DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-3-73-78 УДК (UDC) 519.24

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

© **Виталий Ильич Левин**

Пензенский государственный технологический университет, г. Пенза, Россия; e-mail: vilevin@mail.ru

Статья поступила 29 сентября 2017 г.

При моделировании технических, экономических, социальных систем часто возникает необходимость решения уравнений с интервально определенными параметрами (интервальных уравнений). Решение таких уравнений требует специальных методов, отличных от методов решения обычных, детерминированных уравнений. Предложен новый метод решения интервальных уравнений, основанный на аппарате интервальной математики. Цель работы — разработка полностью формализованного метода решения интервальных уравнений, базирующегося на упомянутом математическом аппарате. Метод заключается в использовании эквивалентных преобразований обеих частей интервального уравнения по законам интервальной математики, позволяющих перейти от интервального уравнения к обычным детерминированным уравнениям и их последующему решению известными методами. Показано, что разнообразные интервальные уравнения можно решить двумя различными методами: множественным и интервальным. Выявлены различия между этими двумя методами в понятии решения уравнения, в используемом математическом аппарате, в возможности точного решения, в мощности получаемого множества решений. Приведен пример решения двумя методами интервального уравнения, используемого при расчете зоны загрязнения опасным веществом. Предложен новый подход к решению интервальных уравнений, основанный на эквивалентном преобразовании уравнения по законам интервальной математики. Такое преобразование позволяет привести уравнение к детерминированному виду, что дает возможность решить его хорошо известными методами решения обычных (детерминированных) уравнений. Разработанный подход позволяет находить точное решение интервального уравнения (если оно существует) или его приближенное решение (если точного решения не существует).

Ключевые слова: интервал; интервальная функция; интервальное уравнение; множественный метод; интервальный метод.

INTERVAL EQUATIONS IN PROBLEMS OF DATA PROCESSING

© **Vitaliy I. Levin**

Penza State Technological University, Penza, Russia; e-mail: vilevin@mail.ru

Submitted September 29, 2017.

In the modeling of technical, economic, social systems, it is often necessary to solve equations with interval-specific parameters (interval equations). The solution of such equations requires special methods that differ from the methods for solving ordinary deterministic equations. A new method for solving interval equations based on the apparatus of interval mathematics is proposed. The aim of the study is to develop a completely formalized method for solving interval equations based on the mathematical apparatus thus mentioned. The method consists in using equivalent transformations of the both parts of the interval equation according to the laws of interval mathematics that allow one to move from the interval equation to the ordinary deterministic equations and their subsequent solution using known methods. It is shown that various interval equations can be solved using two different methods: multiple and interval methods. The differences between these two methods are revealed in the concept of solving the equation, in the mathematical apparatus thus used, in the possibility of exact solution, in the power of the resulting set of solutions. An example of solving the interval equation used in calculation of the contamination zone with a dangerous substance by two aforementioned methods is given. We develop a new approach to solving interval equations based on an equivalent transformation of the equation according to the laws of interval mathematics. Such a transformation allowed us to bring the equation to a deterministic form which makes it possible to solve it by well-known methods of solving ordinary (deterministic) equations. The developed approach provides the exact solution of the interval equation or its approximate solution (in the absence of exact solution).

Keywords: interval; interval function; interval equation; multiple method; interval method.

Современная наука и практика успешно решают задачи исследования систем с полностью определенными параметрами. Они формулируются как задачи расчета, анализа и синтеза различных функций с детерминированными параметрами, служащих характеристиками изучаемых систем. Но на практике чаще встречаются системы с неполностью определенными параметрами. Причины появления таких систем: естественная неопределенность реальных процессов, происходящих в системах; неточное задание параметров большинства систем из-за погрешности при их вычислении или измерении; изменение во времени параметров систем; необходимость совместного исследования семейств однотипных систем, имеющих сходные функции-характеристики и различающихся лишь значениями параметров этих функций. Исследование введенных неопределенных систем формулируется в виде задач расчета, анализа и синтеза различных функций с недетерминированными параметрами, служащих характеристиками данных систем. Эти задачи сложнее упомянутых выше детерминированных аналогов, которые решают при исследовании систем с детерминированными параметрами. Это связано с тем, что алгебра недетерминированных чисел всегда сложнее алгебры детерминированных чисел.

