

**Механика материалов:
прочность, ресурс, безопасность****Materials mechanics:
strength, durability, safety**

DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-1-I-50-55

УДК (UDC) 620.17:519.24

**СТАТИСТИЧЕСКИЙ И ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКИХ
СВОЙСТВ ДЛЯ РАЗНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ВЫБОРОК¹**© **Николай Андреевич Махутов, Владимир Васильевич Зацаринный**

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Москва, Россия; e-mail: v.zatsar@mail.ru

Статья поступила 31 марта 2017 г.

В статье представлено расчетно-экспериментальное моделирование вариаций технологий для стали 15Х2НМФА при комнатной температуре в целях определения возможных изменений предела прочности при наличии ограниченного числа плавов. Известно, что выборочные испытания одной плавки стали не в состоянии достаточно полно охарактеризовать рассеяние прочности в области малых и больших вероятностей. Увеличение общего числа образцов и количества плавов позволяет повысить точность определения исследуемых характеристик материала в области больших и малых вероятностей (1 – 5 %), а также оценить особенности межплавочного рассеяния. По разработанной методике поэтапного «смешивания» технологических выборок (от одной до семи выборок и от 29 до 116 значений переменных) определяли и оценивали значения параметров функций распределения и функций плотности вероятностей. Исследования показали, что при расширении диапазона функций распределения до вероятностей 1 – 99 % с увеличением числа образцов и количества плавов нормальные функции распределения механических свойств обычно остаются подобными как для одной плавки, так и для суммы нескольких плавов (межплавочный разброс). Анализ данных показал, что наблюдается тенденция к возрастанию коэффициента вариации по сумме нескольких плавов в 3 – 3,5 раза. При этом закон распределения становится близким к двухпоровому. В определенных случаях сочетания плавов с плавкой ниже бракованного уровня свойств возможно возникновение так называемых «тяжелых хвостов» на кривых распределений при низких вероятностях, т. е. возникает выброс данных в область минимальных значений за границы доверительных интервалов 95 %. Появление «тяжелых хвостов» существенно затрудняет использование минимальных гарантированных свойств (без проведения соответствующих испытаний) и ведет к неконсерватизму в расчетах прочности и ресурса. Вопросы данных исследований становятся наиболее актуальными в анализе безопасности и рисков.

Ключевые слова: моделирование технологий; вероятностный анализ механических свойств; оценка межплавочного рассеяния; статистики распределений; «тяжелые хвосты» распределений.

**THE STATISTICAL AND PROBABILISTIC ANALYSIS OF THE MECHANICAL
PROPERTIES FOR DIFFERENT TECHNOLOGICAL SAMPLES**© **Nikolay A. Makhutov, Vladimir V. Zatsarinnyy**

Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia; e-mail: v.zatsar@mail.ru

Submitted March 31, 2017.

A computational and experimental modeling of the scatter in technologies is presented for steel 15Kh2NMFA at room temperature to reveal possible variations in the ultimate strength at a limited number of melts. The developed method of step-by-step “mixing” of technological samples (up to seven samples) is used to determine and assess the values of the parameters of the distribution functions and probability density functions. An increase in the total number of samples and melts makes it possible to improve the accuracy of the determination of the material characteristics in the region of large and small probabilities (1 – 5%) and estimate the features of intra-melt scattering. The results showed that with the extension of the range of distribution functions to probabilities of 1 – 99% with increasing

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-19-00776-П.

number of samples and the number of melts, the normal distribution functions of the mechanical properties usually remain similar and close to the two-threshold distribution both for single melt and for the sum of several melts (a trend to 3 – 3.5 -fold increase of intra-melt scattering is observed). “Heavy tails” can appear on the distribution curves at low probabilities (below the defective level). Presence of “heavy tails” interferes with direct use of the minimum guaranteed properties without relevant tests and leads to violation in strength and resource calculations. The considered problems also touch on the analysis of safety and risks.

