

DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-8-50-54

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ СОЕДИНЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛКИ С УПРУГИМ ПОКРЫТИЕМ

© Николай Георгиевич Рябенков

Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, Россия; e-mail: kgeu@kgeu.ru

Статья поступила 12 сентября 2017 г.

Рассмотрено совместное деформирование двух упругих слоев, один из которых является покрытием, нанесенным на поверхность более толстого слоя. Принято, что в плоскости контакта слоев проскальзывание отсутствует. Соединение находится под действием внешней нагрузки, приложенной к покрытию перпендикулярно его поверхности и неизменяющейся по ширине. Нагрузка на боковые плоскости соединения отсутствует, что позволяет считать соединение двухслойной балкой и для описания его деформирования использовать систему уравнений плоской задачи теории упругости. Для ее решения применяется асимптотический метод. Искомые функции, нормальные и касательные напряжения, а также компоненты перемещения произвольной точки, балки и покрытия разлагаются в ряды по степеням малого параметра. В качестве такого параметра принята половина толщины соответствующего слоя. В отличие от известных асимптотических разложений предложен вариант асимптотического метода, в котором все искомые функции асимптотически равноправны в том смысле, что они разлагаются в асимптотические ряды одинаковой структуры. В рядах присутствуют все положительные степени малого параметра. В этом случае асимптотический алгоритм приводит к появлению двух независимых между собой рекуррентных систем линейных уравнений, что существенно упрощает их решение. В каждом приближении для одного упругого слоя алгоритм порождает пять неопределенных функций продольной координаты. С учетом быстрой сходимости асимптотических рядов для построения математической модели деформирования соединения балки с покрытием использовано первое асимптотическое приближение. Метод приводит к появлению десяти неопределенных функций координаты x . Они позволяют выполнить восемь условий непрерывности напряженно-деформированного состояния по толщине соединения. Остаются пока неопределенными две функции. Для них из принципа минимума потенциальной энергии деформации выведены уравнения равновесия, представляющие собой систему двух линейных дифференциальных уравнений шестого порядка, и соответствующие граничные условия. Граничные условия можно реализовать в статическом и кинематическом вариантах. При проведении вычислений использован первый вариант. Числовые результаты получены для двух видов поверхностной нагрузки — постоянной и синусоидально меняющейся по длине соединения. Отмечено, что при исследовании напряженного состояния покрытия необходимо учитывать не только нормальные, но и касательные напряжения, величина которых при изгибе соединения может быть весьма существенной.

Ключевые слова: упругое покрытие; теория упругости; асимптотический метод.

ON THE STRESSED STATE OF THE JOINT UPON BENDING BEAM WITH AN ELASTIC COATING

© Nikolay G. Ryabenkov

Kazan State Power University. Kazan, Russia, e-mail: kgeu@kgeu.ru

Submitted September 12, 2017.

Joint deformation of two elastic layers is considered, one of them being a coating applied to the surface of another thicker layer. It is assumed that slippage is absent in the plane of layer contact. External load is normal to the coating surface and unchanging in width. In the absence of lateral loading, the junction can be considered a two-layer beam and described by the equations of the plane elasticity using the asymptotic method. The required functions, normal and tangential stresses, and also the components of the displacement of an arbitrary point of the beam and coating are expanded in power series of the small parameter (accepted as a half thickness of the corresponding layer). In contrast to the known asymptotic expansions, an alternative asymptotic method is proposed in which all the required

functions are asymptotically equivalent, i.e., expanded in asymptotic series of the same structure. When all positive powers of the small parameter are present in the series, the asymptotic algorithm leads to the appearance of two independent recurrent systems of linear equations, which greatly simplifies their solution. In each approach for one elastic layer the algorithm generates five indefinite functions of the longitudinal coordinate. Due to a rapid convergence of the asymptotic series, the first asymptotic approximation is used to construct the mathematical model of the deformation of a beam-to-coating coupling. Ten indefinite functions of the coordinate x provide fulfilling of eight conditions of continuity of the stress-strain state in the linkage depth, two functions remaining indefinite. Equilibrium equations (a system of two linear differential equations of the sixth order) are derived for them proceeding from the principle of minimum potential energy of deformation and corresponding boundary conditions (that can be realized both in static and kinematic variants). Numerical results are obtained in static approximation for two types of surface loading — steady and sinusoidally varying — along the length of the coating. An emphasis is made on the necessity of allowing for tangential stresses when studying the stress state of the coating as they can be rather significant upon bending.