В данной работе рассмотрены задачи нахождения корней интервальных уравнений, которые отличаются от обычных (полностью определенных) тем, что их параметры — неполностью определенные и задаются в виде интервалов возможных значений. Интервальные уравнения встречаются на практике, например, в задачах оптимизации систем в условиях неопределенности, при нахождении критических точек характеристик и точек пересечения характеристик неполностью определенных (эмпирических) моделей и т. д.

Рассмотрим обычное (детерминированное) уравнение с одной переменной

$$f(\mathbf{P}, x) = 0. \tag{1}$$

Здесь f — некоторая детерминированная функция; x — детерминированная переменная; $\mathbf{P}$ — детерминированный вектор параметров вида

$$\mathbf{P} = (p, q, ..., s). \tag{2}$$

Если заменить в уравнении (1) детерминированный вектор параметров $\mathbf{P}$ вектором параметров

$$\widetilde{\mathbf{P}} = (\widetilde{p}, \widetilde{q}, \ldots, \widetilde{s}),$$

где $\widetilde{p} = [p_1, p_2]$, $\widetilde{q} = [q_1, q_2]$, ..., $\widetilde{s} = [s_1, s_2]$ — интервальные параметры, то детерминированная функция f перейдет в соответствующую интервальную функцию $\widetilde{f} = [f_1, f_2]$, а вещественное число 0 — в соответствующее интервальное число $\widetilde{0} = [0, 0]$. В результате детерминированное уравнение (1) перейдет в интервальное уравнение вида

$$\widetilde{f}(\widetilde{\mathbf{P}}, x) = \widetilde{0}. \tag{3}$$

Изучим уравнение (3). Основная задача — нахождение корня (множества корней) уравнения (3), т. е. значений переменной x, которые обращают значение левой части уравнения в значение его правой части, т. е. в интервальный нуль $\widetilde{0}$. Эта задача, в отличие от решения обычного уравнения, носит неоднозначный характер, поскольку пересечение интервальных кривых, определяющее корни интервального уравнения (3), может пониматься в различных смыслах. Этот эффект не возникает при пересечении обычных кривых, с которым связано решение обычного уравнения.

Хотя необходимость решения интервальных и других неточно определяемых (стохастических, нечетких и т. д.) уравнений возникает на практике [1 – 5] достаточно часто, систематическое изучение таких уравнений и методов их решения началось сравнительно недавно. По-видимому, первое упоминание об интервальных уравнениях и методах их решения появилось в книге [6]. В этой работе использован множественный подход, при котором интервальное уравнение (3) рассматривается как множество образующих его обычных уравнений (1), получаемых при варьировании их параметров $\mathbf{P}$ в границах заданных интервальных параметров $\widetilde{\mathbf{P}}$. При этом множество решений интервального уравнения получается как множество решений образующих его обычных уравнений. Аналогичный подход используется в работе [7] для решения конкретного интервального уравнения, полученного в важной прикладной задаче расчета длины опасной зоны загрязнения поверхности токсичным веществом. Краткий обзор различных ситуаций, возникающих при решении практических задач с помощью указанного подхода, приведен в работе [8]. При этом рассматриваются ситуации, моделируемые уравнениями как с одним корнем, так и с двумя или несколькими корнями. Наконец, в работе [9] предложен чисто интервальный подход к решению интервальных уравнений вида (3), при котором такое уравнение рассматривается не как множество обычных уравнений вида (1), а как одно уравнение, имеющее интервальные параметры, а потому подчиняющееся законам интервальной математики. Использование этих законов позволяют совершать эквивалентные преобразования интервального уравнения, упрощая его и приводя к детерминированному виду, из которого непосредственно следует его решение. Таким образом, предложенные в литературе подходы к решению интервальных уравнений существенно различаются по определению того, что считать решением уравнения, и по используемому математическому аппарату. Кроме того, они различаются по своим возможностям в отыскании корней уравнений. В частности, чисто интервальный подход, в отличие от множественного подхода, не всегда обеспечивает существование точного решения интервального уравнения. Однако отсутствие точного решения такого уравнения является не недостатком интервального подхода, а следствием неопределенности задачи, выражающейся в задании параметров уравнения с точностью лишь до интервалов возможных значений [10, 11].

