Математические методы исследования
Mathematical methods of investigation

DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-11-74-87

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД СКОРЕЙШЕГО УЛУЧШЕНИЯ ОТКЛИКА

© **Владимир Борисович Боков**

ЗАО «НПП Автоматика», г. Владимир, Россия: e-mail: vlad.backow@yandex.ru

Статья поступила 21 февраля 2018 г.

Предложен новый статистический метод скорейшего улучшения отклика, основанный на начальном эксперименте, выполняемом по двухуровневому плану, и статистической линейной модели первого порядка с нормированными числовыми факторами и переменными отклика. Факторы для опытов скорейшего улучшения отклика оценивают на основе данных начального эксперимента и нахождения условного экстремума. Для этих факторов определяют доверительные интервалы. Найденные по данным начального эксперимента результаты оценки параметров линейной модели позволяют получить функцию отклика, по которой можно предсказывать отклик в опытах его скорейшего улучшения. Линейную модель предсказания отклика, а также результаты оценки параметров линейной модели для начального эксперимента и факторов для опытов скорейшего улучшения отклика используют при нахождении интервалов предсказаний отклика в этих опытах. Знание интервалов предсказаний отклика в опытах его скорейшего улучшения позволяет обнаружить выходящие за их пределы результаты и найти предельные значения факторов, при которых дальнейшее проведение процедуры скорейшего улучшения отклика становится неэффективным и должен ставиться новый начальный эксперимент.

Ключевые слова: план; эксперимент; метод крутого восхождения; линейная модель; метод множителей Лагранжа.

STATISTICAL METHOD OF STEEPEST IMPROVEMENT OF RESPONSE

© **Vladimir B. Bokov**

“NPP Automatica” Joint-stock Company, City of Vladimir, Russia: website: www.avtomatica.ru

Submitted February 21, 2018.

A new statistical method for response steepest improvement is proposed. This method is based on an initial experiment performed on two-level factorial design and first-order statistical linear model with coded numerical factors and response variables. The factors for the runs of response steepest improvement are estimated from the data of initial experiment and determination of the conditional extremum. Confidence intervals are determined for those factors. The first-order polynomial response function fitted to the data of the initial experiment makes it possible to predict the response of the runs for response steepest improvement. The linear model of the response prediction, as well as the results of the estimation of the parameters of the linear model for the initial experiment and factors for the experiments of the steepest improvement of the response, are used when finding prediction response intervals in these experiments. Kknowledge of the prediction response intervals in the runs of steepest improvement of the response makes it possible to detect the results beyond their limits and to find the limiting values of the factors for which further runs of response steepest improvement become ineffective and a new initial experiment must be carried out.

Keywords: design; experiment; steepest ascent method; linear model; Lagrange multiplier method.

Целью экспериментального исследования может быть нахождение таких условий функционирования некоторого объекта, при которых достигается максимум или минимум его изучаемого отклика. Но если объект исследуется впервые, то результаты начального эксперимента находятся обычно далеко от такого оптимума. Поэтому необходима предварительная процедура определения условий его функционирования, при которых отклик приближается к оптимуму. Одна из

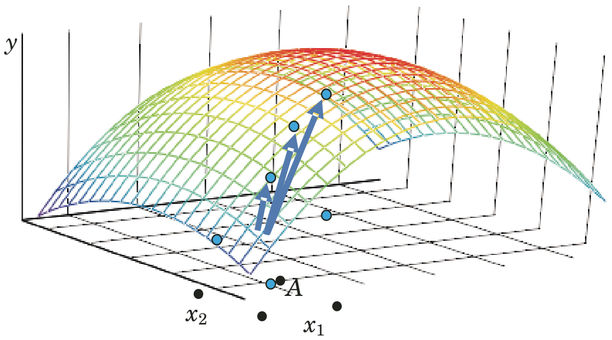

Рис. 1. Графическое изображение процедуры скорейшего улучшения отклика на основе начального эксперимента по плану 2^2

таких процедур состоит в поочередном изменении в эксперименте каждого влияющего на отклик числового фактора [1]. Однако если два числовых фактора устанавливать при пяти значениях, то необходимо провести $5^2 = 25$ опытов, а если изменять четыре фактора, то для пяти их значений потребуется провести $5^4 = 625$ опытов. Меньшее число опытов требуется проводить в процедуре крутого восхождения (спуска) [2], по которой все влияющие на отклик факторы изменяются в опытах одновременно. Назовем ее методом скорейшего улучшения отклика, подразумевая его увеличение или уменьшение. На основе применения этого метода находят такие значения факторов, при которых получаемые в опытах результаты приближаются к оптимуму.

На рис. 1 показан график истинной неизвестной функции $y = f(x_1, x_2)$ — зависимость отклика от двух числовых нормированных факторов — x_1 и x_2. Цель метода скорейшего улучшения отклика состоит в нахождении таких значений факторов, при которых в проводимых опытах отклик быстро улучшается. В находящейся далеко от оптимума области A эксперимента по плану 2^2, показанному четырьмя черными точками в двумерном пространстве факторов x_1 и x_2, ожидается, что полиномиальная линейная модель первого порядка хорошо моделирует зависимость отклика от факторов. Синими точками показаны результаты опытов на графике функции отклика, синими стрелками — направление в сторону увеличения отклика, т.е. его скорейшего улучшения. Опыт с наилучшим откликом может стать центром нового плана первого порядка для проведения начального эксперимента, на основе которого возможно дальнейшее скорейшее улучшение отклика.

Нормированные факторы для опытов скорейшего улучшения отклика зависят от результатов оценки их воздействий на отклик, получаемых на основе данных начального эксперимента. На

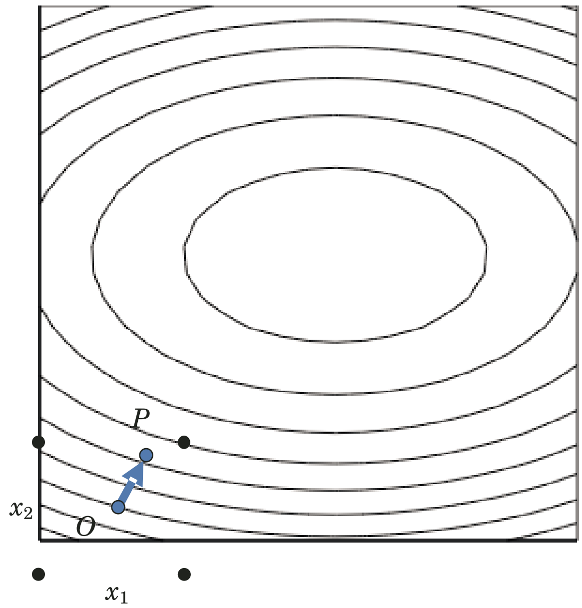

Рис. 2. Контурная диаграмма функции отклика с опытом его скорейшего улучшения в двумерном пространстве нормированных факторов

рис. 2 в двумерном пространстве значений факторов на контурной диаграмме истинной функции отклика можно найти значения факторов для опыта P, проводимого в направлении скорейшего улучшения отклика.

В общем случае начальный эксперимент выполняется в n-мерном пространстве комбинаций значений факторов по двухуровневому полному 2^p или дробному плану разрешающей способности не ниже IV. Данные такого эксперимента позволяют оценить воздействия факторов на отклик независимо от взаимодействий двух и более факторов. Зависимость отклика от нормированных факторов анализируют с использованием линейной модели $y = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ первого порядка, для которой справедливы обычные допущения [3, с. 77; 4, с. 138]:

1) математические ожидания $E(\beta_i) = 0$ при $i = 1, 2, ..., n$, или $E(y_i) = \beta_0 x_{i0} + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_p x_{ip}$;

2) дисперсии $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$, или $D(y_i) = \sigma^2$;

3) ковариации $C(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = 0$ для всех $i \neq k$, где $k = 1, 2, ..., n$, или $C(y_i, y_k) = 0$.

Нормирование факторов выполняют по формуле [5, с. 17]

$$x_j = [\xi_j - (\xi_{j+} + \xi_{j-})/2]/(\xi_{j+} - \xi_{j-})/2, \qquad (1)$$

где ξ_{j+} и ξ_{j-} соответственно верхний и нижний уровни j-го фактора ($j = 1, 2, ..., p$) в натуральных единицах измерений.

При двух факторах используют показанный на рис. 2 начальный эксперимент по плану 2^2, имеющему центр O с координатами $x_1 = x_2 = 0$. Данные эксперимента по этому плану позволяют оценить воздействия факторов на отклик и математические ожидания переменных отклика. Координаты показанного синим кружком опыта P — значения факторов x_1 и x_2, при которых выполнение этого опыта покажет скорейшее улучшение отклика.