Keywords: elastic coverage; theory of elasticity; asymptotic method.

Представим балку с покрытием как соединение двух упругих слоев, контактирующих без проскальзывания по некоторой плоскости. Напряженное состояние каждого слоя опишем системой дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости. Полагая, что толщина соединения значительно меньше его длины, решение этой системы уравнений для каждого слоя найдем асимптотическим методом, в качестве малого параметра примем половину толщины слоя. Выполнив условия непрерывности напряженно-деформированного состояния, из принципа минимума потенциальной энергии запишем систему разрешающих уравнений и граничные условия для них.

Асимптотический алгоритм. Систему уравнений плоской задачи теории упругости запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau, \\ E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu \sigma_z, \quad E \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_z - \nu \sigma_x. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь σ_x , σ_z , τ — нормальные и касательное напряжения; u , w — компоненты перемещения; E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

модуль сдвига. Возможность использования этой системы уравнений подробно обоснована в монографии [1], где предположено отсутствие внешней нагрузки на соединение в направлении, перпендикулярном к боковой поверхности.

Решение системы найдем в прямоугольнике $x, z \in [2L \times 2h]$. Предположим, что длина прямоугольника $2L$ значительно больше его высоты $2h$. Таким образом, при построении асимптотического алгоритма величину h примем в качестве ма-

лого параметра и искомые функции представим следующими степенными рядами:

$$\begin{aligned} u = \sum_{s=1,3}^{2n-1} (h^{s-1} u_1^s + h^{s-2} u_2^s); \quad w = \sum_{s=1,3}^{2n-1} (h^{s-2} w_1^s + h^{s-1} w_2^s); \\ \tau = \sum_{s=1,3}^{2n-1} (h^{s-2} \tau_1^s + h^{s-1} \tau_2^s); \quad \sigma_x = \sum_{s=1,3}^{2n-1} (h^{s-1} \sigma_{x1}^s + h^{s-2} \sigma_{x2}^s); \\ \sigma_z = \sum_{s=1,3}^{2n-1} (h^{s-1} \sigma_{z1}^s + h^{s-2} \sigma_{z2}^s). \end{aligned} \quad (2)$$

Воспользуемся стандартной процедурой асимптотического метода [2–7]. Подставим ряды (2) в уравнения (1), приведем подобные члены и при одинаковых степенях малого параметра коэффициенты приравняем к нулю. В результате для определения коэффициентов разложений получим рекуррентную систему уравнений, решение которой запишем только для первого приближения. Полагая $s = n = 1$, получим следующие выражения параметров напряженно-деформированного состояния упругого слоя:

$$\begin{aligned} u = f_4 + f_2 + z \left(\frac{f_1}{G} - \frac{df_3}{dx} \right); \\ w = f_3 + z \left(\frac{1-\nu^2}{E} f_5 - \nu \frac{df_2}{dx} \right); \\ \tau = f_1 - z \left(E \frac{d^2 f_2}{dx^2} + n \frac{df_5}{dx} \right); \quad \sigma_z = f_5 - z \frac{df_1}{dx}; \\ \sigma_x = \nu f_5 + E \left(\frac{df_4}{dx} + \frac{df_2}{dx} \right) + z \left[(2+\nu) \frac{df_1}{dx} - E \frac{d^2 f_3}{dx^2} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 — пока неопределенные функции координаты x .

