

Математические методы исследования

Mathematical methods of investigation

DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-1-I-72-77

О МЕТОДАХ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА*

© Сергей Михайлович Ермаков, Дмитрий Николаевич Семенчиков

Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ), Санкт-Петербург, Россия;
e-mail: sergej.ermakov@gmail.com*Статья поступила 14 февраля 2018 г. Поступила после доработки 13 июня 2018 г.
Принята к публикации 25 ноября 2018 г.*

Известна новая модификация моделирования отжига для поиска глобального экстремума функций многих переменных. Модификация использует тот факт, что функция $F_n(x) = \frac{f_n(x)}{\int_D f_n(x) dx}$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к δ -функции, сосредоточенной в точке глобального максимума $f(x)$. Подробно рассматривался случай, когда функция имеет много равных экстремумов. Задачи такого типа часто встречаются, в частности, при планировании регрессионных экспериментов. Данная работа знакомит читателя с методом поиска экстремума, эффективным при решении широкого круга прикладных задач, а также иллюстрирует его применение на некоторых простейших задачах планирования регрессионных экспериментов. Предложенная модификация имитации отжига использует на промежуточных этапах квазислучайный поиск. Это не самый быстрый, но очень надёжный метод, позволяющий достаточно полно обследовать область определения функции. При решении численных примеров построены так называемые точные D -оптимальные планы, которые очень трудно получить другими методами. Хотя с ростом числа переменных трудоёмкость метода (как и других известных методов) резко возрастает за счёт увеличения порядка определителя, предложенный алгоритм прост, надёжен и легко распараллеливается. Известно, что выигрыш от использования оптимальных планов в ряде случаев способен оправдывать любые вычислительные затраты на построение этих планов. Используя описанную в работе методику, читатель сможет построить даже с помощью ноутбука оптимальные планы для разных областей при умеренных значениях параметров (например, для квадратичной регрессии от s переменных при $s \leq 10$).

Ключевые слова: имитация отжига; глобальный экстремум; регрессия; планирование эксперимента; квази Монте-Карло; D -оптимальные планы.

ON OPTIMIZATION METHODS IN THE PROBLEMS OF EXPERIMENT DESIGN

© Sergey M. Ermakov, Dmitry N. Semenchikov

St. Petersburg State University (SPbSU), St. Petersburg, Russia; e-mail: sergej.ermakov@gmail.com

Received February 14, 2018. Revised June 13, 2018. Accepted November 25, 2018.

A new known modification for simulation of annealing to search the global extremum of the functions of many variables uses the fact that the function $F_n(x) = \frac{f_n(x)}{\int_D f_n(x) dx}$ when $n \rightarrow \infty$ converges to the δ -function

concentrated at the point of global maximum of $f(x)$. The case when the function has many equal extrema is discussed in detail. Problems of this type are often present, particularly in the design of regression experiments. Here we introduce the reader to an extremum search method that is effective in solving a wide range of applied problems, and also illustrate the use of the method in some of the simplest problems of designing the regression experiments. The proposed modification of simulated annealing uses quasi-random

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 17-01-00267, № 17-01-00161).

search at the intermediate stages. This is not the most rapid, but very reliable method which provide a complete exploring of the function domain. When solving numerical examples, the so-called exact D -optimal designs are constructed, which are very difficult to be obtained by other methods. Although with the increase in the number of variables, the complexity of the method (as well as the complexity of other well-known methods) increases dramatically due to an increase in the order of the determinant, the proposed algorithm is simple, reliable, and easily parallelized. It is known that the gain from using optimal designs in some cases can justify any computational costs of developing those designs. Using the described technique, the reader will be able to construct (even using the laptop capacity) the optimal designs in different areas at moderate values of the parameters (for example, for quadratic regression for s variables in variables for $s \leq 10$).

Keywords: simulation of annealing; global extremum; regression; experimental design; quasi Monte-Carlo; D -optimal designs.