Keywords: modeling of technologies; probabilistic analysis of the mechanical properties; estimation of inter-melting scattering; distribution statistics; “heavy tails” of distributions.

При решении задач оценки прочностной надежности конструктивных элементов ответственных технических систем важное значение имеет возможность получения гарантированных характеристик механических свойств материала, из которого изготовлена конструкция, для заданных уровней вероятностей.

Ранее рассмотрены случаи вероятностного анализа характеристик прочности, пластичности материала и долговечности при однородном напряженном состоянии для однородной плавки (т. е. для одной плавки с отработанной технологией). Но для изготовления конструкций часто используют материалы одной марки, но разных (нескольких) плавок, зачастую полученных на разных заводах, с возможными отклонениями в технологиях.

В связи с этим можно предположить, что характеристики рассеяния базовых свойств материала, влияющие на рассеяние циклической прочности и долговечности конструкций, могут зависеть от количества плавок и возможных отклонений в технологии, которые заранее могут быть неизвестны.

При решении этой проблемы в машиностроении применяют различные методы. Для единичных уникальных объектов, где прочностная надежность должна быть максимально гарантирована, используют одну или несколько плавок с выдерживанием уровня отработанной заводской технологии, проводя при этом необходимые экспериментальные исследования по определению истинных механических свойств.

Для локальной серии объектов используют ограниченное число плавок с отработанной технологией и выборочным контролем характеристик. При переходе к серийному и массовому производству изделий количество плавок, естественно, возрастает и они могут поступать от разных поставщиков. В этом случае возникает вопрос: как в условиях серийного производства при неизбежной вариации рассеяний характеристик основных механических свойств оценивать прочность конструкций. Очевидно, что в этих случаях оказывается невозможным тщательно оценить различия среди большого количества плавок, поэтому следует ориентироваться на не-

которые контрольные эксперименты и расчетный анализ по плавкам [1 – 3].

Данный анализ предусматривает два предельных случая: 1) распределение свойств, влияющее на циклическое нагружение, оценивается для одной плавки; 2) такой же или подобный характер распределения свойств определяется для большого числа плавок. В рамках данной задачи рассмотрим возможные вариации свойств и долговечности при наличии ограниченного числа плавок для объектов малых серий.

Использовали параметрический подход при оценке вида теоретической функции распределения случайной величины (на примере характеристики временного сопротивления σ_b для стали 15Х2НМФА при 20 °С) и определении значений параметров этой функции по имеющейся выборке случайных данных. Из проведенных ранее исследований [2, 3] установлено, что функции распределения $F(x)$ в диапазоне вероятностей 5 – 95 % основных механических свойств (ОМС) соответствуют нормальному закону распределения:

$$P = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2S^2}\right] dx, \quad (1)$$

где $\bar{x}$ — среднее арифметическое; S^2 — выборочная дисперсия случайной величины X .

В качестве исходного для анализа выбрано экспериментальное распределение временного сопротивления σ_b при комнатной температуре конструкционной стали 15Х2НМФА, состоящее из 29 образцов (рис. 1).

Для каждого члена вариационного ряда численны: $P = W(x) = \{i - 0,5\}/n$ — накопленная частота, характеризующая оценку вероятности события, где i — номер образца в вариационном ряду; Z_P — квантиль уровня P нормального распределения нормированной случайной величины $Z = (x - \bar{x})/S$; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S} \exp\left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2S^2}\right]$ — нормальная плотность вероятности, где $\bar{x}$ и S^2 — параметры распределения.

