

DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-5-60-62

УДК (UDC) 620.178

*Памяти Степана Якимовича Яремы***О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ С. Я. ЯРЕМЫ**© **Виктор Михайлович Маркочев**

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия; e-mail: VMMark@yandex.ru

Статья поступила 14 мая 2017 г.

Цель работы — математическое обобщение формулы С. Я. Яремы, предложенной для аппроксимации экспериментальной диаграммы усталостного разрушения, и исследование ее дополнительных возможностей. Анализ выполнен на основе оператора для плавного перехода от одной математической функции к другой. Показано, что формула С. Я. Яремы является частным случаем этого математического оператора, когда гладкий дифференцируемый переход осуществляется с одного постоянного уровня размаха коэффициента интенсивности напряжений на другой постоянный уровень. Получены математические выражения, которые можно интерпретировать как интегральную вероятность и плотность вероятности случайного значения скорости усталостной трещины. Они позволили дать статистическую трактовку диаграммы усталостного разрушения. На этой основе предложена методика оценки остаточного ресурса детали конструкции, в которой обнаружена усталостная трещина.

Ключевые слова: диаграмма усталостного разрушения; скорость усталостной трещины; размах коэффициента интенсивности напряжений; интегральная функция вероятностей; функция перехода состояний системы; живучесть.

*In memory of Stepan Yakimovich Yarema***ON THE MATHEMATICAL GENERALIZATION OF S. Ya Yarema FORMULA**© **Viktor M. Markochev**

National Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, Russia; e-mail: VMMark@yandex.ru

Submitted May 14, 2017.

The goal of the article is a mathematical generalization of S. Ya Yarema formula derived for approximation of the experimental diagrams of the fatigue fracture and subsequent analysis of the capabilities of the formula. The analysis is performed on the basis of the operator for smooth transition from one mathematical function to another. Formula of S. Ya Yarema is shown to be a special case of this mathematical operator when a smooth differentiable transition occurs from one constant level of the amplitude of stress intensity factor to another constant level. The obtained mathematical expressions can be interpreted as the cumulative probability and the probability density of random values of the fatigue crack rate. This allowed us to give a statistical interpretation of the fatigue fracture diagrams. On this basis we developed a methodology for estimation of the residual resource of a structural part containing a fatigue crack.

Keywords: diagram of fatigue fracture; fatigue crack rate; the magnitude of the stress intensity factor; integral function of probability; function of system state transition; liveness.

Для математического описания (аппроксимации) экспериментальной диаграммы усталостного разрушения (ДУР) конструкционных материалов С. Я. Ярема предложил следующую формулу [1]:

$$v(K_{\max}) = v_0 \left(\frac{K_{\max} - K_{th}}{K_{fc} - K_{\max}} \right)^q, \quad (1)$$

где v — скорость роста усталостной трещины в выбранных единицах длины за один цикл нагружения; K_{\max} — текущее максимальное значение цикла изменения коэффициента интенсивности напряжений (КИН); K_{th} — пороговое значение

цикла изменения КИН, ниже которого не происходит рост трещины; K_{fc} — критическое максимальное значение цикла КИН, по достижении которого происходит лом образца (элемента конструкции) за один цикл нагружения; v_0 — скорость роста трещины при $K_{\max} = K_0 = (K_{th} + K_{fc})/2$; q — показатель степени, характеризующий среднюю скорость усталостного разрушения. Скорость распространения трещины в конкретном конструкционном материале контролируется значением K_{\max} , параметры v_0 , K_{th} , K_{fc} и q — постоянные материала, характеризующие

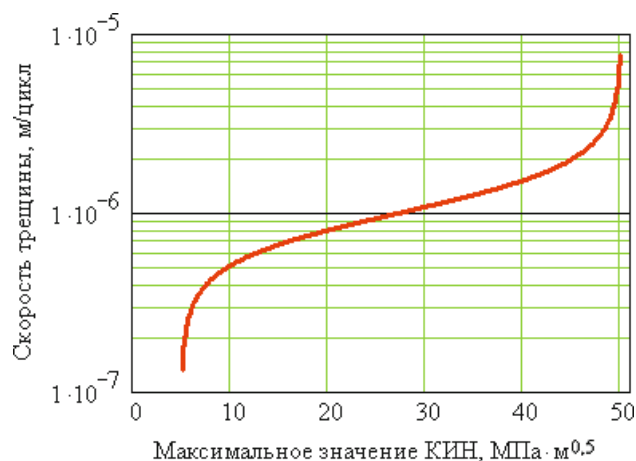


Рис. 1. Зависимость скорости роста усталостной трещины от максимального значения КИН

его сопротивление росту усталостных трещин. Варианты формулы (1) подробно рассмотрены в [2].