Хорошо известно, что планирование эксперимента является важным инструментом повышения эффективности экспериментирования. Оптимальные планы эксперимента могут во много раз снизить материальные затраты в каждом конкретном случае. Задача создания плана эксперимента, как правило, требует решения двух подзадач: 1) конструирование критерия оптимальности эксперимента — для этого используются средства математической статистики; 2) решение задач оптимизации. При этом критерий может быть функцией очень большого числа переменных и иметь сложную природу. Поскольку в рассматриваемом случае требуется найти глобальный экстремум функции (критерия), то для решения задачи, как правило, используют один из вариантов случайного поиска, например, метод имитации отжига [1]. Как известно, в классическом методе имитации отжига речь идёт о нахождении абсолютного минимума функции $f(x)$ с помощью моделирования плотности $Ce^{-f(x)/T}$ методом Метрополиса. Здесь C — константа нормировки. При $T \rightarrow \infty$ эта функция имеет своим пределом δ -функцию, сосредоточенную в точке глобального минимума $f(x)$. Данный метод, имитирующий физический процесс отжига металла, достаточно строго обоснован, если точка, в которой достигается экстремум, является единственной. В задачах планирования эксперимента, однако, часто встречаются случаи, когда таких точек несколько или бесконечно много. Тогда при реализации вычислительных процедур возникают дополнительные трудности. Случай, когда имеется множество равных глобальных экстремумов, специально рассмотрен в работе [2], где упоминается возможность применения полученных результатов к задачам планирования эксперимента.

Многоекстремальный случай требует некоторой новой модификации метода имитации отжига. Идея его очень проста и не требует привлечения соображений из области физики и металлургии. Существо предлагаемой модификации состоит в следующем. Пусть $f(x)$ задана и ограничена в области $D \subset R^s$ s -мерного евклидова

пространства, $0 \leq f(X) \leq M$, $X \in D$. Предположим, что объем $|X|$ множества X , где $f(x) = M$, положителен:

$$|X| = \delta > 0. \quad (1)$$

Рассмотрим поведение функции

$$F_n(X) = \frac{f_n(X)}{\int_D f_n(X) dX} \quad (2)$$

при возрастающем n в предположении существования и конечности интеграла $\int_D f_n(X) dX$. Не умаляя общности, предположим, что $M = 1$, и представим D в виде суммы $D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \{X: f(X) < 1\}, \quad D_2 = \{X: f(X) = 1\}. \quad (3)$$

Положим

$$f_1(X) = \begin{cases} f(X), & X \in D_1; \\ 0, & X \notin D_1, \end{cases} \quad f_2(X) = \begin{cases} f(X), & X \in D_2; \\ 0, & X \notin D_2. \end{cases}$$

Имеем

$$F_n(X) = \frac{f_1^n(X) + f_2^n(X)}{\int_{D_1} f_1(X) dX + \int_{D_2} f_2(X) dX}. \quad (4)$$

Несложно увидеть, что имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(X) = \begin{cases} \frac{1}{|D_2|} & \text{при } X \in D_2, \\ 0 & \text{при } X \notin D_2, \end{cases} \quad (5)$$

где $|D_2|$ — объем D_2 , т.е. $F_\infty(X)$ является плотностью равномерного распределения на множестве D_2 . Этот результат в более общей форме получен в [2].

Таким образом, если можно моделировать плотность $F_n(X)$ при достаточно большом n , то полученные реализации будут находиться вблизи экстремальных значений функции. Обсудим некоторые частные случаи поиска глобального экстремума, где описанная конструкция может быть полезна.

Случай 1. $f(x)$ имеет в D единственный глобальный максимум. Здесь $|D_2| = 0$, но при любом $\varepsilon > 0$ для «урезанной» функции

$$f_\varepsilon(X) = \begin{cases} f(X), & X \in \{X: f(X) \leq M - \varepsilon\} \\ M - \varepsilon, & X \in \{X: f(X) > M - \varepsilon\} \end{cases} \quad (6)$$

$|D_2| > 0$ по крайней мере для кусочно-непрерывных f . Если теоретически полагать $M = 1$ (числитель и знаменатель в (4) можно умножить на одну и ту же константу), то для конкретных примеров иногда требуется значение M , которое можно оценить в процессе вычислений.

Случай 2. Имеется несколько изолированных равных максимумов. Можно применить ту же процедуру «урезания». При достаточно малом ε область D_2 распадется на изолированные подобласти-окрестности каждого максимума.