Определение значений факторов для опытов скорейшего улучшения отклика обычно выполняют методом градиента [2; 6, с. 60; 7, с. 209; 8, с. 32; 9, с. 79; 10, с. 237]. По нему находят градиент функции отклика φ в виде

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\mathbf{j} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\mathbf{p}, \qquad (2)$$

где **i**, **j**, ..., **p** — единичные векторы в направлениях координатных осей. При этом полагают, что функция отклика непрерывна, однозначна и не имеет особых точек.

Функцию отклика получают в результате статистического моделирования зависимости отклика от факторов в локальной области их значений для начального эксперимента. При этом постулируют линейную модель первого порядка

$$y = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon, \qquad (3)$$

в которой полагают, что фактор x_0 среднего переменных отклика для всех опытов находится на уровне + 1. Название данного фактора связано с тем, что если модель (3) содержит только его, то для нее в матричном виде $y = \mathbf{1}\beta_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\mathbf{1}$ — вектор из единиц, оценка параметра β_0 методом наименьших квадратов дает $\hat{\beta}_0 = (\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \bar{y}$. Однако фактор x_0 не является постоянным. Для эксперимента с повторяющимися опытами дисперсионная линейная модель классификации по одному признаку учитывает изменения этого фактора от опыта к опыту [11, с. 235]. В модели (3) эти изменения частично описываются членами с факторами $x_1, x_2, \ldots, x_p$, но фактор x_0 модели остается переменным и не входит в план эксперимента. Оценка параметров модели (3) методом наименьших квадратов дает $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_p$, а оценка математического ожидания переменной отклика —

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 x_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \ldots + \hat{\beta}_p x_p. \qquad (4)$$

Это выражение представляет используемую в градиентном методе функцию отклика. Поэтому действительным градиентом функции отклика является не (2), а

$$\nabla\hat{y} = \frac{\partial\hat{y}}{\partial x_0}\mathbf{g} + \frac{\partial\hat{y}}{\partial x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial\hat{y}}{\partial x_2}\mathbf{j} + \ldots + \frac{\partial\hat{y}}{\partial x_p}\mathbf{p}, \qquad (5)$$

где **g** — единичный вектор в направлении координатной оси x_0.

В градиентном методе считается, что частные производные в (2) равны результатам оценки параметров модели (3) и в опытах скорейшего улучшения отклика факторы нужно изменять пропорционально результатам оценки этих параметров с учетом их знаков. В натуральных единицах измерений величины шагов изменения факторов берут пропорционально произведениям результатов оценки параметров на соответствующие интервалы варьирования факторов [2; 6, с. 60]. Но результаты оценки параметров модели (3) получают в единицах измерений отклика, и их произведения на интервалы варьирования факторов дают величины шагов изменения в единицах измерений, отличных от единиц измерений самих факторов. Следовательно, по градиентному методу при расчете значений факторов для опытов скорейшего улучшения отклика не соблюдается соответствие единиц измерений.

Кроме этого, при расчете значений факторов надо использовать действительный градиент (5) функции отклика и изменять также фактор x_0. Но последний не подлежит изменению, так как это фактор модели, а не плана эксперимента. Результат $\hat{\beta}_0$ оценки параметра этого фактора для линейных моделей первого порядка обычно много больше остальных, но им в расчете пренебрегают. Поэтому при нахождении значений факторов для опытов скорейшего улучшения отклика использование метода градиента, основанного на функции отклика φ, нельзя считать корректным.

В другой процедуре нахождения значений факторов для опытов скорейшего улучшения отклика используют нормирование результатов оценки параметров модели (3) длиной их вектора [5, с. 191]. При этом $\hat{\beta}_0$ тоже не учитывают и сначала находят длину вектора $[\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_p]$ результатов оценки параметров по формуле $\tilde{\beta} = \sqrt{\hat{\beta}_1^2 + \hat{\beta}_2^2 + \ldots + \hat{\beta}_p^2}$, а затем каждый результат оценки делят на $\tilde{\beta}$. В итоге получают безразмерный вектор $[\hat{\beta}_1/\tilde{\beta}, \hat{\beta}_2/\tilde{\beta}, \ldots, \hat{\beta}_p/\tilde{\beta}]$ единичной длины. Далее считают, что умножение этого вектора, например, на числа 2, 4, 6 и 8 дает значения нормированных факторов для опытов скорейшего улучшения отклика. Эти значения переводят в натуральные единицы измерений по получаемой из (1) формуле

$$\xi_j = x_j(\xi_{j+} - \xi_{j-})/2 + (\xi_{j+} + \xi_{j-})/2. \quad (6)$$

Однако и в этом случае без учета $\hat{\beta}_0$ нахождение значений факторов для опытов скорейшего улучшения отклика получается некорректным.

Поэтому цель представленного здесь исследования — разработка корректного и статистически обоснованного метода нахождения значений факторов для опытов скорейшего улучшения отклика на основе данных начального эксперимента, проводимого по двухуровневому плану. Кроме того, определены предельные значения факторов, при которых процедура скорейшего улучшения отклика становится неэффективной и для его дальнейшего скорейшего улучшения должен проводиться новый начальный эксперимент.

Оценка факторов для опытов скорейшего улучшения отклика

Для опытов скорейшего улучшения отклика значения факторов корректно находят с использованием функции отклика, содержащей только факторы плана начального эксперимента, т.е. изменяемые в эксперименте. Такую функцию отклика можно получить путем нормирования переменных отклика этого эксперимента. Нормирование переменных отклика выполняется по формуле

$$\tilde{y}_i = (y_i - \bar{y})/S_y, \quad (7)$$

где $y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ — усредненное их значение; $S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$ — интервал варьирования. При проведении эксперимента по плану 2^2 имеем $n = 4$, а по плану 2^p получаем $n = 2^p$.

После нормирования переменных отклика линейная модель (3) в матричном виде имеет вид

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\tilde{\vec{\beta}} + \tilde{\vec{\varepsilon}}. \quad (8)$$

Для нее остаются справедливы обычные допущения, так как нормирование переменных отклика выполняется линейным преобразованием. Вектор $\vec{\beta}$ параметров оценивается методом наименьших квадратов по формуле

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{y}}, \quad (9)$$

где $\mathbf{X}$ — матрица модели; $\tilde{\mathbf{y}}$ — вектор нормированных переменных отклика.

С использованием результата оценки параметров модели (8) можно оценивать математические ожидания нормированных переменных отклика по формуле

$$\hat{\tilde{y}} = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_px_p, \quad (10)$$

так как при нормированных переменных отклика $b_0 = 0$. Это результат того, что первый столбец матрицы $\mathbf{X}$ состоит из единиц и произведение $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{y}} = \frac{1}{S_y}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - n\bar{y}\right)$, а $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{1} = n$. Поэтому в силу (9) $b_0 = \frac{1}{n}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{y}} = \frac{1}{S_y}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y}\right) = 0$.

В отличие от элементов вектора оценки параметров модели (3) для модели (8) элементы вектора $\mathbf{b}$ становятся безразмерными, как и нормированные факторы. Поэтому функция отклика (10) пригодна для метода градиента. Но расчет значений факторов пошаговым изменением не позволяет их оценивать.

Для опытов скорейшего улучшения отклика факторы можно оценивать путем нахождения условного экстремума с использованием функции (10). Для достижения условного экстремума (см. рис. 2) нужно перейти из точки O в находящуюся от нее на расстоянии r точку P, где достигается скорейшее улучшение отклика. Точка O имеет координаты $x_1 = x_2 = 0$ и является центром ортогонального базиса двумерного евклидова пространства. В силу (10) отклик в этой точке $\hat{\tilde{y}}_0 = 0$, а в точке P отклик $\hat{\tilde{y}} = b_1x_1 + b_2x_2$. Поскольку расстояние между O и P равно r, то по теореме Пифагора имеем $x_1^2 + x_2^2 = r^2$. Аналогично для p-мерного евклидова пространства с ортогональным базисом в точке O, имеющей координаты $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$, расстояние между O и P также равно r и получаем $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = r^2$, где вектор $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1, x_2, \ldots, x_p]$.

При ограничении $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = r^2$ для скорейшего улучшения отклика необходимо, чтобы разность $|\hat{\tilde{y}} - \hat{\tilde{y}}_0| = |\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}|$, где $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} = [b_1, b_2, \ldots, b_p]$ была максимальной. Задача оптимизации с ограничением решается методом множителей Лагранжа. Если $\mathbf{x}$ — вектор переменных и λ — множитель Лагранжа, то функция Лагранжа записывается в виде

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - r^2). \quad (11)$$

Частная производная этой функции по вектору $\mathbf{x}$

$$\partial L(\mathbf{x}, \lambda)/\partial\mathbf{x} = b_1 + 2\lambda\mathbf{x}. \quad (12)$$

Приравнивая эту производную нулевому вектору и решая полученное уравнение относительно $\mathbf{x}$, получаем вектор оценки нормированных факторов

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{b}_1/(2\lambda). \quad (13)$$

Здесь коэффициент $a = -1/(2\lambda)$, и факторы для опыта P оцениваются по формуле

$$\hat{\mathbf{x}} = a\mathbf{b}_1. \quad (14)$$

В ней используется вектор $\mathbf{b}_1$ оценки параметров, а поэтому по этой формуле получаем оценку нормированных факторов.