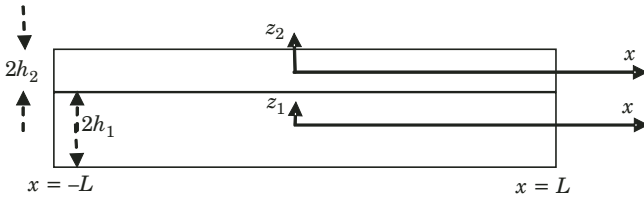


Рис. 1. Схема соединения

Модель деформирования соединения. Соотношения (3) используем для описания напряженных состояний балки и покрытия. Пусть $u_1, w_1, \sigma_{x1}, \sigma_{z1}, \tau_1$ — характеристики НДС балки; $u_2, w_2, \sigma_{x2}, \sigma_{z2}, \tau_2$ — характеристики НДС слоя покрытия; E_i, G_i, ν_i ($i = 1, 2$) — параметры упругости; $2h_i$ — толщины слоев. Для балки и покрытия используем системы координат (z_1, x) , (z_2, x) с началом отсчета в центре тяжести каждого слоя (рис. 1).

Описывая деформирование балки используем соотношения (3), содержащие пять неопределенных функций — $f_{11}, f_{21}, f_{31}, f_{41}, f_{51}$. Деформацию опишем с помощью функций $f_{12}, f_{22}, f_{32}, f_{42}, f_{52}$. Итак,

$$\begin{aligned} u_k &= f_{4k} + f_{2k} + z_k \left(\frac{f_{1k}}{G_k} - \frac{df_{3k}}{dx} \right), \\ w_k &= f_{3k} + z_k \left(\frac{1 - \nu_k^2}{E_k} f_{5k} - \nu_k \frac{df_{2k}}{dx} \right), \\ \tau_k &= f_{1k} - z_k \left(E_k \frac{d^2 f_{2k}}{dx^2} + \nu_k \frac{df_{5k}}{dx} \right), \\ \sigma_{zk} &= f_{5k} - z_k \frac{df_{1k}}{dx}, \\ \sigma_{xk} &= \nu_k f_{5k} + E_k \left(\frac{df_{4k}}{dx} + \frac{df_{2k}}{dx} \right) + \\ &+ z_k \left[(2 + \nu_k) \frac{df_{1k}}{dx} - E_k \frac{d^2 f_{3k}}{dx^2} \right], \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Для удовлетворения условий непрерывности напряженно-деформированного состояния имеем десять произвольных функций. Пусть соединение нагружено нормальной поверхностной нагрузкой интенсивностью q , приложенной к слою покрытия. Тогда

$$\sigma_{z2}(x, h_2) = q, \quad \sigma_{z1}(x, -h_1) = 0,$$

$$\tau_2(x, h_2) = 0, \quad \tau_1(x, -h_1) = 0,$$

$$\sigma_{z2}(x, -h_2) = \sigma_{z1}(x, h_1), \quad \tau_2(x, -h_2) = \tau_1(x, h_1),$$

$$u_2(x, -h_2) = u_1(x, h_1), \quad w_2(x, -h_2) = w_1(x, h_1).$$

Из этих восьми соотношений определим восемь произвольных функций, выразив их через две функции — f_{32}, f_{42} .

Вывод разрешающих уравнений. Определяя две оставшиеся неизвестными функции, воспользуемся принципом минимума потенциальной энергии системы. Вариации компонент продольной деформации принимают вид:

$$\delta \varepsilon_{x1} = \frac{d\delta u_1}{dx} = \frac{d\delta f_{42}}{dx} + (h_1 + h_2 - z_1) \frac{d^2 \delta f_{32}}{dx^2},$$

$$\delta \varepsilon_{x2} = \frac{d\delta u_2}{dx} = \frac{d\delta f_{42}}{dx} - z_2 \frac{d^2 \delta f_{32}}{dx^2}.$$

Нетрудно проверить, что вариации деформаций сдвига и обжатия в данной модели равны нулю. Поэтому вариацию потенциальной энергии деформации соединения можем записать в следующей форме:

$$\delta \Pi = \int_{-L}^L \left\{ \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_{x1} \delta \varepsilon_{x1} dz_1 + \int_{-h_2}^{h_2} \sigma_{x2} \delta \varepsilon_{x2} dz_2 \right\} dx.$$