Случай 3 (наиболее сложный случай). Максимумы заполняют непрерывную подобласть D размерности s или меньшей размерности. Очевидно, при размерности подмножества, меньшей s , процедура «урезания» необходима, иначе мы «пропустим» некоторые точки экстремума.

Алгоритм может выглядеть следующим образом.

1. Выбираем некоторые натуральные числа m, N_1, N_2, n .

2. Вычисляем N_1 значений функции $f(X)$ в точках некоторой квазислучайной последовательности. Запоминаем m точек $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$, в которых функция $f_n(X)$ принимала наибольшие значения. В случае 2 разбиваем полученные точки на кластеры. Характер кластеров, очевидно, будет различным в случаях 1, 2 и 3. Здесь полезно использовать различные средства визуализации.

3. Если кластеризация не удастся, увеличиваем N_1 и, может быть, n ; повторяем пункт 2.

4. Как и в генетическом алгоритме [3], строим выпуклую оболочку точек каждого кластера. В каждой из полученных областей генерируем N_2 равномерно распределенных (возможно, квазислучайных) точек и выбираем m наилучших.

5. Процедура 4 может повторяться с измененными m точками, различными в каждом кластере. Очевидно, величина m напрямую связана с ε , фигурирующем в (6). Чем больше m , тем большим будет ε . На заключительных этапах можно использовать различные модификации градиентных методов.

Предлагаемый метод, так же как и другие методы поиска глобального экстремума (классический метод имитации отжига, генетические алгоритмы), имеет итерационный (многоэтапный) характер, но выгодно отличается от них тем, что на каждом этапе моделируется равномерное распределение на множестве, где достига-

ется глобальный экстремум. Естественным в этом случае является и привлечение методов квази Монте-Карло.

Далее приведем простейший вариант постановки задачи планирования регрессионных экспериментов. Значительно более общую постановку можно найти в доступной литературе (например, [4, 5]).

Заметим, что данная работа не претендует на получение новых результатов в области D -оптимального планирования. Задача построения D -оптимальных планов используется лишь для выбора достаточно сложной функции, у которой ищется точка глобального экстремума. При этом в некоторых случаях (см. пример 1) функция имеет бесконечно много одинаковых экстремумов.

Отметим, что применение классического метода имитации отжига, метода дифференциальной эволюции и генетических алгоритмов связано в случае многих равных экстремумов со значительными неудобствами. То же можно сказать о методе Федорова — Уинна построения так называемых непрерывных планов.

Если эксперимент ставит своей целью определение зависимости величины y от вектора $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$, $\mathbf{x} \in D$ -области s -мерного Евклидова пространства, и априори известно, что

$$y(\mathbf{x}) = \theta_1 f_1(\mathbf{x}) + \dots + \theta_n f_n(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}). \quad (7)$$

где $f_i(\mathbf{x})$ — известные функции, $i = 1, \dots, n$; $\varepsilon(\mathbf{x})$ — при каждом фиксированном $\mathbf{x}$ такая случайная величина, что $E\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$ и $E\varepsilon(\mathbf{x})\varepsilon(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, \\ \delta^2, & \mathbf{x} = \mathbf{y}, \end{cases}$

то распространенным методом оценки неизвестных коэффициентов θ_i , $i = 1, \dots, n$ на основе эксперимента является метод наименьших квадратов.

Эксперимент состоит в измерении (вычислении) $y(\mathbf{x})$ в заданных точках $x_1, \dots, x_n$. Имеем

$$y(x_j) = \sum_{i=1}^n \theta_i f_i(\mathbf{x}_j) + \varepsilon_j,$$

$$E\varepsilon_j \varepsilon_k = \begin{cases} \sigma^2, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Согласно методу наименьших квадратов,

$$\sum_{j=1}^N \left(y(x_j) - \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_i f_i(x_j) \right)^2 = \min, \quad (8)$$

где $\hat{\theta}_i$ — оценки истинных значений параметров θ_i .