Выбор действительного числа a просто определяет расстояние от центра O плана, на котором находится опыт P скорейшего улучшения отклика в пространстве значений нормированных факторов. Факторы для опытов скорейшего улучшения отклика оценивают умножением соответствующих элементов вектора $\mathbf{b}$ на действительные числа a. Таким образом, нормированные факторы для этих опытов оценивают с использованием элементов вектора $\mathbf{b}$, полученного на основе данных начального эксперимента по двухуровневому плану.

Проведение опытов скорейшего улучшения отклика требует знания для них факторов в натуральных единицах измерений, и для этого элементы вектора $\hat{\mathbf{x}}$ пересчитывают в натуральные единицы измерений. В силу (6) для пересчета используют выражения

$$\hat{\xi}_1 = \xi_{10} + \hat{x}_1 S_1,\ \hat{\xi}_2 = \xi_{20} + \hat{x}_2 S_2,\ ...,$$

$$\hat{\xi}_p = \xi_{p0} + \hat{x}_p S_p, \quad (15)$$

где $S_1 = (\xi_{1+} - \xi_{1-})/2$, $S_2 = (\xi_{2+} - \xi_{2-})/2$, ..., $S_p = (\xi_{p+} - \xi_{p-})/2$ — интервалы варьирования факторов; $\xi_{10} = (\xi_{1+} - \xi_{1-})/2$, $\xi_{20} = (\xi_{2+} - \xi_{2-})/2$, ..., $\xi_{p0} = (\xi_{p+} + \xi_{p-})/2$ — их основные уровни.

При этом необходимо учитывать происходящее увеличение или уменьшение отклика. Беря вторую производную от функции $L(\mathbf{x}, \lambda)$ по $\mathbf{x}$, получаем

$$\partial^2 L(\mathbf{x}, \lambda)/(\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{x}) = 2\lambda.$$

Если λ отрицательное число, то функция $L(\mathbf{x}, \lambda)$ имеет максимум и коэффициент $a = -1/(2\lambda)$ получается положительным числом, а если λ положительное число, то функция $L(\mathbf{x}, \lambda)$ имеет минимум и a получается отрицательным числом. Но беря действительные числа a всегда положительными, в случае увеличения отклика в расчете необходимо использовать формулы

$$\hat{\xi}_1 = \xi_{10} + ab_1 S_1,\ \hat{\xi}_2 = \xi_{20} + ab_2 S_2,\ ...,$$

$$\hat{\xi}_p = \xi_{p0} + ab_p S_p, \quad (16)$$

а в случае уменьшения отклика — формулы

$$\hat{\xi}_1 = \xi_{10} - ab_1 S_1,\ \hat{\xi}_2 = \xi_{20} - ab_2 S_2,\ ...,$$

$$\hat{\xi}_p = \xi_{p0} - ab_p S_p. \quad (17)$$

Предложенную оценку факторов для опытов скорейшего улучшения отклика можно использовать для конкретного числа факторов, например двух, простым исключением остальных. Полученные результаты оценки факторов могут несколько отличаться от тех, что устанавливают в реальных опытах скорейшего улучшения отклика, например, из-за технологических ограничений.

Однако если в этих опытах факторы устанавливают точно с полученными по формуле (14) нормированными значениями, то подставляя их в (10) вместо $x_1, x_2, ..., x_p$, можно предсказать результаты оценки математических ожиданий нормированных переменных отклика в опытах его скорейшего улучшения по формуле

$$\hat{\hat{y}}_a = b_1\hat{x}_1 + b_2\hat{x}_2 + \ldots + b_p\hat{x}_p = a\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}.$$

Затем их в силу (7) можно преобразовать в натуральные единицы измерений по формуле

$$y_a = \bar{y} + S_y \hat{\hat{y}}_a. \quad (18)$$

Таким образом, с помощью функции (10) можно предсказывать отклик в опытах его скорейшего улучшения.

Из формул (16) и (17) видно, что оценка факторов для опытов скорейшего улучшения отклика зависит от выбираемых основных уровней и интервалов варьирования факторов плана начального эксперимента. И если этот эксперимент проводить при других основных уровнях и интервалах варьирования факторов, чем в области A (см. рис. 1), то по новым данным получится другой результат оценки параметров модели (8). Для одного и того же объекта и максимума на рис. 1 этот эксперимент будет располагаться в другой области. Направление проведения опытов скорейшего улучшения отклика и результат оценки факторов для них будут отличаться от тех, что для эксперимента в области A. Поэтому направление проведения опытов скорейшего улучшения отклика и факторы для этих опытов определяются условиями проводимого начального эксперимента, т.е. выбором основных уровней и интервалов варьирования факторов его плана.

Доверительные интервалы факторов в опытах скорейшего улучшения отклика

Направление скорейшего улучшения отклика определяется направляющими косинусами, и с использованием результатов оценки параметров модели (3) находится доверительная область этого направления в виде допустимых косинусов векторов направления [5, с. 194 – 197; 10, с. 247 – 250]. Эта область не выражается через факторы опытов скорейшего улучшения отклика и имеет малый практический интерес. Однако выполняемая по формулам (16) и (17) оценка этих факторов дает возможность найти их доверительные интервалы.

Совместная доверительная область факторов для опытов скорейшего улучшения отклика находится с использованием выполняемой по формулам (16) и (17) оценки факторов для ряда чисел a. В матричном виде формулы (16) и (17) записываются так:

$$\hat{\vec{\xi}} = \boldsymbol{\xi}_0 + a\mathbf{D}\mathbf{b}_1 \text{ и } \hat{\vec{\xi}} = \boldsymbol{\xi}_0 - a\mathbf{D}\mathbf{b}_1, \qquad (19)$$

где $D = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_p \end{bmatrix}$ и $\boldsymbol{\xi}_0 = [\xi_{10}\ \ \xi_{20}\ \ \dots\ \ \xi_{p0}]$.

В них вектор $\mathbf{b}_1$ содержит результаты оценки всех параметров модели (8), за исключением $\tilde{\beta}_0$, оценка которого дает $b_0 = 0$. Поэтому фактор x_0 из модели (8) можно исключить и записать ее в виде

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{X}_1 \tilde{\vec{\beta}}_1 + \tilde{\vec{\varepsilon}}, \qquad (20)$$

где вектор $\tilde{\vec{\beta}}_1$ содержит все элементы вектора $\tilde{\vec{\beta}}$, за исключением $\tilde{\beta}_0$, а $\mathbf{X}_1$ — матрица полного 2^p или дробного двухуровневого плана. В случае если в (19) вектор $\mathbf{b}_1$ оценки параметров модели (20) заменить вектором $\vec{\beta}_1$ ее параметров, то эти формулы принимают вид

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 + a\mathbf{D}\tilde{\vec{\beta}}_1 \text{ и } \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0 - a\mathbf{D}\tilde{\vec{\beta}}_1, \qquad (21)$$

где $\boldsymbol{\xi}$ — вектор факторов в опыте скорейшего улучшения отклика, соответствующем числу a. По-другому эти формулы можно получить таким же образом, как формулы (19), с использованием функции $E(\tilde{y}) = \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2 + \dots + \tilde{\beta}_p x_p$ модели (20), а не (10).

Теперь если из выражений (19) вычесть соответствующие выражения (21), то получаем $\hat{\vec{\xi}} - \boldsymbol{\xi} = a\mathbf{D}(\mathbf{b}_1 - \tilde{\vec{\beta}}_1)$ и $\hat{\vec{\xi}} - \boldsymbol{\xi} = -a\mathbf{D}(\mathbf{b}_1 - \tilde{\vec{\beta}}_1)$, а после их преобразований —

$$(\mathbf{b}_1 - \tilde{\vec{\beta}}_1) = \mathbf{D}^{-1}(\hat{\vec{\xi}} - \xi)/a$$

$$\text{и } (\mathbf{b}_1 - \tilde{\vec{\beta}}_1) = -\mathbf{D}^{-1}(\hat{\vec{\xi}} - \xi)/a. \qquad (22)$$

Эти формулы содержат вектор $\mathbf{b}_1$ оценки параметров модели (20). А если вектор $\tilde{\mathbf{y}}$ нормированных переменных отклика этой модели имеет нормальное распределение $N_n(\mathbf{X}\tilde{\vec{\beta}}_1, \sigma^2\mathbf{I})$, то для элементов вектора $\tilde{\vec{\beta}}_1$ их $100(1 - \alpha)$ %-ная совместная доверительная область состоит из всех их значений, удовлетворяющих неравенству [4, с. 210]

$$(\mathbf{b}_1 - \tilde{\vec{\beta}}_1)^{\text{т}} \mathbf{X}_1^{\text{т}} \mathbf{X}_1 (\mathbf{b}_1 - \tilde{\vec{\beta}}_1) \le ps^2 F_{\text{кр}}, \qquad (23)$$

где $F_{\text{кр}}$ — критическое значение случайной переменной с распределением $F(p, n - p)$ и интегральной вероятностью $1 - \alpha$ на интервале от 0 до $F_{\text{кр}}$; p — число факторов модели (20); s^2 — выборочная дисперсия. Подставляя в (23) вместо $(\mathbf{b}_1 - \tilde{\vec{\beta}}_1)$ его выражения из (22), получаем

$$(\hat{\vec{\xi}} - \boldsymbol{\xi})^{\text{т}} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_1^{\text{т}} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}^{-1} (\hat{\vec{\xi}} - \boldsymbol{\xi}) \le a^2 ps^2 F_{\text{кр}}. \qquad (24)$$

Для ряда чисел a все удовлетворяющие этому неравенству значения элементов вектора $\boldsymbol{\xi}$ образуют $100(1 - \alpha)$ %-ную совместную доверительную область.