Оценку вариабельности механических свойств плавок и определение в связи с этим выборочных статистик распределений (характе-

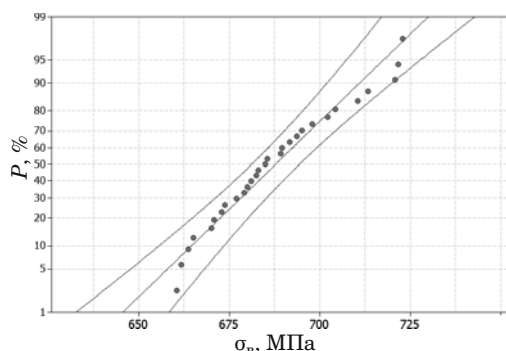


Рис. 1. Функция распределения временного сопротивления σ_b (ряд 1, $n = 29$)

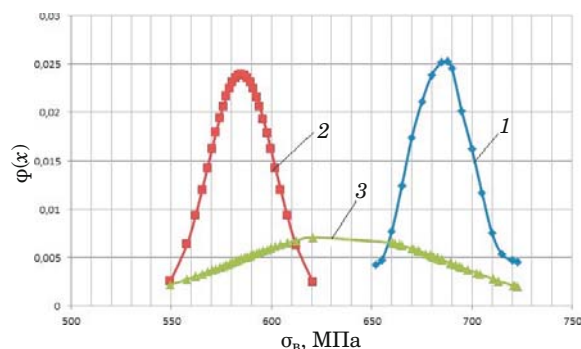


Рис. 2. Функции нормальных плотностей вероятностей рядов 1 ($n = 29$), 2 ($n = 29$), 3 ($n = 58$): 1 – 3 соответствуют рядам 1, 2, 3

ристик рассеяния) предела прочности — временного сопротивления σ_b как для экспериментального ряда 1, так и всех последующих рядов (плавов) проводили на основе программного продукта Minitab 16 и методических подходов, представленных в [4 – 7]. Для ряда 1 они составили: $\bar{x} = 687,7$ МПа; $S = 18,11$ МПа; $u = 0,0263$ — коэффициент вариации.

Из рис. 1 видно, что экспериментальное распределение механической характеристики σ_b удовлетворительно аппроксимируется прямой в предположении нормального закона распределения (здесь же нанесены границы 95 %-ной доверительной области теоретического распределения).

На рис. 2 приведена функция плотности распределения вероятностей $\varphi(x)$ (дифференциальная функция) для ряда 1.

Рассмотрим, как изменятся функция нормального распределения, ее параметры и выборочные статистики (рассеяние), если выборка значений случайной величины X_i , $i = 1, \dots, N$, будет состоять, как это часто случается на практике, из данных нескольких плавов. Определим, возможно ли, используя данное нормальное распределение, вычислять гарантированные характеристики механических свойств для заданных уровней вероятностей P для использования их в расчете на прочность и ресурс.

Предлагаемая методика исследований предусматривает поэтапное «смешивание» первоначальной экспериментальной выборки по временному сопротивлению σ_b (ряд 1) с дополнитель-

ными теоретическим выборками такого же размера (29 образцов), распределяемыми по нормальному закону, но несколько отличающимся по своим параметрам ($\bar{x}$, S), что моделирует вариацию технологий. Одновременно можно сопоставлять и оценивать новые увеличенные выборки по получаемым кривым распределения $F(x)$ и кривым плотности вероятностей $\varphi(x)$. Расчетные данные по этим выборкам приведены в таблице.

На первом этапе к ряду 1, который представляет внутривыплавочный разброс, был добавлен расчетный ряд 2 с измененными параметрами распределения: с уменьшенными на 15 % средними значениями и увеличенным на 10 % коэффициентом вариации: $\bar{x}_2 = 585$ МПа; $\bar{S}_2 = 16,68$ МПа; $u_2 = 0,0286$. Можно сказать, что ряд 2 имитирует разброс характеристик прочности, характерный для другой плавки. Этот ряд (значение характеристик σ_b для заданных уровней вероятности x_p) рассчитывали по общепринятым зависимостям теории вероятностей и математической статистики [8]. Функция плотности вероятности ряда 2 также представлена на рис. 2.

