

DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-8-55-60

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕХОДА МАТЕРИАЛА ИЗ УПРУГОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ

© Виктор Михайлович Маркочев

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия; e-mail: VMMark@yandex.ru

Статья поступила 4 мая 2017 г.

Цель работы — создание математической модели перехода конструкционного материала из упругого состояния в упругопластическое в процессе растяжения образца. Модель базируется на модифицированном трехпараметрическом операторе перехода от одной математической функции к другой. Предложена методика математической аппроксимации перехода системы из одного состояния в другое. Описан соответствующий алгоритм, который обеспечивает обобщенное каноническое описание перехода вне зависимости от вида функций, описывающих поведение системы до и после перехода. Методика применена для описания перехода двух конструкционных материалов от упругого к упругопластическому состоянию в процессе растяжении соответствующих образцов. Математически описаны начальные участки диаграммы с использованием трех эмпирических параметров. Установлены роли каждого из трех эмпирических параметров — предельно допустимой относительной деформации, скорости перехода и асимметрии перехода. Предложена и обоснована статистическая трактовка упругопластического перехода. Получены математические выражения для интегральной функции вероятностей и функции плотности вероятности, которые дают численные статистические оценки степени изменения состояния структурных элементов материала в процессе нагружения. Полученное аналитическое описание начального участка диаграммы растяжения материала можно использовать для перестройки диаграмм в связи с моделированием процессов деформирования при реверсивном упругопластическом нагружении.

Ключевые слова: система; изменение состояния; диаграмма растяжения; напряжение; относительная деформация; предел текучести; оператор перехода; упругопластический переход; аппроксимация; эмпирические параметры; статистическое описание; скорость перехода.

A MATHEMATICAL MODEL OF TRANSITION OF THE MATERIAL FROM ELASTIC TO ELASTO-PLASTIC STATE

© Viktor M. Markochev

National Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, Russia; e-mail: VMMark@yandex.ru

Submitted May 4, 2017.

The goal of this study is to develop a mathematical model of the transition of the structural material from elastic state to elastoplastic state upon tension. The model is based on a modified three-parameter transition operator from one mathematical function to another. A procedure of the mathematical approximation of the transition and corresponding algorithm, which provides a generalized canonical description of the transition, regardless of the form of the functions that characterize the system behavior before and after the transition are presented. The technique is used to describe the transition of two structural materials from the elastic to elastoplastic state upon tension of the samples. Initial sections of the tension diagram are described using three empirical parameters. The role of each of them — maximum permissible relative deformation, transition rate and asymmetry of the transition — are determined. Statistical interpretation of the elastoplastic transition is developed and substantiated. Mathematical expressions for the integral probability function and probability density functions that provide numerical statistical estimation of the degree of change in the state of the structural elements of the material during loading are derived. Analytical description of the initial part of the tension diagram of the material can be used to rearrange the diagrams when modeling deformation processes in conditions of reversible elastoplastic loading.

Keywords: system; state change; tension diagram; stress; relative deformation; yield stress; elastic-plastic transition; approximation; empirical parameters; statistical description; transition rate.

Эмпирически установлено, что при растяжении образца при нагрузке, примерно равной половине разрушающей, наблюдается переход от упругого состояния материала к упругопластическому. Это привело к введению чрезвычайно важного понятия «предел текучести», разделяющего эти два состояния. Под пределом текучести понимают напряжение σ_y , по достижении которого в материале появляются необратимые изменения, которые оценивают в терминах необратимой пластической деформации. Именно большое значение упругопластического перехода привело к введению общепринятого понятия «условный предел текучести», под которым понимают напряжение $\sigma_{0,2}$, при котором относительная пластическая деформация образца достигает 0,2 %.

Для большинства конструкционных материалов переход от упругого состояния к упругопластическому происходит постепенно, но достаточно быстро, и для его описания требуется гладкая функция. Параметры этой функции для конкретного материала могут быть получены только в процессе аппроксимации начального участка экспериментальной диаграммы растяжения.

Цель данной работы состоит в применении предложенной аппроксимирующей функции и соответствующего алгоритма для аппроксимации участка упругопластического перехода диаграммы растяжения с использованием трех эмпирических параметров, а также в разработке метода статистического исследования процесса перехода в пластическое состояние.