Эту доверительную область в трех измерениях можно представить только для двух факторов и изменяющегося a. При числе факторов больше двух использование выражения (24) для анализа становится затруднительным и лучше рассматривать доверительные интервалы для каждого фактора.

Как и в случае доверительной области, подставив в формулы (16) и (17) вместо результатов оценки параметров модели (20) сами параметры, имеем

$$\xi_1 = \xi_{10} + aS_1\tilde{\beta}_1,\ \xi_2 = \xi_{20} + aS_2\tilde{\beta}_2,\ \dots,$$

$$\xi_p = \xi_{p0} + aS_p\tilde{\beta}_p, \qquad (25)$$

$$\xi_1 = \xi_{10} - aS_1\tilde{\beta}_1,\ \xi_2 = \xi_{20} - aS_2\tilde{\beta}_2,\ \dots,$$

$$\xi_p = \xi_{p0} - aS_p\tilde{\beta}_p. \qquad (26)$$

Далее, вычитая соответственно (25) из (16) и (26) из (17), получаем

$$\hat{\xi}_1 - \xi_1 = aS_1(b_1 - \tilde{\beta}_1),\ \hat{\xi}_2 - \xi_2 = aS_2(b_2 - \tilde{\beta}_2),\ ...,$$

$$\hat{\xi}_p - \xi_p = aS_p(b_p - \tilde{\beta}_p),$$

$$\hat{\xi}_1 - \xi_1 = -aS_1(b_1 - \tilde{\xi}_1),\ \hat{\xi}_2 - \xi_2 = -aS_2(b_2 - \tilde{\beta}_2),\ ...,$$

$$\hat{\xi}_p - \xi_p = -aS_p(b_p - \tilde{\beta}_p),$$

а после их преобразований —

$$b_1 - \tilde{\beta}_1 = (\hat{\xi}_1 - \xi_1)/(aS_1),\ b_2 - \tilde{\beta}_2 = (\hat{\xi}_2 - \xi_2)/(aS_2),\ ...,$$

$$b_p - \tilde{\beta}_p = (\hat{\xi}_p - \xi_p)/(aS_p), \qquad (27)$$

$$b_1 - \tilde{\beta}_1 = -(\hat{\xi}_1 - \xi_1)/(aS_1),\ b_2 - \tilde{\beta}_2 = -(\hat{\xi}_2 - \xi_2)/(aS_2),\ ...,$$

$$b_p - \tilde{\beta}_p = -(\hat{\xi}_p - \xi_p)/(aS_p). \qquad (28)$$

Статистики $(b_j - \tilde{\beta}_j)/(s\sqrt{g_{jj}})$, где s — выборочное стандартное отклонение и g_{jj} — j-й диагональный элемент матрицы $(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}$, имеют центральное распределение t [4, с. 210]. Считая, что вероятность

$$Pr\left[-t_{\alpha/2}(n-p) \le \frac{b_j - \tilde{\beta}_j}{s\sqrt{g_{jj}}} \le t_{\alpha/2}(n-p)\right] = 1 - \alpha,$$

где $-t_{\alpha/2}(n-p)$ и $t_{\alpha/2}(n-p)$ — критические значения распределения $t(n-p)$, и подставляя вместо $(b_j - \tilde{\beta}_j)$ их выражения из (27) и (28), получаем

$$Pr\left[-t_{\alpha/2}(n-p) \le \frac{\hat{\xi}_j - \xi_j}{aS_j s\sqrt{g_{jj}}} \le t_{\alpha/2}(n-p)\right] = 1 - \alpha,$$

$$Pr\left[-t_{\alpha/2}(n-p) \le -\frac{\hat{\xi}_j - \xi_j}{aS_j s\sqrt{g_{jj}}} \le t_{\alpha/2}(n-p)\right] = 1 - \alpha,$$

а после преобразований в квадратных скобках —

$$\Pr[\hat{\xi}_j - aS_j s\sqrt{g_{jj}}t_{\alpha/2}(n-p) \le \xi_j \le$$

$$\le \hat{\xi}_j + aS_j s\sqrt{g_{jj}}t_{\alpha/2}(n-p)] = 1 - \alpha,$$

$$Pr[\hat{\xi}_j - aS_j s\sqrt{g_{jj}}t_{\alpha/2}(n-p) \le \xi_j \le$$

$$\le \hat{\xi}_j + aS_j s\sqrt{g_{jj}}t_{\alpha/2}(n-p)] = 1 - \alpha.$$

Следовательно, $100(1-\alpha)$ %-ный доверительный интервал для фактора ξ_j находится по формуле $\hat{\xi}_j \pm aS_j s\sqrt{g_{jj}}t_{\alpha/2}(n-p)$ или с учетом (16) и (17) — соответственно по формулам

$$\xi_{j0} + aS_j[b_j \pm s\sqrt{g_{jj}}t_{\alpha/2}(n-p)], \qquad (29)$$

$$\xi_{j0} - aS_j[b_j \pm s\sqrt{g_{jj}}t_{\alpha/2}(n-p)]. \qquad (30)$$

Формулы (29) и (30) позволяют рассчитывать доверительные интервалы факторов для опытов скорейшего улучшения отклика соответственно при его увеличении и уменьшении.

Интервалы предсказаний отклика в опытах его скорейшего улучшения

С использованием линейной модели (20) можно находить интервалы предсказаний переменных отклика в опытах его скорейшего улучшения. Пусть строка $\hat{\mathbf{x}}_{ac} = [ab_1, ab_2, ..., ab_p] = a[b_1, b_2, ..., b_p]$ представляет результат оценки факторов $x_1, x_2, ..., x_p$ для некоторого опыта (a) скорейшего улучшения отклика. Строка $\hat{\mathbf{x}}_{ac}$ не является одной из строк матрицы $\mathbf{X}_1$ модели (20), но если при некотором a элементы этой строки будут сильно отличаться от элементов соответствующих столбцов матрицы $\mathbf{X}_1$, то предсказание может сильно отличаться от наблюдаемого отклика в этом опыте.

Для предсказания нормированной переменной $\tilde{y}_a$ отклика в опыте его скорейшего улучшения, соответствующей строке $\hat{\mathbf{x}}_{ac}$ оценки факторов, можно использовать линейную модель

$$\tilde{y}_a = \hat{\mathbf{x}}_{ac}\tilde{\vec{\beta}}_1 + \tilde{\varepsilon},$$

для которой справедливы обычные допущения. Предсказываемое значение переменной $\tilde{y}_a$ находится по формуле $\hat{\tilde{y}}_a = \hat{\mathbf{x}}_{ac}\mathbf{b}_1 = a\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1$, что является также результатом оценки математического ожидания $E(\tilde{\mathbf{y}}_a) = \hat{\mathbf{x}}_{ac}\tilde{\beta}_1$. Случайные величины $\tilde{y}_a$ и $\hat{\tilde{y}}_a$ независимы, так как предсказываемая нормированная переменная $\tilde{y}_a$ считается независимой от n наблюдаемых нормированных переменных отклика начального эксперимента, используемых для получения результата $\hat{\tilde{y}}_a$ оценки. С учетом этого дисперсия разности $\tilde{y}_a - \hat{\tilde{y}}_a$ находится в виде

$$D(\tilde{y}_a - \hat{\tilde{y}}_a) = D(\tilde{y}_a - \hat{\mathbf{x}}_{ac}\mathbf{b}_1) = D(\hat{\mathbf{x}}_{ac}\tilde{\vec{\beta}}_1 + \varepsilon - \hat{\mathbf{x}}_{ac}\mathbf{b}_1).$$

А так как $\hat{\mathbf{x}}_{ac}\tilde{\vec{\beta}}_1$ считается постоянной и $\mathbf{b}_1 = (\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{y}}$, то

$$D(\tilde{y}_a - \hat{\tilde{y}}_a) = D(\varepsilon) + D(\hat{\mathbf{x}}_{ac}\mathbf{b}_1) =$$

$$= \sigma^2 + \sigma^2\hat{\mathbf{x}}_{ac}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{ac}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sigma^2[1+\hat{\mathbf{x}}_{ac}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{ac}^{\mathrm{T}}],$$

что можно оценить выражением $s^2[1+\hat{\mathbf{x}}_{ac}(X_1^{\mathrm{T}}X_1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{ac}^{\mathrm{T}}]$ [3, с. 91].