Множественный подход. Будем решать интервальное уравнение (3), используя множественный подход. Рассмотрим первый случай, когда последней операцией в левой части уравнения является сложение. Тогда уравнение (3) можно представить в виде

$$\widetilde{f}_A(\widetilde{\mathbf{P}}, x) + \widetilde{f}_B(\widetilde{\mathbf{P}}, x) = \widetilde{0}, \qquad (4)$$

где $\widetilde{f}_A = [f_{A1}, f_{A2}]$, $\widetilde{f}_B = [f_{B1}, f_{B2}]$ — новые по отношению к $\widetilde{f}$ интервальные функции тех же переменной x и вектора параметров $\widetilde{\mathbf{P}}$. Приняв $\widetilde{f}_B = \widetilde{f}_C$, уравнение (4) перепишем в виде

$$\widetilde{f}_A(\widetilde{\mathbf{P}}, x) = \widetilde{f}_C(\widetilde{\mathbf{P}}, x). \qquad (5)$$

Поскольку интервальные функции в левой и правой частях уравнения (5) графически представляются в виде интервальных кривых, решение этого уравнения сводится к нахождению пересечения двух интервальных кривых, т. е. к определению множества Ω точек (области), принадлежащих обеим интервальным кривым. В этом, очевидно, и проявляется множественный подход к решению интервальных уравнений. При этом собственно решением интервального уравнения (5) является не само указанное выше множество Ω, а его проекция Ω_x на ось X.

Детали множественного алгоритма нахождения решения интервального уравнения покажем на примере решения уравнения с одним корнем.

Пример 1. Найти решение интервального уравнения $e^{-\widetilde{\mathbf{P}}x} = \widetilde{q}x$ с интервальными параметрами $\widetilde{p} = [p_1, p_2]$, $\widetilde{q} = [q_1, q_2]$. Это уравнение используется при расчете длины опасной зоны загрязнения поверхности токсичным веществом. Интервальные кривые, представляющие функции левой и правой частей заданного уравнения, показаны на рис. 1. Здесь A — интервальная кривая $\widetilde{y} = e^{-\widetilde{\mathbf{P}}x}$, где $\widetilde{p} = [p_1, p_2]$; B — интервальная кривая $\widetilde{y} = \widetilde{q}x$, где $\widetilde{q} = [q, q_2]$; A_1 — детерминированная кривая $y = e^{-p_1 x}$; A_2 — детерминированная кривая $y = e^{-p_2 x}$; B_1 — детерминированная кривая $y = q_1 x$; B_2 — детерминированная кривая $y = q_2 x$; Ω — пересечение интервальных кривых A и B; $x^* = [x_1, x_2]$ — проекция Ω на ось X — решение интервального уравнения $e^{-\widetilde{\mathbf{P}}x} = \widetilde{q}x$.

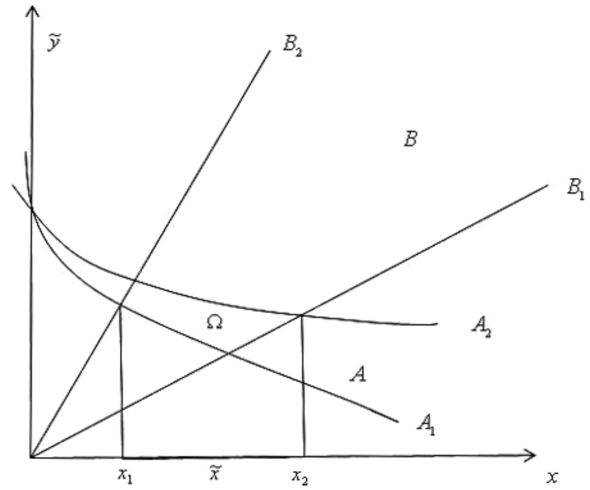

Рис. 1. Кривые, представляющие решение интервального уравнения множественным методом

Из рис. 1 видно, что единственная область Ω, являющаяся общей частью обеих интервальных кривых, расположена между крайней левой (x_1) и крайней правой (x_2) точками. Поэтому проекция Ω_x области Ω на ось X, являющаяся искомым единственным решением уравнения, имеет вид интервала $\widetilde{x} = [x_1, x_2]$. Причем левая граница x_1 этого решения есть точка пересечения кривых A_1 и B_2, т. е. решение обычного детерминированного уравнения $e^{-p_2 x} = q_2 x$, а правая граница x_2 этого решения есть точка пересечения кривых A_2 и B_1, т. е. решение обычного уравнения $e^{-p_1 x} = q_1 x$. Таким образом, для решения заданного интервального уравнения достаточно решить два указанных обычных уравнения.