Математическое обеспечение процесса аппроксимации. Математические операторы, обеспечивающие плавный переход от одной непрерывной функции к другой, рассмотрены в [1, 2]. Здесь для описания перехода от одной выпуклой функции $y_1(x)$ к другой выпуклой функции $y_2(x)$

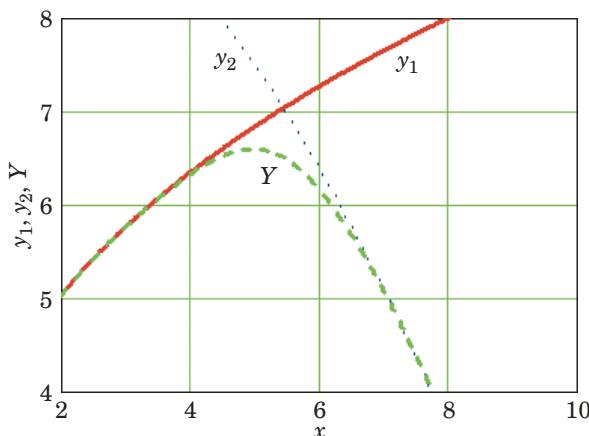


Рис. 1. Функция перехода Y от функции y_1 к функции y_2 при $x_0 = 5,226$; $n = 10,04$; $s = 1,321$

предложено использовать определенный интеграл

$$Y(x, x_0, n, s) = \int_0^x y(x, x_0, n, s), \quad (1)$$

где

$$y(x, x_0, n, s) = \frac{y'_1(x) + y'_2(x) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{ns}}{\left[1 + \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right]^s}, \quad (2)$$

$y'_1(x)$ и $y'_2(x)$ — производные по x от функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответственно, x_0 , n и s — эмпирические параметры.

Функцию (2) можно преобразовать, представив в каноническом виде

$$F(x, x_0, n, s) = \frac{y(x, x_0, n, s) - y'_1(x)}{y'_2(x) - y'_1(x)}. \quad (3)$$

Функция (3) в области перехода изменяется от 0 до 1 и имеет вид, характерный для интегральной функции вероятности [3]. Производная от этой функции по x

$$p(x, x_0, n, s) = F'(x, x_0, n, s) \quad (4)$$

имеет форму, характерную для функции плотности вероятности. Поэтому функции (3) и (4) дают относительную оценку стадии перехода при заданном значении x .

При конкретных нелинейных функциях

$$y_1(x) = 4\sqrt[3]{x}, \quad (5)$$

$$y_2(x) = 10 - 0,1x^2 \quad (6)$$

получаем в соответствии с (2) и (1) картину перехода, показанную на рис. 1.

На рис. 2 приведены графики производных от функций (5) и (6) и кривая перехода (2) в зависимости от x .

Кривые, соответствующие функциям (3) и (4), представлены на рис. 3. Видно, что переход осуществляется в диапазоне изменения x от 3 до 9.

Аппроксимация диаграммы растяжения. На рис. 4 показана начальная часть машинной диаграммы растяжения в координатах напряжение — относительная деформация, а также две прямые, соответствующие упругой линии машинной диаграммы с наклоном K и реальной упругой линии с наклоном E , где E — модуль Юнга. Наклон K получен обработкой семи первых экспериментальных точек машинной диаграммы методом наименьших квадратов.