Разность $\tilde{y}_a - \hat{\tilde{y}}_a$ имеет математическое ожидание

$$E(\tilde{y}_a - \hat{\tilde{y}}_a) = E(\hat{\mathbf{x}}_{ac}\tilde{\tilde{\beta}}_1 + \varepsilon - \hat{\mathbf{x}}_{ac}\mathbf{b}_1) = 0,$$

так как $E(\varepsilon) = 0$ и $E(\mathbf{b}_1) = \tilde{\tilde{\beta}}_1$, а результат s^2 оценки дисперсии не зависит от $\tilde{y}_a$ и $\hat{\tilde{y}}_a = \hat{\mathbf{x}}_{ac}\mathbf{b}_1$. Таким образом, имеющая распределение t с $(n-p)$ степенями свободы статистика t_y получается в виде [4, с. 213]

$$t_y = \frac{\tilde{y}_a - \hat{\tilde{y}}_a - 0}{s\sqrt{1+\hat{\mathbf{x}}_{ac}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{ac}^{\mathrm{T}}}}.$$

Значения этой статистики с вероятностью $1-\alpha$ находятся в интервале между критическими значениями $-t_{\alpha/2}(n-p)$ и $t_{\alpha/2}(n-p)$ распределения $t(n-p)$, что можно записать как

$$Pr\left[-t_{\alpha/2}(n-p) \le \frac{\tilde{y}_a - \hat{\tilde{y}}_a}{s\sqrt{1+\hat{\mathbf{x}}_{ac}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{ac}^{\mathrm{T}}}} \le \right.$$

$$\left. \le t_{\alpha/2}(n-p)\right] = 1-\alpha.$$

Чтобы получить $100(1-\alpha)$ %-ный интервал предсказаний переменной $\tilde{y}_a$, преобразуем неравенства в квадратных скобках к виду

$$\hat{\tilde{y}}_a - s\sqrt{1+\hat{\mathbf{x}}_{ac}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{ac}^{\mathrm{T}}}\,t_{\alpha/2}(n-p) \le$$

$$\le \tilde{y}_a \le \hat{\tilde{y}}_a + s\sqrt{1+\hat{\mathbf{x}}_{ac}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{ac}^{\mathrm{T}}}\,t_{\alpha/2}(n-p)$$

и, учитывая, что $\hat{\tilde{y}}_a = \hat{\mathbf{x}}_{ac}\mathbf{b}_1 = a\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1$, получаем формулу расчета этого интервала

$$\hat{\mathbf{x}}_{ac}\mathbf{b}_1 \pm s\sqrt{1+\hat{\mathbf{x}}_{ac}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{ac}^{\mathrm{T}}}\,t_{\alpha/2}(n-p) \quad (31)$$

или

$$a\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1 \pm s\sqrt{1+a^2\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{b}_1}\,t_{\alpha/2}(n-p).$$

Заметим, что доверительная вероятность $1-\alpha$ для конкретного интервала предсказаний имеет место только для одного набора элементов строки $\hat{\mathbf{x}}_{ac}$. Поэтому для результата каждого опыта скорейшего улучшения отклика будет свой интервал предсказаний.

Для получения интервала предсказаний в натуральных единицах измерений необходимо преобразовать нормированную переменную отклика в натуральные единицы измерений по формуле (18). А если в эту формулу вместо $\hat{\tilde{y}}_a$ подставить (31), то выражение для расчета интервалов предсказаний отклика в опытах его скорейшего улучшения получается в виде

$$\bar{y} + S_y\Big[\hat{\mathbf{x}}_{ac}\mathbf{b}_1 \pm$$

$$\pm s\sqrt{1+\hat{\mathbf{x}}_{ac}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{ac}^{\mathrm{T}}}\,t_{\alpha/2}(n-p)\Big] \quad (32)$$

или

$$\bar{y} + S_y\Big[a\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{b}_1 \pm s\sqrt{1+a^2\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{b}_1}\,t_{\alpha/2}(n-p)\Big].$$

Здесь, как и при расчете доверительных интервалов факторов, если отклик увеличивается, то строка $\hat{\mathbf{x}}_{ac}$ берется с положительным знаком, а если уменьшается, то с отрицательным, и формула (32) принимает вид

$$\bar{y} - S_y\Big[\hat{\mathbf{x}}_{ac}\mathbf{b}_1 \pm$$

$$\pm s\sqrt{1+\hat{\mathbf{x}}_{ac}(\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_{ac}^{\mathrm{T}}}\,t_{\alpha/2}(n-p)\Big]. \quad (33)$$

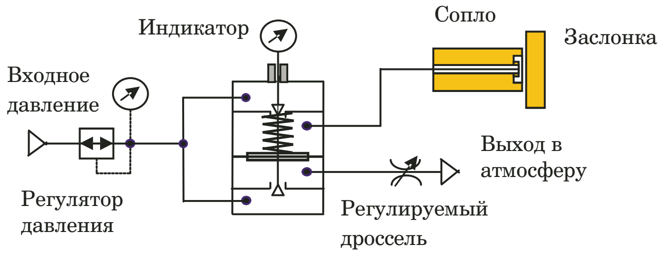

Рис. 3. Схема пневматического преобразователя линейных перемещений

Использование метода скорейшего улучшения отклика

Использование метода скорейшего улучшения отклика рассмотрим на примере экспериментального исследования быстродействия пневматического преобразователя линейных перемещений (рис. 3) [12]. В нем сжатый воздух сначала проходит через регулятор давления, а затем течет по двум каналам. В нижнем канале воздух входит в камеру противодавления через переменный входной дроссель с коническим клапаном и выходит в атмосферу через регулируемый дроссель установки нулевой позиции штока. В верхнем канале сжатый воздух входит в рабочую камеру через переменный дроссель с коническим клапаном и выходит в атмосферу через дроссель сопло-заслонка. Разделяет две камеры очень гибкая мембрана с жестким центром. Мембрана соединена с коническими клапанами на штоке через жесткий центр так, чтобы изменять проходные сечения входных дросселей камер.

Быстродействие преобразователя определяется временем его срабатывания, т.е. временем, затрачиваемым на перемещение и установку в новое положение подвижных деталей преобразователя при появлении заслонки перед соплом на определенном расстоянии. Быстродействие тем лучше, чем меньше время срабатывания.

Для нахождения значений факторов, при которых преобразователь приобретает лучшее быстродействие, применяли метод его скорейшего улучшения. В этом случае использовали перечисленные в табл. 1 числовые факторы. Уровни и интервалы варьирования этих факторов выбирали в соответствии с предварительными теоретическими и экспериментальными исследованиями.

Для выполнения процедуры скорейшего улучшения быстродействия необходимо оценить воздействия нормированных факторов на нормированные переменные отклика. Эти воздействия не должны быть совмещены с воздействиями двухфакторных взаимодействий. Для семи факторов существует показанный в табл. 2 дробный план 2^{7-3}_{IV}, по которому проведение эксперимента дает данные для оценки воздействий факторов, не совмещенных с воздействиями двухфакторных взаимодействий.

План 2^{7-3}_{IV} получается объединением основного плана 2^{7-4}_{III} с дополнительным планом 2^{7-4}_{III}, получаемым изменением всех знаков уровней факторов основного на обратные [5, с. 142; 7, с. 109]. И если воздействиями от взаимодействий трех и более факторов можно пренебречь, то воздействия факторов на отклик можно оценить на основе данных эксперимента, выполняемого по плану 2^{7-3}_{IV}.

Опыты эксперимента по дробному плану 2^{7-3}_{IV} выполняли в случайной последовательности и каждый повторяли дважды. Их результаты в миллисекундах представлены в табл. 2 элементами векторов $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$. Для процедуры скорейшего улучшения отклика необходима модель с нормированными факторами и переменными отклика.