Пусть, например, надо найти решение конкретного интервального уравнения $e^{-[0{,}5;\,0{,}7]x} = [2, 3]x$. Тогда для определения левой границы решения x_1 следует решить детерминированное уравнение $e^{-0{,}7x} = 3x$, а для нахождения правой границы x_2 — детерминированное уравнение $e^{-0{,}5x} = 2x$. Решая эти уравнения численным методом, находим $x_1 = 0{,}275$, $x_2 = 0{,}408$. Отсюда решение заданного конкретного интервального уравнения получается в виде $\widetilde{x} = [x_1, x_2] = [0{,}275; 0{,}408]$.

Если задано интервальное уравнение, имеющее два или более корней, оно решается путем последовательного вычисления этих корней с использованием алгоритма, примененного выше (см. пример 1).

Мы рассмотрели процедуру множественного подхода к решению интервального уравнения вида (3) в случае, когда последней операцией в левой части уравнения является сложение. Если последняя операция в левой части — умножение, уравнение (3) можно представить в виде

$$\widetilde{f}_A(\widetilde{\mathbf{P}}, x)\widetilde{f}_B(\widetilde{\mathbf{P}}, x) = \widetilde{0} \qquad (6)$$

с теми же функциями $f_A = (\circ)$, $f_B = (\circ)$, что и в формуле (4). Для решения уравнения (6) необходимо решить уравнения

$$\widetilde{f}_A(\widetilde{\mathbf{P}}, x) = \widetilde{0} \text{ и } \widetilde{f}_B(\widetilde{\mathbf{P}}, x) = \widetilde{0}, \qquad (7)$$

в левых частях которых последней операцией является сложение. Благодаря этому уравнения (7) можно решить с помощью алгоритма, изложенного выше.

Интервальный подход. Решим интервальное уравнение (3), используя интервальный подход. Он основан на эквивалентных преобразованиях обеих частей интервального уравнения с помощью подходящих законов интервальной математики. В результате таких преобразований левую и правую части интервального уравнения приводят к явному виду интервала, а все интервальное уравнение — к явному интервальному виду

$$[f_1(\mathbf{P}_f, x), f_2(\mathbf{P}_f, x)] = [\varphi_1(\mathbf{P}_\varphi, x), \varphi_2(\mathbf{P}_\varphi, x)], \qquad (8)$$

где f_1, f_2, φ_1, φ_2 — детерминированные функции переменной x; $\mathbf{P}_f$, $\mathbf{P}_\varphi$ — векторы параметров вида (2). Из уравнения (8), приравняв нижние границы левого и правого интервалов, а также их верхние границы, получаем систему из двух обычных (детерминированных) уравнений, которая эквивалентна исходному интервальному уравнению (8):

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{P}_f, x) = \varphi_1(\mathbf{P}_\varphi, x), \\ f_2(\mathbf{P}_f, x) = \varphi_2(\mathbf{P}_\varphi, x). \end{cases} \qquad (9)$$

Таким образом, если существует решение x^* системы детерминированных уравнений (9), то оно является точным решением интервального уравнения (3). Если система (9) не имеет решения, но первое и второе ее уравнения имеют решения соответственно x_1' и x_2', которые близки, то можно принять $x^* \approx x_1'$ или $x^* \approx x_2'$, или, что, очевидно, лучше $x^* \approx (x_1' + x_2')/2$ или даже $x^* = [x_1', x_2']$. В остальных случаях решения системы детерминированных уравнений (9), а значит, и решения интервального уравнения (3) не существует.

В эквивалентных преобразованиях обеих частей интервального уравнения (3) для приведения его к системе (9) используют следующие законы интервальной математики:

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2];$$

$$[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1];$$

$$k[a_1, a_2] = \begin{cases} [ka_1, ka_2], k > 0, \\ [ka_2, ka_1], k < 0; \end{cases}$$

$$[a_1, a_2][b_1, b_2] = \left[\min_{i,j}(a_i b_j), \max_{i,j}(a_i b_j)\right];$$

$$\frac{[a_1, a_2]}{[b_1, b_2]} = [a_1, a_2]\left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right] = \left[\min_{i,j}\frac{a_i}{b_j}, \max_{i,j}\frac{a_i}{b_j}\right]. \qquad (10)$$

Детали интервального алгоритма поиска решения интервального уравнения поясним, как и выше, на примере решения уравнения с одним корнем.