На основе слияния данных (58 образцов) получили новый теоретический ряд 3 (рис. 3), функция нормальной плотности вероятности которого также приведена на рис. 2.

На рис. 3 виден разрыв функции распределения в виде отсутствия расчетных точек по оси абсцисс в интервале значений σ_b от 620 до 650 МПа, что соответствует вероятностям $P < 1\%$ и $P > 99\%$ для рядов 1 и 2.

Статистические характеристики вариационных рядов

Параметр распределения	σ_b , МПа						
	Ряд 1 ($n = 29$)	Ряд 2 ($n = 29$)	Ряд 3 ($n = 58$)	Ряд 4 ($n = 29$)	Ряд 5 ($n = 87$)	Ряд 6 ($n = 29$)	Ряд 7 ($n = 116$)
$\bar{x}$	687,7	585	634,4	633	635,2	600	626,4
$\bar{S}$	18,11	16,68	54,6	17,3	45,55	88,8	60,7
u	0,0263	0,0285	0,086	0,0273	0,0717	0,148	0,097

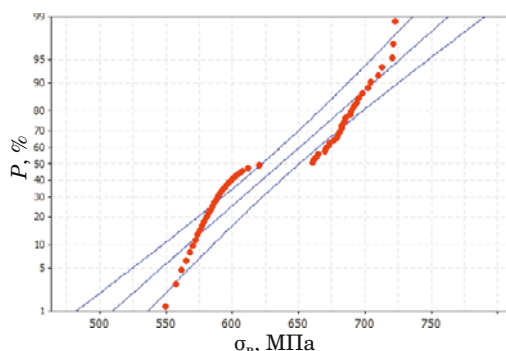


Рис. 3. Функция распределения временного сопротивления σ_b для ряда 3 ($n = 58$)

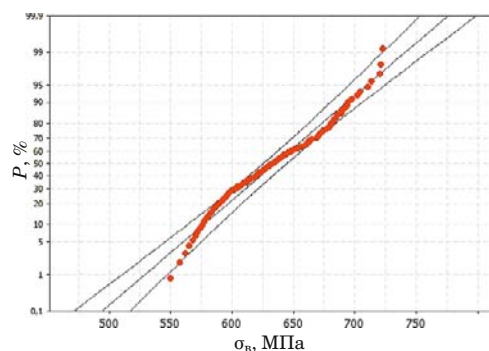


Рис. 5. Функция распределения временного сопротивления σ_b для ряда 5 ($n = 87$)

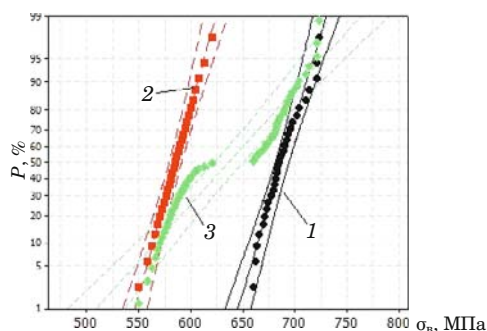


Рис. 4. Функции распределения временного сопротивления σ_b для рядов 1 ($n = 29$), 2 ($n = 29$), 3 ($n = 58$): 1 – 3 соответствуют рядам 1, 2, 3

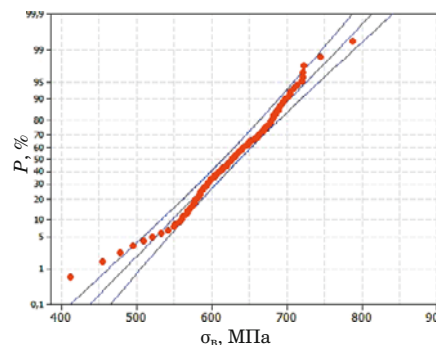


Рис. 6. Функции распределения временного сопротивления σ_b для ряда 7 ($n = 116$)

Функция распределения нового ряда 3 построена с учетом внутриплавочного и межплавочного разбросов. Отмеченный разрыв непрерывности распределения характерным образом отображается на графике нормальной плотности вероятности $\varphi(x)$ для этого ряда (см. рис. 2). Отсутствие точек на этом графике в указанном интервале 620 – 650 МПа (в области средних значений) может говорить о полимодальности (бимодальности) распределения.