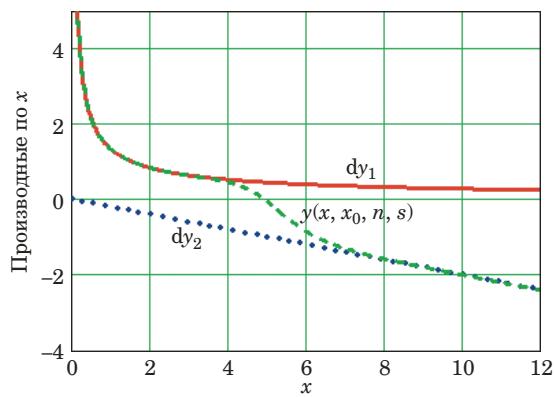


Рис. 2. Кривые производных dy_1 и dy_2 и переходная кри- вая $y(x, x_0, n, s)$

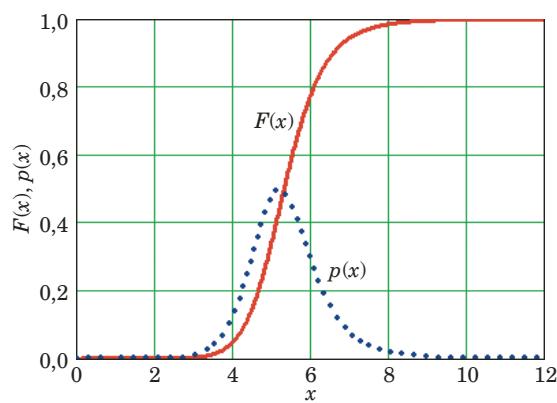


Рис. 3. Кривые интегральной вероятности $F(x)$ и плот- ности вероятности $p(x)$

На машинной диаграмме видно 29 экспериментальных точек, $i = 1 \dots 29$. Пересчет относительных деформаций от машинной диаграммы к реальной осуществляется по точкам в соответствии с уравнением

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{yi} + (\varepsilon_{mi} - \varepsilon_{ki}), \quad (7)$$

где ε_i , ε_{mi} и ε_{ki} — относительные деформации — реальная, машинная и машинная упругая соответственно.

В результате получаем перестроенную диаграмму растяжения, показанную на рис. 5. Здесь же приведены упругая прямая и прямая деформационного упрочнения. Наклон упругой прямой равен E , наклон прямой деформационного упрочнения D получен обработкой семи по-

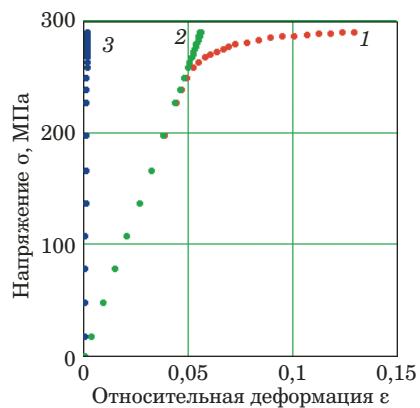


Рис. 4. Начальная часть машинной диаграммы растяже- ния: 1 — машинная диаграмма; 2 — упругая линия ма-шинной диаграммы; 3 — реальная упругая линия

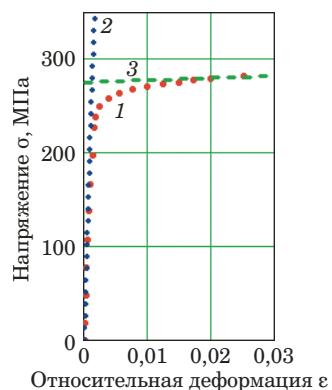


Рис. 5. Перестроенная диаграмма (1), ее упругая прямая (2) и прямая деформационного упрочнения (3)

следних точек машинной диаграммы методом наименьших квадратов.

Результаты, показанные на рис. 4 и 5, относятся к обработке диаграммы материала 1. Аналогично обработана диаграмма для материала 2. Механические свойства двух этих материалов приведены в табл. 1.

На рис. 6 показаны экспериментальные диаграммы материалов 1 и 2, а также аппроксимирующие кривые, полученные с применением функций (1) и (2).

Функции (5) и (6) имеют следующий вид (см. рис. 5):

$$y_1(x) = Ex, \quad (8)$$

$$y_2(x) = Dx + C, \quad (9)$$

где C — координата точки пересечения прямой (9) с осью напряжений на рис. 5.

Таблица 1. Механические свойства материалов

| Материал | Модуль упругости E , МПа | Модуль деформационного упрочнения D , МПа | Условный предел текучести $\sigma_{0,2}$, МПа | Полная деформация на пределе текучести ε_s , % |
|----------|----------------------------|---|--|--|
| 1 | $2 \cdot 10^5$ | 231,1 | 254,6 | 0,327 |
| 2 | $1 \cdot 10^5$ | 844,2 | 227,5 | 0,428 |

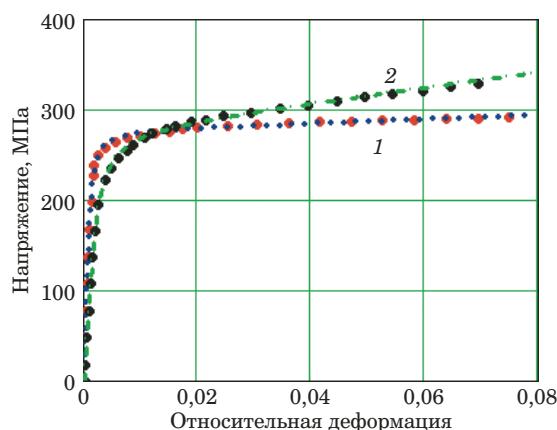


Рис. 6. Диаграммы растяжения (точки) и аппроксимирующие кривые для материалов 1 и 2