Пример 2. Найти решение интервального уравнения $e^{-\widetilde{\mathbf{P}}x} = \widetilde{q}x$ с интервальными параметрами $\widetilde{p} = [p_1, p_2]$, $\widetilde{q} = [q_1, q_2]$. Решение данного уравнения множественным способом, с использованием графического представления интервальных кривых было показано выше (см. пример 1). Теперь применим интервальный метод. При этом необходимость графического представления кривых отпадает и процедура отыскания решения интервального уравнения упрощается. Алгоритм решения следующий.

Шаг 1. Приводим левую и правую части уравнения к явному виду интервала. Учитывая, что корень уравнения $x > 0$, а функция e^x — монотонно возрастающая, с помощью (10) находим: правая часть $\widetilde{q}x = [q_1, q_2]x = [q_1x, q_2x]$; левая часть

$$e^{-\widetilde{\mathbf{P}}x} = e^{-[p_1, p_2]x} = e^{-[p_1x, -p_2x]} =$$

$$= e^{[-p_2x, -p_1x]} = [e^{-p_2x}, e^{-p_1x}].$$

Шаг 2. Представляем все уравнения в явном интервальном виде:

$$[e^{-p_2x}, e^{-p_1x}] = [q_1x, q_2x]. \qquad (11)$$

Шаг 3. Переходим от интервального уравнения (11) к системе двух детерминированных уравнений, приравнивая нижние и верхние границы правого и левого интервалов в (11):

$$\begin{cases} e^{-p_2x} = q_1x, \\ e^{-p_1x} = q_2x. \end{cases} \qquad (12)$$

Шаг 4. Решаем систему уравнений (12). Находим корни 1-го уравнения x_1' и 2-го уравнения x_2'. Если $x_1' = x_2'$, то существует точное решение системы (12), которое равно $x^* = x_1' = x_2'$. Оно же является решением заданного интервального уравнения. Если $x_1' \neq x_2'$, то точное решение системы (12) и, соответственно, интервального уравнения не существует. Однако при $x_1' \approx x_2'$ имеется приближенное решение x^* системы (12) и интервального уравнения: $x^* \approx x_1'$ или $x^* \approx x_2'$, или $x^* \approx (x_1' + x_2')/2$, или $x^* = [x_1^*, x_2^*]$, где $x_1^* = \min(x_1', x_2')$, $x_2^* = \max(x_1', x_2')$. При существенно различных x_1' и x_2' решения системы (12) и интервального уравнения не существует.

Найдем решение того же конкретного интервального уравнения, что и в *примере 1*: $e^{-[0,5;\,0,7]x} = [2, 3]x$. В данном случае система (12) приобретает вид

$$\begin{cases} e^{-0,7x} = 2x, \\ e^{-0,5x} = 3x. \end{cases} \qquad (13)$$

Решая 1-е и 2-е уравнения (13) численным методом, находим их решения в виде $x_1' = 0{,}381$, $x_2' = 0{,}289$. Здесь $x_1' \neq x_2'$, так что точного решения системы (13) заданного интервального уравнения не существует. Однако можно считать, что $x_1' \approx x_2'$ и потому существует приближенное их решение

$$x^* \approx 0{,}381 \text{ или } x^* \approx 0{,}289,$$

$$\text{или } x^* \approx (0{,}381 + 0{,}289)/2 = 0{,}335,$$

$$\text{или } x^* = [0{,}289,\ 0{,}381]. \qquad (14)$$

Интервальные кривые, представляющие функции левой и правой частей рассмотренного в *примере 2* интервального уравнения, показаны на рис. 2, где A — интервальная кривая $\widetilde{y} = e^{-\widetilde{\mathbf{P}}x}$, где $\widetilde{p} = [p_1, p_2]$; B — интервальная кривая $\widetilde{y} = \widetilde{q}x$, где $\widetilde{q} = [q_1, q_2]$; A_1 — детерминированная кривая $y = e^{-p_1x}$; A_2 — детерминированная кривая $y = e^{-p_2x}$; B_1 — детерминированная кривая $y = q_1x$; B_2 — детерминированная кривая $y = q_2x$; Θ — пересечение интервальных кривых A и B; $x^* = [x_1^*, x_2^*]$ — проекция Θ на ось X — решение интервального уравнения $e^{-\widetilde{\mathbf{P}}x} = \widetilde{q}x$.