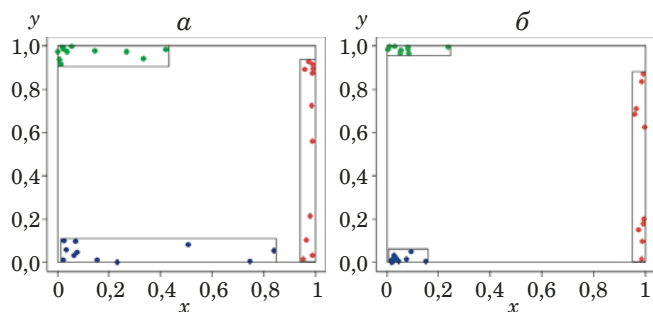


Рис. 1. Расположение отобранных m_1 точек после N_1 испытаний — $m = 11$, $N_1 = 100$ (а) и m_2 точек после N_2 испытаний — $m_2 = 10$, $N_2 = 100$ (б)

Условие (8) равносильно системе линейных уравнений, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{F}^T \mathbf{Y}, \quad (9)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}_1) & \dots & f_n(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\mathbf{x}_N) & \dots & f_n(\mathbf{x}_N) \end{pmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n)^T, \mathbf{Y} = (y(\mathbf{x}_1), \dots, y(\mathbf{x}_N))^T.$$

Как известно, при нормальном распределении ошибок ε_j , вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ также распределен нормально, причем объем его эллипсоида рассеяния пропорционален $(\det \mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1}$. Таким образом, погрешность в определении оценок параметров θ_i зависит от положения точек $x_1, \dots, x_N$. Существует несколько критериев качества расположения точек. Одним из наиболее распространенных является так называемый D -критерий. D -оптимальными в нашем простейшем случае являются точки

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1^0, \dots, \mathbf{x}_N^0) &= \arg \min_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N} (\det \mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} = \\ &= \arg \max_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N} (\det \mathbf{F}^T \mathbf{F}). \end{aligned} \quad (10)$$

Если N велико, то задача численного определения D -оптимального плана может быть непреодолимо трудной. В классических работах Кифера и Вольфовица предложено для больших N определять не точное положение оптимальных точек, а их распределение (непрерывные планы). Были указаны методы численного нахождения непрерывных планов. Недостатки такого подхода достаточно полно обсуждены в литературе [6, 7], останавливаться на них не будем. Отметим только, что в случае минимально возможного числа точек (насыщенные и близкие к ним планы) задача нахождения точных оптимальных планов весьма актуальна.

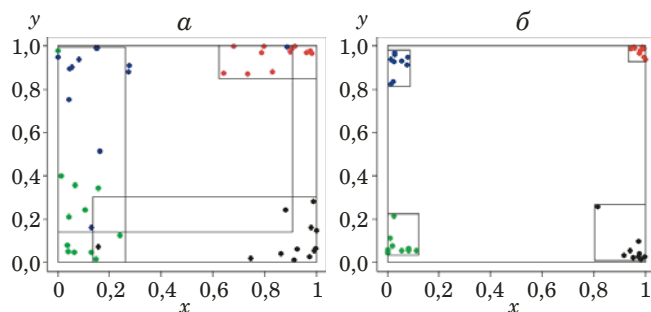


Рис. 2. Расположение отобранных m_1 точек после N_1 испытаний — $m_1 = 12$, $N_1 = 100$ (а) и m_2 точек после N_2 испытаний — $m_2 = 9$, $N_2 = 100$ (б)

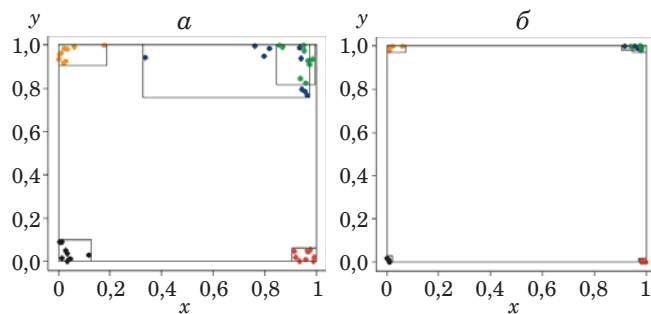


Рис. 3. Расположение отобранных m_1 точек после N_1 испытаний — $m_1 = 9$, $N_1 = 100$ (а) и m_2 точек после N_2 испытаний — $m_2 = 7$, $N_2 = 100$ (б)