Вариация работы поверхностной нормальной распределенной нагрузки интенсивностью q составит

$$\delta A = \int_{-L}^L q \delta f_{32} dx.$$

Работу торцевой нагрузки представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \delta A^* &= \left[(T_1^* + T_2^*) \delta f_{42}^* + \right. \\ &+ [(h_1 + h_2) T_1^* - M_1^* - M_2^*] \frac{d\delta f_{32}^*}{dx} \Big]_{-L}^L - \\ &- \left\{ \left[(h_1 + h_2) \frac{dT_1^*}{dx} - \frac{dM_1^*}{dx} - \frac{dM_2^*}{dx} \right] \delta f_{32}^* \right\}_{-L}^L. \end{aligned}$$

Здесь

$$T_i = \int_{-h_i}^{h_i} \sigma_{xi} dz_i, \quad M_i = \int_{-h_i}^{h_i} \sigma_{xi} z_i dz_i \quad (i = 1, 2) —$$

усилия и моменты в слоях (звездочкой отмечены их граничные значения).

Полагая $\delta\Pi = \delta A + \delta A^*$, приводя подобные члены и приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях искомых функций, получаем уравнения равновесия и граничные условия. Для определения двух неизвестных функций имеем два уравнения равновесия:

$$\frac{dT_1}{dx} + \frac{dT_2}{dx} = 0,$$

$$(h_1 + h_2) \frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{d^2 M_1}{dx^2} - \frac{d^2 M_2}{dx^2} = q.$$

Записанная система уравнений имеет шестой порядок. Кинематические граничные условия для нее принимают вид

$$x = \pm L: \delta f_{32} = \delta f_{32}^*, \delta f_{42} = \delta f_{42}^*, \frac{d\delta f_{32}}{dx} = \frac{d\delta f_{32}^*}{dx}.$$

Статические граничные условия можно записать следующим образом:

$$x = \pm L: T_1 + T_2 = T_1^* + T_2^*,$$

$$(h_1 + h_2)T_1 - M_1 - M_2 = (h_1 + h_2)T_1^* - M_1^* - M_2^*,$$

$$(h_1 + h_2) \frac{dT_1}{dx} - \frac{dM_1}{dx} - \frac{dM_2}{dx} =$$

$$= (h_1 + h_2) \frac{dT_1^*}{dx} - \frac{dM_1^*}{dx} - \frac{dM_2^*}{dx}.$$

Преобразуем уравнения равновесия с учетом (4). В результате получим систему уравнений шестого порядка, решение которых принимает вид

$$f_{32} = a_1 \int \int \int \int q dx^4 + a_2 \int \int q dx^2 +$$

$$+ a_3 q + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

$$f_{42} = b_1 \int \int \int q dx^3 + b_2 \int q dx +$$

$$+ b_3 \frac{dq}{dx} + b_4 C_1 \frac{x^2}{2} + C_5 x + C_6.$$

Здесь $a_1, \dots, b_4$ — константы, содержащие механические характеристики соединения; $C_1, \dots, C_6$ — константы интегрирования.

Результаты вычислений. Рассмотрено соединение со следующими параметрами:

$$L = 50 \text{ см}, h_1 = 0,3 \text{ см}, h_2 = 0,03 \text{ см},$$

$$E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, E_2 = 51 \cdot 10^2 \text{ МПа},$$

$$\nu_1 = 0,3, \nu_2 = 0,25.$$

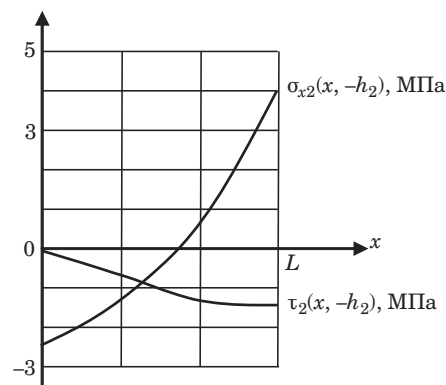


Рис. 2. Распределение напряжений в слое покрытия

На торцах соединения выполнены граничные условия, соответствующие жесткой заделке балки:

$$u_1(\pm L, 0) = 0, w_1(\pm L, 0) = 0, \frac{dw_1}{dx}(\pm L, 0) = 0.$$

Вычисления проводили для двух статически эквивалентных вариантов нагрузки — постоянной нагрузки интенсивностью $q = -0,01$ МПа и синусоидальной нагрузки

$$q_1 = 0,01 \frac{\pi}{2} \sin \left[\frac{\pi}{2L} (x - L) \right] \text{ МПа}.$$

Сравнение двух этих напряженных состояний показывает, что при переменной нагрузке основные напряжения в соединении приблизительно на 15 – 17 % превышают напряжения от постоянной нагрузки.