Таблица 1. Значения уровней факторов и формулы их нормирования

Факторы (единицы измерений)	Уровни факторов		ξ_{j0}	S_j	Формулы нормирования
	Нижний	Верхний			
Площадь проходного сечения дросселя сопло-заслонка, ξ_1, мм^2	1,413	1,571	1,492	0,079	$x_1 = (\xi_1 - 1{,}492)/0{,}079$
Давление сжатого воздуха на входе в преобразователь, ξ_2, кПа	50,0	60,0	55,0	5,0	$x_2 = (\xi_2 - 55{,}0)/5{,}0$
Объем камеры противодавления, ξ_3, см^3	24,55	29,57	27,06	2,51	$x_3 = (\xi_3 - 27{,}06)/2{,}51$
Жесткость пружины, ξ_4, Н/м	107	211	159	52	$x_4 = (\xi_4 - 159)/52$
Угол конуса конических клапанов, ξ_5, град.	30	35	32,5	2,5	$x_5 = (\xi_5 - 32{,}5)/2{,}5$
Объем рабочей камеры, ξ_6, см^3	21,54	25,32	23,43	1,89	$x_6 = (\xi_6 - 23{,}43)/1{,}89$
Эффективная площадь мембраны, ξ_7, мм^2	3207	3473	3340	133	$x_7 = (\xi_7 - 3340)/133$

Таблица 2. План 2^{7-3}_{IV} и результаты эксперимента с преобразователем

Опыты	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y_1	y_2
1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	52	56
2	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	76	72
3	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	68	64
4	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	64	56
5	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	56	64
6	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	44	44
7	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	60	60
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	76	76
9	+1	+1	+1	–1	–1	–1	+1	60	64
10	–1	+1	+1	+1	+1	–1	–1	40	48
11	+1	–1	+1	+1	–1	+1	–1	56	60
12	–1	–1	+1	–1	+1	+1	+1	64	64
13	+1	+1	–1	–1	+1	+1	–1	56	60
14	–1	+1	–1	+1	–1	+1	+1	76	76
15	+1	–1	–1	+1	+1	–1	+1	68	72
16	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	60	56

Для рассматриваемого эксперимента эта модель постулируется в виде

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{CX}\tilde{\tilde{\beta}} + \tilde{\beta}, \qquad (34)$$

где матрица модели $\mathbf{X} = [\mathbf{1}\ \mathbf{X}_1]$, $\mathbf{X}_1$ — матрица плана 2^{7-3}_{IV}; $\tilde{\tilde{\beta}}^{\text{т}} = [\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_4, \tilde{\beta}_5, \tilde{\beta}_6, \tilde{\beta}_7]$ — вектор параметров модели; матрица $\mathbf{C} = [\mathbf{I}_n\ \mathbf{I}_n]$; $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица ранга $n = 16$. Переменные отклика векторов $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ нормировались по формуле (7), и вектор нормированных переменных отклика

$$\tilde{\mathbf{y}}^{\text{т}} = [-0{,}992\ 1{,}514\ 0{,}679\ 0{,}261\ -0{,}574\ -1{,}827$$

$$-0{,}157\ 1{,}514\ -0{,}157\ -2,245\ -0{,}574\ 0{,}261\ -0{,}574$$

$$1{,}514\ 0{,}679\ -0{,}157\ -0{,}574\ 1{,}096\ 0{,}261\ -0{,}574$$

$$0{,}261\ -1{,}827\ -0{,}157\ 1{,}514\ 0{,}261\ -1{,}409\ -0{,}157$$

$$0{,}261\ -0{,}157\ 1{,}514\ 1{,}096\ -0{,}574].$$

Вектор оценки параметров модели (34) найден методом наименьших квадратов [13] по формуле $\mathbf{b} = (\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{C}^{\text{т}}\tilde{\mathbf{y}}/2$ в виде

$$\mathbf{b}^{\text{т}} = [0\ 0{,}130\ 0{,}130\ -0{,}313$$

$$0{,}078\ -0{,}209\ 0{,}365\ 0{,}731].$$

Сумма квадратов остатков при модели (34) получена из выражения

$$S_E = \tilde{\mathbf{y}}^{\text{т}}[\mathbf{I}_m - \mathbf{CX}(\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{C}^{\text{т}}\mathbf{CX})^{-1}\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{C}^{\text{т}}]\tilde{\mathbf{y}},$$

и дисперсия оценена по формуле $s^2 = S_E/(m - p)$, где $(m - p)$ — ранг матрицы $\mathbf{I} - \mathbf{CX}(\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{C}^{\text{т}}\mathbf{CX})^{-1}\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{C}^{\text{т}}$. Отсюда результат оценки дисперсии $s^2 = 0{,}193$. Для матрицы $(\mathbf{X}^{\text{т}}\mathbf{C}^{\text{т}}\mathbf{CX})^{-1}$ все диагональные элементы $g_{jj} = 1/32$. Результат оценки дисперсии элементов вектора $\mathbf{b}$ — $g_{jj}s^2 = 6{,}022 \cdot 10^{-3}$, а корень квадрантный из него равен $\pm 0{,}078$ и является стандартной ошибкой оценки параметров модели (34).

Результаты оценки параметров с их стандартными ошибками можно записать так: $b_1 = 0{,}130 \pm 0{,}078$; $b_2 = 0{,}130 \pm 0{,}078$; $b_3 = -0{,}313 \pm 0{,}078$; $b_4 = 0{,}078 \pm 0{,}078$; $b_5 = -0{,}209 \pm 0{,}078$; $b_6 = 0{,}365 \pm 0{,}078$; $b_7 = 0{,}731 \pm 0{,}078$. Отсюда

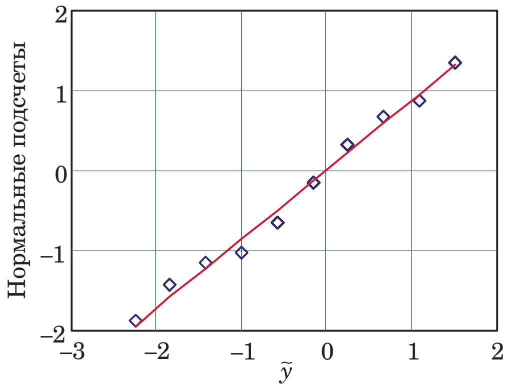

Рис. 4. График кумулятивных вероятностей распределения элементов вектора $\tilde{\mathbf{y}}$, где нормальные подсчеты являются шкалой стандартных отклонений от среднего

видно, что b_4 равно стандартной ошибке, а b_1 и b_2 меньше удвоенной стандартной ошибки. Поэтому воздействия факторов x_1, x_2 и x_4 можно отнести к шуму и эти факторы исключить из процедуры скорейшего улучшения отклика.

Следовательно, в данном случае модель (20) принимает вид

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{X}^*\tilde{\tilde{\beta}}_1 + \tilde{\tilde{\varepsilon}}, \qquad (35)$$

где $\mathbf{X}^* = \mathbf{CX}_1$, $\mathbf{X}_1$ — матрица плана 2^{7-3}_{IV} уровней оставшихся факторов без столбцов уровней факторов x_1, x_2 и x_4, а вектор параметров модели $\tilde{\tilde{\beta}}_1^{\text{т}} = [\tilde{\beta}_3, \tilde{\beta}_5, \tilde{\beta}_6, \tilde{\beta}_7]$. Таким образом, процедура скорейшего улучшения отклика строится на основе модели (35) с четырьмя факторами. Но для этого необходимо проверить ее значимость.

Статистическую проверку значимости модели выполняют на основе допущения, что нормированные переменные отклика распределены по нормальному закону. Справедливость этого допущения оценивают по графику кумулятивных вероятностей распределения нормированных элементов вектора $\tilde{\mathbf{y}}$ [13]. Для рассматриваемого эксперимента этот график показан на рис. 4. На нем все элементы вектора $\tilde{\mathbf{y}}$ находятся близко к прямой линии. Поэтому можно уверенно допустить, что они распределены по нормальному закону.

Статистическая проверка значимости модели (35) состоит в проверке гипотезы H_0: $\tilde{\tilde{\beta}}_1 = 0$ с ис-

Таблица 3. Расчет статистики F_R для проверки гипотезы H_0: $\tilde{\tilde{\beta}}_1 = 0$

Источники вариации	Суммы квадратов	Степени свободы	Средние квадратичные	Статистика проверки F_R
Регрессия	$S_R = 25{,}896$	$p = 4$	$S_R/p = 6{,}474$	$\dfrac{S_{Rc}/p}{S_E/(m-p)} = 29{,}70$
Остатки	$S_E = 6{,}104$	$m - p = 28$	$S_E/(m - p) = 0{,}218$	
Итого	$S_T = 32{,}000$	$m = 32$		

пользованием статистики, имеющей распределение F и вычисляемой по формуле [4, с. 185]

$$F_R = \frac{S_R/p}{S_E/(m-p)}, \qquad (36)$$

где сумма квадратов остатков $S_E = \tilde{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{I}_m - \mathbf{X}^*(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}})\tilde{\mathbf{y}}$ и получаемая в результате регрессии сумма квадратов $S_R = \tilde{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}^*(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{y}}$, а p и $(m-\mathrm{p})$ соответственно ранги матриц $\mathbf{X}^*(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}$ и $\mathbf{I}_m - \mathbf{X}^*(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}$.