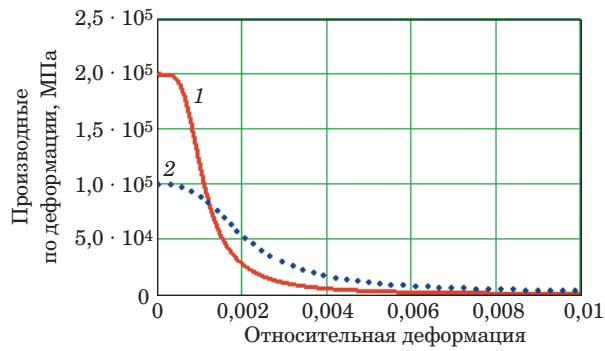


Рис. 7. Переходные кривые от упругого упрочнения к деформационному упрочнению для материалов 1 (1) и 2 (2)

Используемая функция (2) принимает вид

$$y(x, x_0, n, s) = \frac{E + D(x/x_0)^{ns}}{[1 + (x/x_0)^n]^s}. \quad (10)$$

Чтобы получить значения эмпирических коэффициентов в формуле (1), использовали нелинейный метод наименьших квадратов. Эти коэффициенты приведены в табл. 2.

На рис. 7 представлены кривые, аналогичные кривой перехода на рис. 2. Они получены с использованием уравнения типа (3):

$$F(x, x_0, n, s) = \frac{y(x, x_0, n, s) - E}{D - E}. \quad (11)$$

На рис. 8 приведены кривые, аналогичные интегральной кривой на рис. 3.

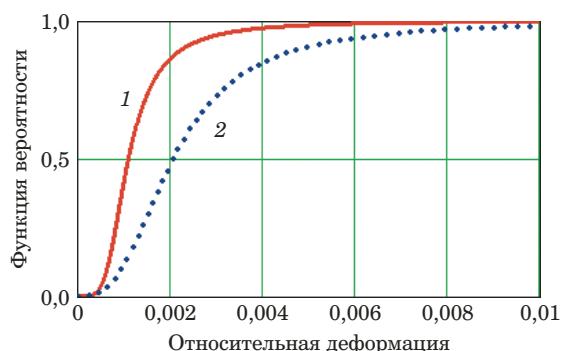


Рис. 8. Интегральные функции вероятности для материалов 1 (1) и 2 (2)

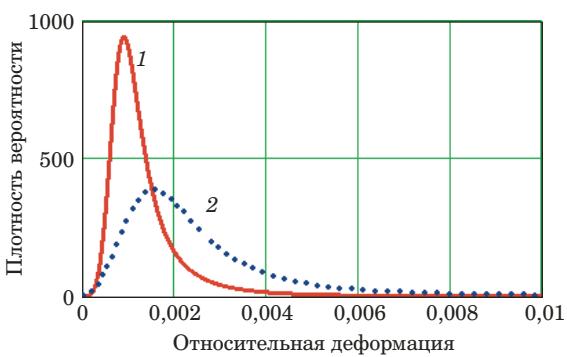


Рис. 9. Функции плотности вероятности для материалов 1 (1) и 2 (2)

На рис. 9 показаны кривые, аналогичные кривой плотности вероятности на рис. 3. Они получены численным дифференцированием уравнения (11) по относительной деформации.

Обсуждение результатов

В табл. 2 приведены также значения коэффициентов корреляции V элементов вектора σ и вектора σ_1 , полученного по аппроксимирующей формуле (1), а также коэффициенты качества аппроксимации S [4]. Значение S — среднее квадратическое отклонение экспериментальных точек от соответствующих точек аппроксимирующей кривой, которое вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{(\sigma_i - \sigma_{1i})^2}{k-2}}, \quad (12)$$

где σ — вектор напряжений; σ_{1i} — вектор напряжений, вычисленный по формуле (1) для соответ-

Таблица 2. Эмпирические коэффициенты аппроксимации перехода упругость – пластичность

| Материал | x_0 | n | s | V | S , МПа |
|----------|----------------------|------|-------|-------|-----------|
| 1 | $8,77 \cdot 10^{-4}$ | 4,44 | 0,544 | 0,999 | 3,9 |
| 2 | $1,84 \cdot 10^{-3}$ | 2,94 | 0,787 | 0,999 | 3,45 |

ствующих значений вектора относительных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$; k — число экспериментальных точек, $k = 29$.