Диаграммы разрушения твердых тел [3], в том числе и ДУР, описывают переход тела от целостного состояния к фрагментированному посредством развития и распространения трещин. Цель данной статьи — математический анализ и обобщение формулы С. Я. Яремы.

Приняв $v_0 = 10^{-6}$ м/цикл, $K_{th} = 5$ МПа · м^{0,5}, $K_{fc} = 50$ МПа · м^{0,5} и $q = 0,33$, построим график формулы (1) в полупологарифмических координатах (рис. 1).

Обратим внимание на то, что функция, обратная формуле С. Я. Яремы (1), т.е. зависимость K_{max} от v , записывается как

$$K_{max}(v) = \frac{K_{th} + K_{fc}(v/v_0)^{1/q}}{1 + (v/v_0)^{1/q}}. \quad (2)$$

Ранее нами показано [4], что оператор

$$y(x) = \frac{y_1(x) + y_2(x)(x/x_0)^n}{1 + (x/x_0)^n} \quad (3)$$

описывает плавный дифференцируемый переход от функции $y_1(x)$ к функции $y_2(x)$ в окрестности значения $x = x_0$, а показатель степени n контролирует скорость перехода от одной функции к другой. Например, если

$$y_1(x) = \sqrt{x}, \quad (4)$$

$$y_2(x) = 1/x, \quad (5)$$

$x_0 = 2$, $n = 10$, то переход от функции (4) к функции (5) произойдет в соответствии с функцией (3), как показано на рис. 2.

При сопоставлении функций (3) и (2) видно, что функция (2) является частным случаем функции (3) при

$$y_1(x) = K_{th}, \quad y_2(x) = K_{fc}, \quad n = 1/q, \quad x = v, \quad x_0 = v_0.$$

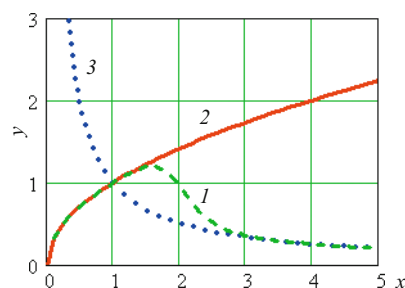


Рис. 2. Функция перехода $y(x)$ от функции $y_1(x)$ к функции $y_2(x)$: 1, 2 и 3 — функции $y(x)$, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответственно

Функция С. Я. Яремы (2) определяет также переход с одного постоянного уровня КИН = K_{th} на другой постоянный уровень КИН = K_{fc} . Этот переход обусловлен ростом усталостной трещины (рис. 3). При таком подходе измеренная величина — скорость роста усталостной трещины ставится в соответствие с некоторой вычисляемой величиной — КИН, зависящей от длины трещины и номинального напряжения, действующего в направлении, перпендикулярном росту трещины.

В работе [5] показано, что функция (3) при $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = 1$, принимающая вид

$$F(x) = \frac{(x/x_0)^n}{1 + (x/x_0)^n}, \quad (6)$$

представляет собой своеобразную интегральную функцию $F(x)$ вероятности случайной величины x , а ее производная по x — плотность вероятности случайной величины x

$$p(x) = \frac{\frac{n}{x_0} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right]^2}. \quad (7)$$

Функцию (2) можно привести к виду (6). Для этого из этой функции вычтем K_{th} и разделим полученную разность на разность $K_{fc} - K_{th}$:

$$F_1(v) = \frac{K_{max}(v) - K_{th}}{K_{fc} - K_{th}} = \frac{(v/v_0)^{1/q}}{1 + (v/v_0)^{1/q}}. \quad (8)$$

Аналог функции (7) $p(x)$ получаем дифференцированием функции (8) по v :

$$p_1(v) = \frac{\frac{1/q}{v_0} \left(\frac{v}{v_0}\right)^{1/q-1}}{\left[1 + \left(\frac{v}{v_0}\right)^{1/q}\right]^2}. \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) можно интерпретировать как интегральную вероятность и плотность веро-

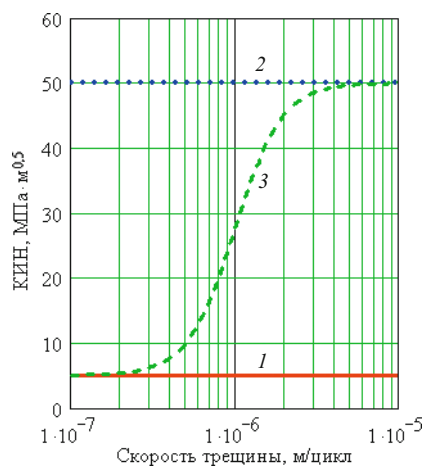


Рис. 3. Иллюстрация перехода (3) с уровня K_{th} (1) на уровень K_{fc} (2), контролируемого скоростью роста усталостной трещины

ятности случайной величины v . Их графики приведены на рис. 4. Ордината графика $p_1(v)$ уменьшена в 10^6 раз.