Для сравнения на рис. 4 функции распределения временного сопротивления показаны для трех рядов.

Дальнейшее исследование включало последовательное присоединение к ряду 3 (58 образцов) нового расчетного ряда 4 из 29 случайных величин со своими параметрами распределения относительно экспериментального ряда 1 ($\bar{x}_4 = 0,92\bar{x}_1 = 633 \text{ МПа}$, $u_4 = 1,05u_1 = 0,0273$, $S_4 = 17,3 \text{ МПа}$). При этом суммарная выборка случайных данных составила 87 значений, по которым был построен вариационный теоретический ряд 5 ($\bar{x}_5 = 635,2 \text{ МПа}$, $S_5 = 45,55 \text{ МПа}$, $u_5 = 0,072$) (рис. 5). При вероятностях $P < 1$ и $P > 99 \%$ видно наличие двухпорогового распределения. Ряд 5 достаточно хорошо описывается нормальной функцией распределения.

Далее исследовали межплавочный разброс распределения механических свойств, добавив к ряду 5 ряд 6 с сильно измененными характеристиками рассеяния ($\bar{x}_6 = 600 \text{ МПа}$, $S_6 = 88,8 \text{ МПа}$, $u_6 = 0,148$), заведомо имитирующими брак технологического процесса. Получен ряд 7 новое расчетное распределение, состоящее из 116 случайных величин (рис. 6). В этом случае важным представляется отклонение от нормального распределения в области малых вероятностей ($P < 5 \%$) в опасную сторону («тяжелый хвост» распределения). При этом выраженные бимодальность и полимодальность распределения не обнаруживаются.

На рис. 7 и 8 для сравнения представлены соответственно функции распределения временного сопротивления и плотности вероятности для рядов 1, 3, 5 и 7, которые характеризуют возрастание межплавочного разброса данных по пределу прочности на разных стадиях их расширения.

Проводя анализ функций распределения рядов 1 – 7 и их плотностей, можно отметить, что коэффициенты вариации u_σ распределений пределов прочности σ_b для изученных рядов возрастают (см. таблицу), а степени бимодальности и полимодальности сокращаются.

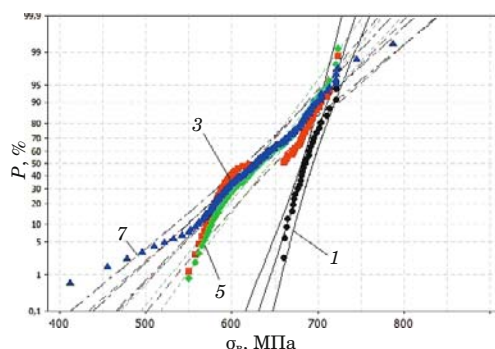


Рис. 7. Функции распределения временного сопротивления σ_b для рядов 1 ($n = 29$), 3 ($n = 29$), 5 ($n = 87$), 7 ($n = 116$); номера рядов соответствуют номерам кривых

Анализ внутриплавочного и межплавочных разбросов позволяет утверждать, что распределение значений предела прочности в основном приближается к нормальному закону со слабо выраженными верхними и нижними порогами, особенно по мере увеличения количества случайных данных в выборке (см. таблицу, ряды 3 и 5). При этом внутриплавочный разброс оказывается меньше (ряд 1 $u = 0,0263$), чем межплавочный (ряд 3 $u = 0,086$, ряд 5 $u = 0,0717$).