Возникает вопрос о возможной вероятностно-статистической трактовке результатов на рис. 8 и 9. Конструкционный материал представляет собой сложную систему из различных структурных составляющих. Поэтому трудно ожидать, что все они при нагружении и, что не менее важно, при накоплении в образце неравномерно распределенной по объему образца энергии упругой деформации могут единовременно изменить свое состояние. Скорее всего, изменение состояния структурных составляющих образца от «упругого» на «пластическое» происходит постепенно и кривые на рис. 8 и 9 приобретают статистический смысл. Эту гипотезу подтверждают исследования акустической эмиссии в процессе нагружения образца, которые показывают, что число и частота испускания акустических «импульсов» нарастают до достижения условного предела текучести [5, 6]. И сам факт испускания дискретных акустических импульсов свидетельствует о дискретной перестройке отдельных структурных составляющих материала.

В дополнение к этому укажем на принцип Мазинга [7]. В соответствии с этим принципом поведение сплошного образца при переходе в упругопластическое состояние эквивалентно поведению системы параллельных стержней, заполняющих объем образца, при условии, что каждый стержень наделен своим напряжением, при котором он переходит в пластическое состояние. Принцип Мазинга не противоречит, а скорее служит обоснованием предложенной эмпирической трактовке описания перехода упругого состояния в упругопластическое с применением функций вероятности и плотности вероятности (см. рис. 9).

Имеются и другие доказательства неравномерности пластической деформации. Среди них появление и распространение полос Чернова – Людерса, эффект Баушингера и эффект Портевена – Ле-Шателье.

В табл. 3 приведены значения формально вычисленных [4] значений математического ожидания (среднего значения случайной величины ε) M и стандартного отклонения Σ для двух материалов.

В табл. 4 представлены значения долей структурных составляющих, изменивших свое состояние, для разных относительных деформаций.

Отметим, что значения x_0 , приведенные в табл. 1, существенно меньше упругопластических деформаций ε_s при напряжениях, равных условному пределу текучести. При этом перестройке уже подвержены (30 – 40) % структурных составляющих, на условном пределе текучести в пластическое состояние переходит (80 – 90) % составляющих. Отношение напряжений σ_{x_0} к условному пределу текучести $\sigma_{0,2}$ равно (0,64 – 0,7). Это необходимо учитывать в расчете на прочность при реверсивном упругопластическом нагружении [7, 8]. Данные, приведенные в табл. 4, следует рассматривать как предварительные, стимулирующие подобные исследования упругопластического перехода, при котором происходит резкое (на два и более порядка) уменьшение скорости изменения напряжений с увеличением деформаций.

Суть эмпирических коэффициентов в табл. 2 — значение относительной деформации x_0 приближено соответствует математическому ожиданию. Напряжения σ_{x_0} примерно в 1,5 раза меньше условного предела текучести, что позволяет рассматривать значения σ_{x_0} как предельно допустимые при расчетах на прочность.

Параметр n определяет скорость перехода в пластическое состояние и ширину кривых на рис. 9, от параметра s зависит асимметрия этих кривых.

Некоторые материалы, например, малоуглеродистая сталь, имеют площадку текучести, которой предшествует «зуб» текучести. Если для целей расчета зубом текучести пренебречь, то упругопластический переход будет описан при $C = 0$ в уравнении (9). При достаточно большом числе экспериментальных точек на зube текучести уравнение (10) для его описания получают при $D < 0$ в уравнении (9).