Из рис. 2 видно, что единственная область Θ, которую следует считать общей частью обеих интервальных кривых, расположена между крайней правой (x_2^*) и крайней левой (x_1^*) точками. Поэтому проекция области Θ на ось X, являющаяся объединенным решением заданного интервального уравнения, имеет вид интервала $x^* = [x_1^*, x_2^*]$.

Левая x_1^* и правая x_2^* границы этого решения являются соответственно точками пересечения кривых A_2 и B_2 [решением 2-го уравнения (13)] и кривых A_1 и B_1 [решением 1-го уравнения (13)].

Сравнивая рис. 1 и 2, видим, что область Ω, обуславливающая множество решений рассмотренного интервального уравнения при множественном подходе, шире области Θ, определяющей множество решений этого уравнения при интервальном подходе. Это положение остается справедливым и для других интервальных уравнений. Оно может быть записано в виде $\Theta \subset \Omega$.

Решение интервальных уравнений с несколькими корнями и уравнений, в которых последняя операция не сложение, а умножение, с помощью

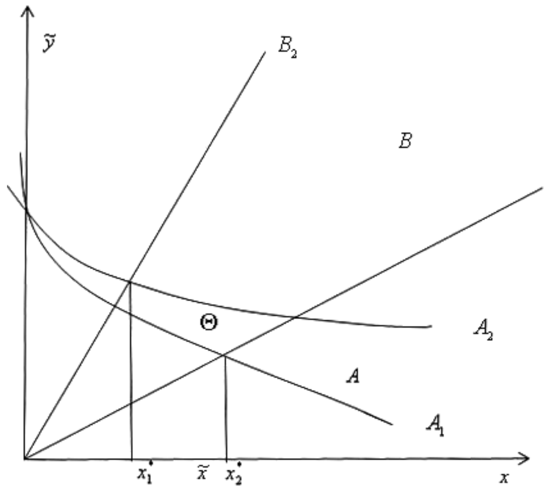

Рис. 2. Кривые, представляющие решение интервального уравнения интервальным методом

интервального подхода осуществляется так же, как при использовании множественного подхода.

Итак, показано (теоретически и на конкретных примерах), что решение возникающих на практике разнообразных интервальных уравнений возможно двумя различными способами, по крайней мере. Первый — множественный способ — рассматривает интервальное уравнение как множество образующих его обычных уравнений, полученных варьированием их параметров в границах интервальных параметров этого уравнения. При этом множество решений интервального уравнения получается как множество решений образующих его обычных уравнений. Второй — чисто интервальный способ — рассматривает интервальное уравнение не как множество обычных уравнений, а как одно уравнение, однако имеющее интервальные параметры, подчиняющиеся законам интервальной математики. Эквивалентное преобразование интервального уравнения по этим законам приводит его к виду детерминированного уравнения, решение которого можно получить известными методами. Предложенный в данной работе чисто интервальный способ решения интервального уравнения существенно отличается от известного ранее множественного способа. Отличие заключается в определении того, что считать решением интервального уравнения — при множественном подходе решением является множество всех точек пересечения интервальных функций в левой и правой частях уравнения, а при интервальном подходе — множество точек, в которых интервальные функции в левой и правой частях уравнения равны или приближенно равны. Другое отличие состоит в используемом математическом аппарате: при множественном подходе это теория множеств, при интервальном подходе — интервальная математика. Наконец, имеется отличие в возможности нахождения точного решения: при множественном подходе такое решение существует и может быть найдено всегда, при интервальном подходе — не всегда. Кроме того, множество получаемых с помощью интервального подхода решений интервального уравнения всегда у́же множества решений, получаемых с помощью множественного подхода. Данная особенность интервального подхода связана с тем, что в нем учитывается только часть точек, геометрически относящихся к пересечению интервальных кривых левой и правой частей уравнения. Эта особенность свидетельствует об адекватности предложенного в статье интервального подхода, проявляющейся в том, что сокращение информации об уравнении (переход от детерминированного к интервальному уравнению) приводит к размыванию его решения (переходу от единственности решения ко множеству решений).

В журнале «Заводская лаборатория. Диагностика материалов» близкие проблемы интервальности обсуждались и ранее [12, 13].