Расчет статистики F_R сведен в табл. 3. Проверка гипотезы H_0: $\tilde{\tilde{\beta}}_1 = 0$ по статистике F_R показывает, что полученное значение $F_R = 29{,}70$ больше критического $F_{\text{кр}} = 2{,}714$ случайной переменной, имеющей центральное распределение $F(4{,}28)$ и интегральную вероятность 0,95 на интервале от 0 до $F_{\text{кр}}$. Поэтому гипотеза H_0: $\tilde{\tilde{\beta}}_1 = 0$ ложна и модель (35) значима. Для адекватной оценки функции этой модели рекомендуется, чтобы статистика F_R превосходила критическое значение $F_{\text{кр}}$ по крайней мере в 10 раз [5, с. 281]. В данном случае F_R превосходит $F_{\text{кр}}$ более чем в 10 раз, поэтому в результате оценки параметров модели (35) оценка ее функции отклика получается адекватной.

Проверка адекватности самой модели (35) выполняется для эксперимента с повторяемыми опытами [13]. Расчет статистики F_{LF} неадекватности сведен в табл. 4. И если уровень значимости α для этой проверки выбрать равным 0,01, то статистика F_{LF} получается меньше критического значения $[F_{LF} = 3{,}333 < F_{0{,}01}(12, 16) = 3{,}553]$. Поэтому линейную модель (35) можно считать статистически адекватной.

В процедуре скорейшего улучшения отклика используется только функция отклика модели (35). Поэтому для успешного ее выполнения необходимым и достаточным условием является адекватность функции отклика. Однако адекватность самой модели может обеспечить лучшие предсказания отклика.

Для проведения опытов скорейшего улучшения отклика необходимо знать, какие значения факторов в них устанавливать и их доверительные интервалы. Для расчета доверительных интервалов оценим сначала по формуле (14) нормированные факторы для этих опытов. Для них выбраны числа a, соответственно равные 1, 5, 3, 5, 7, 11 и 15, а вектор оценки параметров найден по формуле $\mathbf{b}_1 = (\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{y}}$ в виде $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}} = [-0{,}313\ -0{,}209\ 0{,}365\ 0{,}731]$. Результаты оценки нормированных факторов для опытов скорейшего улучшения отклика представлены в табл. 5.

Для пересчета нормированных факторов в натуральные единицы измерений в данном случае следует использовать формулы

$$\hat{\xi}_3 = \xi_{30} - ab_3S_3,\ \hat{\xi}_5 = \xi_{50} - ab_5S_5,$$

$$\hat{\xi}_6 = \xi_{60} - ab_6S_6 \text{ и } \hat{\beta}_7 = \xi_{70} - ab_7S_7, \qquad (37)$$

так как скорейшее улучшение отклика связано с уменьшением времени срабатывания преобразователя. При этом основные уровни и интервалы варьирования факторов берутся из табл. 1 и формулы оценки факторов принимают вид

$$\hat{\xi}_3 = 27{,}06 - 2{,}51\hat{x}_3,\ \hat{\xi}_5 = 32{,}5 - 2{,}5\hat{x}_5,$$

$$\hat{\xi}_6 = 23{,}43 - 1{,}89\hat{x}_6,\ \hat{\xi}_7 = 3340 - 133\hat{x}_7.$$

Подставляя в эти формулы вместо $\hat{x}_3, \hat{x}_5, \hat{x}_6$ и $\hat{x}_7$ соответствующие результаты их оценки из табл. 5, получаем показанные в табл. 6 резуль-

Таблица 4. Проверка адекватности линейной модели (35)

Источники вариации	Суммы квадратов	Степени свободы	Средние квадратичные	Статистика F_{LF}
Неадекватность	$S_{LF} = 4{,}360$	12	$MS_{LF} = 0{,}363$	3,333
Чистые ошибки	$S_{PE} = 1{,}744$	16	$MS_{PE} = 0{,}109$	
Остатки	$S_E = 6{,}104$	28		

Таблица 5. Результаты оценки нормированных факторов для опытов скорейшего улучшения отклика

a	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{x}_7$
1,5	–0,470	–0,313	0,548	1,096
3	–0,940	–0,626	1,096	2,192
5	–1,566	–1,044	1,827	3,654
7	–2,192	–1,462	2,558	5,116
11	–3,445	–2,297	4,019	8,039
15	–4,698	–3,132	5,481	10,962

таты оценки факторов в натуральных единицах измерений.

Для проведения опытов скорейшего улучшения отклика необходимо также знать доверительные интервалы изменяемых в них факторов, так как ввиду возможных технологических ограничений реально устанавливаемые их значения могут отличаться от приведенных в табл. 6. В данном случае модель (35) адекватна и уровень значимости $\alpha = 0{,}01$. При этом для расчета 99 %-ных доверительных интервалов по формуле (30) необходимы выборочное стандартное отклонение s, а также диагональные элементы g_{jj} матрицы $(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*})^{-1}$ и критическое значение $t_{\alpha/2}(m - p)$ распределения t.

Выборочное стандартное отклонение s находится по результату оценки дисперсии с использованием модели (35). Дисперсия оценивается по формуле $s^2 = S_E/(m - p)$ и выборочное стандартное отклонение $s = \sqrt{S_E/(m - p)} = \pm 0{,}467$. Диагональные элементы g_{jj} матрицы $(\mathbf{X}^{*\mathrm{T}}\mathbf{X}^{*})^{-1}$ равны 1/32, а критическое значение $t_{\alpha/2}(m - p) = 2{,}763$. Результаты расчета 99 %-ных доверительных интервалов факторов показаны в табл. 7.

Кроме оценки факторов и вычисления их доверительных интервалов для опытов скорейшего улучшения отклика, можно предсказать в них отклик и найти интервалы его предсказаний. Результаты оценки факторов для опытов скорейшего улучшения отклика не сильно отличаются от области их значений в начальном эксперименте. Поэтому, если взять те же числа a, равные 1,5, 3, 5, 7, 11 и 15, то интервалы предсказаний отклика в соответствующих опытах его скорейшего улучшения получаются по формуле (33) равными 50 ± 13, 38 ± 14, 23 ± 16, 7 ± 18, –24 ± 25 и –55 ± 32.

В начальном эксперименте с пневматическим преобразователем по плану 2^{7-3}_{IV} реальные значения факторов в опытах скорейшего улучшения отклика выбирали (табл. 8) с учетом технологических ограничений [12]. Все они близки к результатам оценки в табл. 6 и находятся в пределах 99 %-ных доверительных интервалов табл. 7. Результаты опытов показали быстро уменьшающееся время срабатывания преобразователя.

Представленные в табл. 8 результаты наблюдений времени срабатывания в опытах показаны на рис. 5 в виде графика красным цветом вместе с областью предсказываемых значений и самими предсказываемыми значениями, показанными синим цветом. Видно, что предсказанные значения времени срабатывания близки к результатам опытов, четыре из которых входят в показанную синими пунктирными линиями область предсказанных результатов. Однако для последних двух опытов предсказания их результатов получились отрицательными, что противоречит физическому смыслу. На рис. 5 они выходят за пределы области предсказанных значений. Поэтому для используемых факторов в этих опытах выполнение процедуры скорейшего улучшения отклика на основе данных начального эксперимента и модели (35) становится неэффективным.

В процедуре скорейшего улучшения отклика опыты начального эксперимента повторялись,

Таблица 6. Результаты оценки факторов для опытов скорейшего улучшения отклика

a	$\hat{\xi}_3$, см^3	$\hat{\xi}_5$, град.	$\hat{\xi}_6$, см^3	$\hat{\xi}_7$, мм^2
1,5	28,239	33,283	22,394	3194
3	29,418	34,066	21,358	3048
5	30,991	35,110	19,977	2854
7	32,563	36,154	18,596	2660
11	35,707	38,242	15,833	2271
15	38,852	40,330	13,071	1882

Таблица 7. Доверительные интервалы факторов для опытов скорейшего улучшения отклика

a	Доверительные интервалы факторов			
	ξ_3, см^3	ξ_5, град.	ξ_6, см^3	ξ_7, мм^2
1,5	28,24 ± 0,86	33,3 ± 0,9	22,39 ± 0,65	3194 ± 45
3	29,42 ± 1,72	34,1 ± 1,7	21,36 ± 1,29	3048 ± 91
5	30,99 ± 2,86	35,1 ± 2,9	19,98 ± 2,16	2854 ± 152
7	32,56 ± 4,01	36,2 ± 4,0	18,60 ± 3,02	2660 ± 212
11	35,71 ± 6,30	38,2 ± 6,3	15,83 ± 4,74	2271 ± 334
15	38,85 ± 8,59	40,3 ± 8,6	13,07 ± 6,47	1882 ± 455

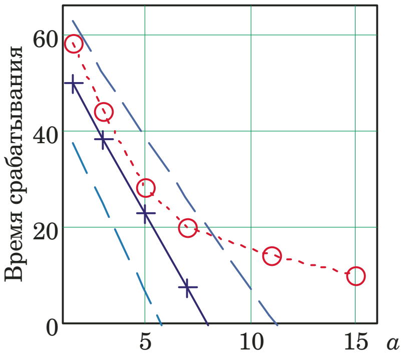

Рис. 5. Графики времени срабатывания (мс) для опытов скорейшего улучшения отклика и результатов предсказаний в них отклика

поэтому можно найти независящее от модели выборочное стандартное отклонение. Для результатов эксперимента с пневматическим преобразователем сумму квадратов чистых ошибок находят по формуле $S_{PE} = \mathbf{y}^{\mathrm{т}}[\mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^{\mathrm{т}}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{т}}]\mathbf{y}$, где $\mathbf{y}^{\mathrm{т}} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$, а $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ — векторы из табл. 2. Эта сумма получается равной 160 мс^2. Она представляется квадратичной формой относительно вектора переменных отклика. Ее среднее квадратичное является независящим от модели несмещенным результатом оценки дисперсии, а корень квадратный из него — также независящим от модели выборочным стандартным отклонением, которое в данном случае равно 3,2 мс. При этом его значении результаты опытов при a, равном 7, 11 и 15, отличаются друг от друга не более чем на двойное выборочное стандартное отклонение. Таким сравнением результатов последних трех опытов подтверждается, что для устанавливаемых в них значений факторов процедура скорейшего улучшения отклика на основе начального эксперимента неэффективна, так как их результаты статистически одинаковы.