Покрывтие слабо влияет на напряжения в балке. Максимальные значения они принимают на торцах соединения. Нормальные σ_{z1} и касательные τ_1 напряжения пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями σ_{x1} .

График изменения напряжений в слое покрытия представлен на рис. 2. Напряжения обжатия σ_{z2} близки по величине к значению распределенной нагрузки и при исследовании прочности покрытия ими можно пренебречь. Однако касательные напряжения τ_2 сравнимы со значением основных напряжений σ_{x2} . В некоторых точках касательные напряжения превышают нормальные напряжения, что следует учитывать при оценке прочности покрытия.

Отметим эффективность предложенного метода по сравнению с другими методами использования асимптотического алгоритма при построении моделей деформирования плоских упругих тел. Например, при моделировании изгиба методом степенных рядов [4] в качестве первого приближения обычно используют схему Кирхгофа, в которой пренебрегают касательными напряже-

ниями τ_1 и напряжениями σ_{z1} обжатия. В этом случае невозможно выполнить условия непрерывности напряжений на плоскости контакта балки и покрытия, следовательно, в первом приближении модель не будет корректной. Приходится использовать более высокие приближения, что существенно увеличивает трудоемкость расчетов. Предложенный вариант асимптотического метода позволяет построить корректную модель уже в первом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
2. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин. — М.: Наука, 1997. — 414 с.
3. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластин методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости / Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. № 4. С. 669 – 686.
4. Рябенков Н. Г., Файзуллина Р. Ф. О единой асимптотической природе методов решения задачи теории упругости для плит и пластин / ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 3. С. 440 – 448.
5. Рябенков Н. Г. Полигармонические функции в структурах точных решений теории упругости / Математика. 2013. № 7. С. 45 – 51.
6. Ryabenkov N. G. Polyharmonic functions in structures of exact solutions of elastic theory / Russian mathematics. 2013. Vol. 57. N 7. P. 39 – 44.
7. Рябенков Н. Г., Файзуллина Р. Ф. Асимптотический метод в теории деформирования плоского упругого тела / Механика твердого тела. 2005. № 3. С. 53 – 59.

REFERENCES

1. Muskhelishvili N. I. Some primal problems of the mathematical theory of elasticity. — Moscow: Nauka, 1966. — 707 p. [in Russian].
2. Agalovyan L. A. Asymptotic the theory of non-isotropic plates. — Moscow: Nauka, 1997. — 414 p. [in Russian].
3. Gol'denveizer A. L. Construction of the approached theory of curving of plates a method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity / Prikl. Matem. Mekh. 1962. Vol. 26. N 4. P. 669 – 686 [in Russian].
4. Ryabenkov N. G., Faizullina R. F. About the uniform asymptotic nature of methods of solution of a problem of the theory of elasticity for plates and plates / Prikl. Matem. Mekh. 2006. Vol. 70. Issue 3. P. 440 – 448 [in Russian].
5. Ryabenkov N. G. Polyharmonic of functions in structures of exact solutions of the theory of elasticity / Matematika. 2013. N 7. P. 45 – 51 [in Russian].
6. Ryabenkov N. G. Polyharmonic functions in structures of exact solutions of elastic theory / Russian mathematics. 2013. Vol. 57. N 7. P. 39 – 44.
7. Ryabenkov N. G., Faizullina R. F. Asimptotichesky method in the theory of deformation of a flat elastic body / Mekh. Tv. Tela. 2005. N 3. P. 53 – 59 [in Russian].