Таблица 3. Параметры вероятностных распределений

| Материал | M | Σ |
|----------|----------------------|----------------------|
| 1 | $1,38 \cdot 10^{-3}$ | $1,36 \cdot 10^{-3}$ |
| 2 | $2,72 \cdot 10^{-3}$ | $2,93 \cdot 10^{-3}$ |

Таблица 4. Доли структурных составляющих, претерпевших переход в пластическое состояние

| Материал | x_0 | Напряжение σ_{x_0} (МПа) при x_0 | Доля пластичности λ при x_0 | Полная деформация ε_s при $\sigma_{0,2}$ | Доля пластичности $\lambda_{0,2}$ при ε_s | $\sigma_{x_0}/\sigma_{0,2}$ |
|----------|----------------------|---|---------------------------------------|--|---|-----------------------------|
| 1 | $8,77 \cdot 10^{-4}$ | 162,7 | 0,814 | $3,27 \cdot 10^{-3}$ | 0,958 | 0,639 |
| 2 | $1,84 \cdot 10^{-3}$ | 159,1 | 0,418 | $4,28 \cdot 10^{-3}$ | 0,866 | 0,699 |

Отметим важное обстоятельство, связанное с условным пределом текучести. Для стали при напряжениях 400 МПа допуск на относительную пластическую деформацию 0,002 равен упругой деформации. Отношение упругой деформации к допуску равно $\sigma_{0,2}/0,002E$, т.е. существенно увеличивается с ростом прочности и с уменьшением модуля упругости. В той же пропорции растет и отношение энергии упругой деформации к энергии пластической деформации при допуске 0,002. Это обстоятельство оказывает малое влияние при больших запасах прочности для традиционных материалов, но его следует учитывать при использовании новых высокопрочных материалов с низким модулем упругости. Для расчета на прочность при реверсивном упругопластическом нагружении и обеспечения сопоставимости результатов этих расчетов необходимо принять соглашение о снижении условного предела текучести, например на 20 %.

В заключение отметим, что использование рассмотренной методики аппроксимации упругопластического перехода и приведения перехода к каноническому виду (3) или (10) возможно только при использовании современных информационных технологий, например, программы Mathcad. При этом сохраняется универсальность предложенной методики, ее применимость для эмпирического описания разных изменений состояния различных систем, в том числе для математического описания перелома на температурной кривой длительной прочности материалов в логарифмических координатах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова О. В., Маркочев В. М. Математическое описание диаграмм деформирования / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2003. Т. 69. № 4. С. 49 – 52.
2. Маркочев В. М., Александрова О. В. Дробно-степенная функция для описания распределения вероятностей / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 11. С. 71 – 73.
3. Маркочев В. М. О математическом обобщении формулы С. Я. Яремы / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2018. Т. 84. № 5. С. 60 – 62.
4. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование в технике и науке. Методы обработки данных. — М.: Мир, 1980. — 610 с.
5. Грешников В. А., Дробот Ю. Б. Акустическая эмиссия. — М.: Издательство стандартов, 1976. — 276 с.
6. Стоев П. И., Папиров И. И., Мощенок В. И. Акустическая эмиссия титана / ВАНТ. Серия: Вакуум, чистые материалы, сверхпроводники. 2006. № 1. С. 15 – 22.
7. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагрузлениях. — М.: Машиностроение, 1984. — 256 с.
8. Маркочев В. М., Тарасов Н. И. Моделирование процессов упругопластического деформирования защитных чехлов штучеров оборудования / Атомная энергия. 2016. Т. 121. № 2. С. 85 – 90.

REFERENCES

1. Aleksandrova O. V., Markochev V. M. The mathematical description of the deformation diagrams / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2003. Vol. 69. N 4. P. 49 – 52 [in Russian].
2. Markochev V. M., Aleksandrova O. V. Fractional-power function to describe the probability distribution / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2012. Vol. 78. N 11. P. 71 – 73 [in Russian].
3. Markochev V. M. On the mathematical generalization of the formula S. Ya. Yarema / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2018. Vol. 84. N 5. P. 60 – 62.
4. Johnson N., Leone F. Statistics and experimental design in engineering and physical sciences. — New York: John Wiley & Sons, 1977.
5. Greshnikov V. A., Drobot Yu. B. Acoustic emission. — Moscow: Izd. standartov, 1976. — 276 p. [in Russian].
6. Stoev P. I., Papirov I. I., Moshenok V. I. Acoustic emission titanium / VANT. Ser. Vakuum Chist. Mater. Sverkhprov. 2006. N 1. P. 15 – 22 [in Russian].
7. Gokhfel'd D. A., Sadakov O. S. Plasticity and creep of structural elements under repeated loading. — Moscow: Mashinostroenie, 1984. — 256 p.
8. Markochev V. M., Tarasov N. I. Modeling of elastic-plastic deformation of protective covers hardware fittings / Atom. Energiya. 2016. Vol. 121. N 2. P. 85 – 90 [in Russian].