Таким образом, предложен новый подход к решению интервальных уравнений, основанный на эквивалентном преобразовании уравнения по законам интервальной математики, в результате чего оно приводится к детерминированному виду и может быть решено хорошо известными методами для обычных (детерминированных) уравнений. Этот подход отличается от известного множественного подхода содержанием понятия «решение интервального уравнения» и полной формализацией процесса отыскания корней уравнения. Этот процесс строится на использовании аппарата интервальной математики, благодаря чему полностью исключает различные эвристические приемы, что существенно упрощает процесс решения уравнения. Важно отметить, что точные значения корней интервального уравнения при интервальном подходе могут существовать, а могут и не существовать. В первом случае эти значения можно найти, во втором случае — найти приближенные значения корней уравнения. Предложенный подход к решению интервальных уравнений имеет важное значение, позволяя решать разнообразные задачи, связанные к исследованием неточно известных характеристик систем в технике, экономике, социальной сфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. — М.: Высшая школа, 2005. — 575 с.
2. **Заде Л. А.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М.: Мир, 1976. — 165 с.
3. **Алефельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления — М.: Мир, 1987. — 360 с.
4. **Канторович Л. В.** О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений / Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. № 5. С. 3 – 14.
5. **Налимов В. В., Чернова Л. А.** Теория эксперимента. — М.: Наука, 1971. — 320 с.
6. **Вощинин А. П., Сотиров Г. Р.** Оптимизация в условиях неопределенности. — М.: МЭИ; — София: Техника, 1989. — 226 с.
7. **Gorsky V., Shvetzova-Shilovskaya T., Voschinin A.** Risk assessment of Accident involving environmental high-toxicity substances / J. Hazard. Mater. 2000. N 78.
8. **Вощинин А. П.** Интервальный анализ данных: развитие и перспективы / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2002. Т. 68. № 1. С. 118 – 126.
9. **Левин В. И.** Интервальная математика и исследование систем в условиях неопределенности. — Пенза: ПТИ, 1998. — 68 с.
10. **Левин В. И.** Методология оптимизация в условиях неопределенности методом детерминизации / Информационные технологии. 2014. № 5. С. 14 – 21.
11. **Левин В. И.** Метод моделирования поведения функций с помощью раздетерминизации / Радиоэлектроника, информатика, управление. 2017. № 1. С. 33 – 41.
12. **Орлов А. И.** Статистика интервальных данных (обобщающая статья) / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81. № 3. С. 61 – 69.
13. **Скибицкий Н. В.** Построение прямых и обратных статических характеристик объектов по интервальным данным / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. Т. 83. № 1. Ч. 1. С. 87 – 98.

REFERENCES

1. **Venttsel' E. S.** Probability theory. — Moscow: Vysshaya shkola, 2005. — 575 p. [in Russian].
2. **Zade L. A.** The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. — Moscow: Mir, 1976. — 165 p. [Russian translation].
3. **Alefeld G., Herzberger J.** Introduction to Interval Computation. — NY.: Acad. Press, 1983. — 352 p.
4. **Kantorovich L. V.** On some new approaches to computational methods and processing of observations / Sib. Matem. Zh. 1962. Vol. 3. N 5. P. 3 – 14 [in Russian].
5. **Nalimov V. V., Chernova L. A.** The theory of experiment. — Moscow: Nauka, 1971. — 320 p. [in Russian].
6. **Voshchinin A. P., Sotirov G. R.** Optimization in conditions of uncertainty. — Moscow: MÉI; — Sofia: Tekhnika, 1989. — 226 p. [in Russian].
7. **Gorsky V., Shvetzova-Shilovskaya T., Voschinin A.** Risk assessment of Accident involving environmental high-toxicity substances / J. Hazard. Mater. 2000. N 78.
8. **Voshchinin A. P.** Interval analysis of data: development and prospects / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2002. Vol. 68. N 1. P. 118 – 126 [in Russian].
9. **Levin V. I.** Interval mathematics and systems research in conditions of uncertainty. — Penza: PTI, 1998. — 68 p. [in Russian].
10. **Levin V. I.** Methodology optimization in conditions of uncertainty by the method of determination / Inform. Tekhnol. 2014. N 5. P. 14 – 21 [in Russian].
11. **Levin V. I.** A method for modeling the behavior of functions with the aid of a partition function / Radioélektr. Inform. Upravl. 2017. N 1. P. 33 – 41 [in Russian].
12. **Orlov A. I.** Statistics of interval data (generalizing article) / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2015. Vol. 81. N 3. P. 61 – 69 [in Russian].
13. **Skibitskii N. V.** Construction of direct and inverse static characteristics of objects by interval data / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2017. Vol. 83. N 1. Part 1. P. 87 – 98 [in Russian].