Введение в расчетный анализ бракованной выборки — ряда 6 с пониженными значениями предела прочности и чрезмерным рассеянием данных (коэффициент вариации прочности $u = 0,148$ сильно превышает обычно принятые максимальные значения в $0,06 - 0,07$) привело в области малых вероятностей $0,7 - 3,0\%$ к значительному отклонению предела прочности от средних значений и выходу за пределы 95 %-ной доверительной области. Это важное обстоятельство, поскольку в случае использования для изготовления машин и конструкций материала с данным распределением (с учетом внутриплавочного и межплавочного разбросов) необходимо в расчетах циклической прочности и ресурса принимать реальные минимальные значения прочности или исключать использование плавки данного материала как не соответствующей требованиям стандарта в области малых вероятностей для всего набора плавок.

Таким образом, полученные результаты позволяют проследить закономерности вероятностного изменения механических свойств стали 15Х2НМФА (предела прочности) в зависимости от количества плавок, что дает возможность определять межплавочные отклонения.

На примере ряда 1 видно, что выборочные испытания одной плавки стали не достаточно полно характеризуют рассеяние прочности в области малых и больших вероятностей. Принимаемые в детерминированном расчете средние

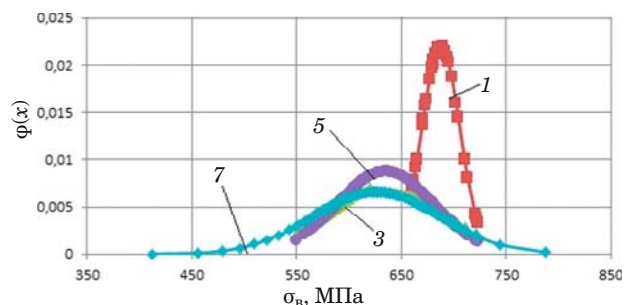


Рис. 8. Функции нормальных плотностей вероятности рядов 1, 3, 5, 7 (соответствуют номерам кривых)

значения (при вероятности $P = 50\%$) обычно значительно отличаются от возможных максимальных ($P > 95\%$) и минимальных ($P < 5\%$) значений для заданной вероятности разрушения. Это указывает на необходимость установления параметров их функций рассеяния.

Увеличение общего числа образцов и количества плавок (ряды 1 – 3) позволяет повысить точность определения исследуемых характеристик материала в области больших и малых вероятностей ($1 - 5\%$), а также оценить особенности межплавочного рассеяния.

Нормальные функции распределения механических свойств обычно остаются подобными как для одной плавки (внутриплавочный разброс), так и для суммы нескольких плавок (межплавочный разброс) с тенденцией увеличения рассеяния исследуемой величины по сумме нескольких плавок и рядов (1 – 5) (в этом случае коэффициент вариации возрастает в 3 – 3,5 раза по сравнению с его значением для ряда 1).

Исследование показало, что исключением является случай, когда в ограниченный массив плавок попадает плавка с характеристиками, которые ниже браковочного уровня. В этом случае вид функции распределения всего массива (ряд 7) изменяется — не обнаруживаются верхние и нижние пороги, при низких вероятностях возникает выброс данных в область минимальных значений за границы доверительных интервалов 95 %. Возникновение «тяжелых хвостов» на кривых распределений существенно затрудняет использование минимальных гарантированных свойств (без проведения соответствующих испытаний) и поиводит к неконсервативным расчетам прочности и ресурса. Эти вопросы становятся наиболее актуальными в анализе безопасности и рисков [3, 9, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей на прочность. — М.: Машиностроение, 1975. — 488 с.