Вопрос о возможной статистической трактовке формул (8), (9) и рис. 4 применительно к процессам усталостного распространения трещин требует изучения и остается в настоящее время во многом открытым. Можно лишь допустить, что случайное событие состоит в обнаружении усталостной трещины в некотором элементе конструкции, материал которого подчиняется известной и инвариантной ДУР (см. уравнение (1) и рис. 1). Тогда, экспериментально определив скорость роста v обнаруженной трещины, можно оценить доли использованной R_1 и остаточной R_2 живучести (ресурса) элемента конструкции при наличии трещины с применением формулы (8):

$$R_1(v) = F_1(v), \quad (10)$$

$$R_2(v) = 1 - F_1(v). \quad (11)$$

Например, для $v = 5 \cdot 10^{-7}$ м/цикл по формулам (10) и (11) получаем соответственно $R_1 = 0,109$ и $R_2 = 0,891$.

Если затраченный ресурс r_1 по живучести известен, то можно приближенно пропорционально оценить физический остаточный ресурс

$$r_2 = r_1 \frac{R_2(v)}{R_1(v)}. \quad (12)$$

В заключение отметим, что для оценки относительных долей ресурса не требуется знания КИН для элемента конструкции, если справедлива гипотеза об инвариантности ДУР. Для оценки физического ресурса в единицах времени или в числе циклов нагружения необходимо интегри-

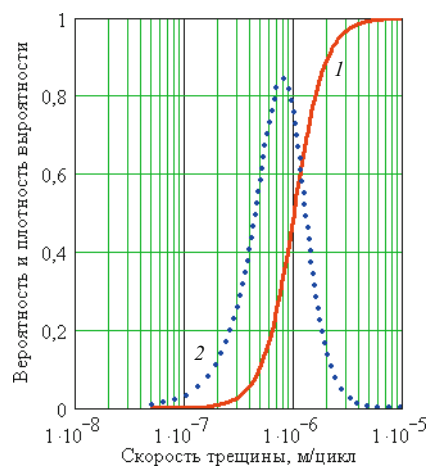


Рис. 4. Интегральная вероятность $F_1(v)$ (1) и плотность вероятности $p_1(v) \cdot 10^{-6}$ (2) скорости усталостной трещины

рование уравнения (1), записанного применительно к рассматриваемому элементу конструкции. Но это возможно лишь при известном решении для КИН для элемента конструкции с трещиной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ярема С. Я., Микитишин С. И. Аналитическое описание диаграммы усталостного разрушения материалов / Физико-химическая механика материалов. 1975. № 6. С. 47 – 54.
2. Романив О. Н., Ярема С. Я., Никифорчин Г. Н., Махутов Н. А., Стадник М. М. Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособие. Т. 4. Усталостная и циклическая трещиностойкость. — Киев: Наукова думка, 1990. — 680 с.
3. Дроздовский Б. А., Маркочев В. М., Фридман Я. Б. Диаграммы разрушения твердых тел / Доклады АН СССР. Техническая физика. 1967. № 4. С. 807 – 810.
4. Александрова О. В., Маркочев В. М. Математическое описание диаграмм деформирования / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69. № 4. С. 49 – 52.
5. Маркочев В. М., Александрова О. В. Дробно-степенная функция для описания распределения вероятностей / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 11. С. 71 – 73.

REFERENCES

1. Yarema S. Ya., Mikitishin S. I. Analytical description of the diagram of fatigue fracture of materials / Fiz.-Khim. Mekh. Mater. 1975. N 6. P. 47 – 54 [in Russian].
2. Romaniv O. N., Yarema S. Ya., Nykiforchin G. N., Makhutov N. A., Stadnik M. M. Fracture mechanics and strength of materials: Spravochnoe posobie. Vol. 4. Fatigue and cyclic crack resistance. — Kiev: Naukova dumka, 1990. — 680 p. [in Russian].
3. Drozdovskii B. A., Markochev V. M., Fridman Ya. B. Diagrams of fracture of solids / Dokl. AN SSSR. Tekhn. Fiz. 1967. N 4. P. 807 – 810 [in Russian].
4. Aleksandrova O. V., Markochev V. M. The mathematical description of the deformation diagrams / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2003. Vol. 69. N 4. P. 49 – 52 [in Russian].
5. Markochev V. M., Aleksandrova O. V. Fractional-power function to describe the probability distribution / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2012. Vol. 78. N 11. P. 71 – 73 [in Russian].