Следует также иметь в виду, что получаемые обычно последовательно результаты опытов скорейшего улучшения отклика могут быть коррелированы и это никак не учитывается. Поэтому для устранения возможной корреляции эти опыты должны выполняться в случайной последовательности, как и опыты начального эксперимента. Повторение этих опытов может также позволить оценить стандартное отклонение именно для них, а не использовать выборочное стандартное отклонение опытов начального эксперимента, полагая, что оно такое же, как и для опытов скорейшего улучшения отклика. Использование выборочного стандартного отклонения опытов скорейшего улучшения отклика дает возможность сравнивать их результаты более корректно.

На основе выполненной процедуры скорейшего улучшения быстродействия преобразователя можно сделать вывод, что условный минимум времени срабатывания равен усредненному значению 14,7 мс результатов последних трех опытов. Для всех 32 опытов начального эксперимента по плану 2^{7-3}_{IV} усредненное значение их результатов равно 61,5 мс. Следовательно, в данном случае процедура скорейшего улучшения была эффективной, обеспечив набор значений факторов, при которых время срабатывания преобразователя сократилось в четыре раза. Этот успех можно считать результатом использования новой схемы преобразователя и применения адекватной модели. Но полученный вывод отличается от сделанного на основе применения градиентного метода [12].

Для опытов крутого восхождения предложено эмпирическое правило остановки их проведения, состоящее в том, что эти опыты нужно продолжать до тех пор, пока в двух следующих один за другим не появятся ухудшающиеся результаты [10, с. 234]. Однако при использовании в процедуре скорейшего улучшения отклика больше двух факторов истинная неизвестная функция отклика от этих факторов может иметь более сложную форму, чем те, что известны для функции от двух факторов [5, с. 20]. Например, в опытах скорейшего улучшения отклика с четырьмя и шестью факторами и при сравнительно больших числах a, при которых факторы близки к их максимально или минимально возможным значениям, могут получаться улучшающиеся результаты [12]. Поэтому указанное эмпирическое правило применимо только для случаев с не более чем

Таблица 8. Реальные значения факторов в опытах скорейшего улучшения отклика и их результаты

a	ξ_3, см^3	ξ_5, град.	ξ_6, см^3	ξ_7, мм^2	Время срабатывания, мс
1,5	28,20	33,2	22,43	3207	58
3	29,46	34,0	21,33	3061	44
5	31,06	35,0	19,93	2875	28
7	32,66	36,0	18,53	2689	20
11	35,86	38,0	15,73	2317	14
15	39,06	40,0	12,93	1945	10

двумя факторами. При числе факторов больше двух выбор чисел a для опытов скорейшего улучшения отклика должен обуславливаться областью предсказаний результатов этих опытов. Эту область, а также предсказания результатов опытов скорейшего улучшения отклика можно использовать для планирования проведения этих опытов.

На рис. 5 результаты последних двух опытов выходят за пределы области их предсказаний и изменение времени срабатывания в них можно отнести к случайной вариации. Поэтому для дальнейшего скорейшего улучшения быстродействия преобразователя необходимо проводить новый начальный эксперимент, в котором основными должны быть уровни факторов из опыта с $a = 7$.

Предложенный метод, основанный на начальном эксперименте по двухуровневому плану и линейной модели первого порядка, включающей только факторы плана и нормированные переменные отклика, в отличие от градиентного позволяет корректно и с соблюдением соответствия единиц измерений оценивать факторы для опытов скорейшего улучшения отклика. Он также дает возможность находить доверительные интервалы факторов для этих опытов, чего градиентный метод не позволяет. В данном методе (в отличие от градиентного) используются предсказания результатов опытов скорейшего улучшения отклика и выход их результатов за пределы предсказанных значений нужно считать условием остановки процедуры скорейшего улучшения отклика. Уровни факторов в опыте, результат которого еще находится в интервале его предсказаний, но ближе всех к крайнему пункту этого интервала, можно принять в качестве основных для постановки нового начального эксперимента и повторения выполнения процедуры скорейшего улучшения отклика.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Friedman M., Savage L. J.** Planning experiments seeking maxima / Selected techniques of statistical analysis. Chapter 13. — New York: McGraw-Hill, 1947. P. 365 – 372.
2. **Box G. E. P., Wilson K. B.** On the experimental attainment of optimum conditions / Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1951. Vol. 3. N 1. P. 1 – 45.
3. **Searle S. R.** Linear models. — New York: John Wiley & Sons, 1971. — 532 p.
4. **Rencher A. C., Schaalje G. B.** Linear models in statistics, 2 ed. — New York: John Wiley & Sons, 2008. — 672 p.
5. **Box G. E. P., Draper N. R.** Response surfaces, mixtures and ridge analyses, 2 ed. — New York: John Wiley & Sons, 2007. — 857 p.
6. **Налимов В. В., Чернова Н. А.** Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. — М.: Наука, 1965. — 340 с.
7. **Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В.** Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — М.: Наука, 1976. — 279 с.
8. **Спиридонов А. А.** Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов. — М.: Машиностроение, 1981. — 184 с.
9. **Грачев Ю. П., Плаксин Ю. М.** Математические методы планирования экспериментов. — М.: ДеЛи принт, 2005. — 296 с.
10. **Myers R. H., Montgomery D. C., Anderson-Cook C. M.** Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments, 4 ed. — New York: John Wiley & Sons, 2016. — 825 p.
11. **Себер Дж.** Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980. — 456 с.
12. **Bokov V. B.** The agile development of high-speed response air gauging technology / Journal of Quality Engineering. 2002. Vol. 14. N 3. P. 421 – 433.
13. **Боков В. Б.** Создание эмпирической модели шероховатости поверхности после чистового точения по критерию адекватности / Вестник машиностроения. 2016. № 1. С. 73 – 78.

REFERENCES

1. **Friedman M., Savage L. J.** Planning experiments seeking maxima / Selected techniques of statistical analysis. Chapter 13. — New York: McGraw-Hill, 1947. P. 365 – 372.
2. **Box G. E. P., Wilson K. B.** On the experimental attainment of optimum conditions / Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1951. Vol. 3. N 1. P. 1 – 45.
3. **Searle S. R.** Linear models. — New York: John Wiley & Sons, 1971. — 532 p.
4. **Rencher A. C., Schaalje G. B.** Linear models in statistics, 2 ed. — New York: John Wiley & Sons, 2008. — 672 p.
5. **Box G. E. P., Draper N. R.** Response surfaces, mixtures and ridge analyses, 2 ed. — New York: John Wiley & Sons, 2007. — 857 p.
6. **Nalimov V. V., Chernova N. A.** The statistical methods of extreme experiments design. — Moscow: Nauka, 1965. — 340 p. [in Russian].
7. **Adler U. P., Markova E. V., Granovskiy U. V.** The design of experiment for the search of optimal conditions. — Moscow: Nauka, 1976. — 279 p. [in Russian].
8. **Spiridonov A. A.** The design of experiment in technological processes research. — Moscow: Mashinostroenie, 1981. — 184 p. [in Russian]
9. **Grachev U. P., Plaksin Yu. M.** The mathematical methods of the design of experiments. — Moscow: DeLi print, 2005. — 296 p. [in Russian]
10. **Myers R. H., Montgomery D. C., Anderson-Cook C. M.** Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments, 4 ed. — New York: John Wiley & Sons, 2016. — 825 p.
11. **Seber G.** Linear regression analysis. — Moscow: Mir, 1980. — 456 p. [Russian translation].
12. **Bokov V. B.** The agile development of high-speed response air gauging technology / Journal of Quality Engineering. 2002. Vol. 14. N 3. P. 421 – 433.
13. **Bokov V. B.** The creation of empirical model for surface roughness after final turning by adequacy criteria / Vestn. Mashinostr. 2016. N 1. P. 73 – 78 [in Russian].