2. Махутов Н. А., Зацаринный В. В., Романов А. Н. и др. Статистические закономерности малоциклового разрушения. — М.: Наука, 1989. — 252 с.
 3. Махутов Н. А., Фролов К. В., Драгунов Ю. Г. и др. Анализ риска и повышение безопасности водо-водяных энергетических реакторов. — М.: Наука, 2009. — 499 с.
 4. Лепихин А. М., Махутов Н. А., Москвичев В. В., Черняев А. П. Вероятностный риск — анализ конструкций технических систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 174 с.
 5. Грив В. В., Петрова И. М., Романов А. Н. Оценка вероятности отказа механических систем путем моделирования технического состояния / Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 5. С. 55 – 60.
 6. Петрова И. М., Гадолина И. В. Оценка рассеяния сопротивления усталости по результатам испытаний ограниченного числа образцов / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2009. Т. 75. № 11. С. 50 – 52.
 7. Ножницкий Ю. А., Качанов Е. Б., Голубовский Е. Р., Кувда В. К. Требования к порядку и процедурам оценки расчетных значений характеристик конструкционной прочности металлических материалов основных и особо ответственных деталей при сертификации авиационных газотурбинных двигателей / Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2015. Т. 14. № 3. Ч. 1. С. 37 – 48.
 8. Степнов М. Н., Зинин А. В. Прогнозирование характеристик материалов и элементов конструкций. — М.: Инновационное машиностроение, 2016. — 391 с.
 9. Махутов Н. А. Прочность и безопасность: фундаментальные и прикладные исследования. — Новосибирск: Наука, 2008. — 528 с.
 10. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Анализ риска и проблем безопасности. В 4-х ч. Ч. 1. Основы анализа и регулирования безопасности / Научн. руковод. К. В. Фролов. — М.: МГФ «Знание», 2006. — 640 с.
- ## REFERENCES
1. Serensen S. V., Kogaev V. P., Shneiderovich R. M. Structural integrity and calculations of details for strength. — Moscow: Mashinostroenie, 1975. — 488 p. [in Russian].
 2. Makhutov N. A., Zatsarinnyi V. V., Romanov A. N., et al. Statistical regularities of low-cycle failure. — Moscow: Nauka, 1989. — 252 p. [in Russian].
 3. Makhutov N. A., Frolov K. V., Dragunov Yu. G., et al. Risk analysis and increase of safety of VVER. — Moscow: Nauka, 2009. — 499 p. [in Russian].
 4. Lepikhin A. M., Makhutov N. A., Moskvichev V. V., Chernyaev A. P. Probabilistic risk analysis of technical systems structures. — Novosibirsk: Nauka, 2003. — 174 p. [in Russian].
 5. Grib V. V., Petrova I. M., Romanov A. N. Estimation of the probability of mechanical systems breakdown by technical state modeling / Probl. Mashinostr. Nadezhn. Mashin. 2016. N 5. P 55 – 60 [in Russian].
 6. Petrova I. M., Gadolina I. V. Evaluation of fatigue resistance scatter from the results of testing a limited number of samples / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2009. Vol. 75. N 11. P 50 – 52 [in Russian].
 7. Nozhnitskii Yu. A., Kachanov E. B., Golubovskii E. R., Kuevda V. K. Requirements for the order and the procedure of estimating structural strength characteristics of metal alloys for main and critical parts of aviation gas turbine engines / Vestn. Samar. Gos. Aërokosm. Univ. 2015. Vol. 14. N 3. Part 1. P 37 – 48 [in Russian].
 8. Stepnov M. N., Zinin A. V. Prediction of the characteristics of materials and structural elements. — Moscow: Innovatsionnoe mashinostroenie, 2016. — 391 p. [in Russian].
 9. Makhutov N. A. Strength and safety: fundamental and applied research. — Novosibirsk: Nauka, 2008. — 528 p. [in Russian].
 10. The safety of Russia. Legal, socio-economic and scientific-technical aspects. Risk and safety analysis. In 4 parts. Part 1. Fundamentals of analysis and safety regulation / K. V. Frolov (ed.). — Moscow: MGF «Znanie», 2006. — 640 p. [in Russian].