavin V. V., Krasavin A. V. Anisotropy of elastic characteristics of cubic single crystals. — Lap Lambert academic publishing, 2011. — 106 p. [in Russian].
6. Truwell R., Elbaum Ch., Cheek B. Ultrasonic methods in solid state physics. — Moscow: Mir, 1972 [Russian translation].
7. Adamesku R. A., Gel'd P. V., Mityushov E. A. Anisotropy of physical properties of metals. — Moscow: Metallurgiya, 1985. — 136 p. [in Russian].