Упомянутые трудности легко пояснить на простейших примерах. Задача достаточно полно исследована в одномерном случае, когда D — отрезок, а $f_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{j-1}$, $j = 1, \dots, N$, или другой столь же стандартной функции [4]. Здесь, как правило, D — оптимальный план единственен (без учета перестановок), что облегчает решение задачи. Однако при $s = 2$, $N = 3$, $f_1(x) = 1$; $f_2(x) = x_1$; $f_3(x) = x_2$ и $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ легко убедиться, что существует бесконечно много точек глобального экстремума D -критерия (см. пример 1). При $s > 2$, когда функция регрессии является многочленом второй или более высокой степени для нестандартной области, задачу можно решить только численно.

Приведем несколько простых примеров применения предлагаемого метода оптимизации к решению задачи. Сначала рассмотрим поведение предлагаемой численной процедуры в случае, когда решение задачи можно получить аналитически.

Имеем линейную регрессию $f_1(\mathbf{x}) = 1$; $f_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$; $f_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_2$. На каждом шаге проводили 100 испытаний. При этом использовали только квазислучайные точки [3] (векторы размерности $2N$). Применение метода стохастического градиента или других, близких к нему, безусловно со-

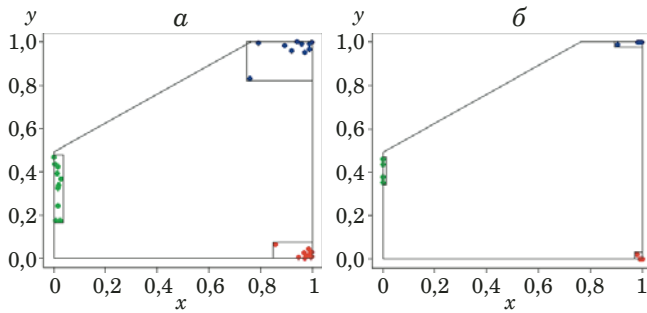


Рис. 4. Расположение отобранных m_1 точек после N_1 испытаний — $m_1 = 10$, $N_1 = 100$ (а) и m_2 точек после N_2 испытаний — $m_2 = 4$, $N_2 = 100$

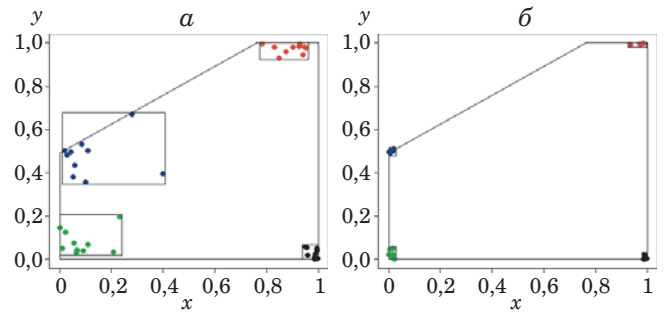


Рис. 6. Расположение отобранных m_1 точек после N_1 испытаний — $m_1 = 10$, $N_1 = 100$ (а) и m_2 точек после N_2 испытаний — $m_2 = 4$, $N_2 = 100$ (б)

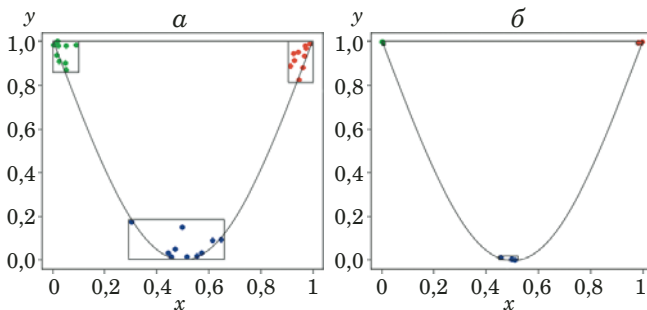


Рис. 5. Расположение отобранных m_1 точек после N_1 испытаний — $m_1 = 10$, $N_1 = 100$ (а) и m_2 точек после N_2 испытаний — $m_2 = 4$, $N_2 = 100$ (б)

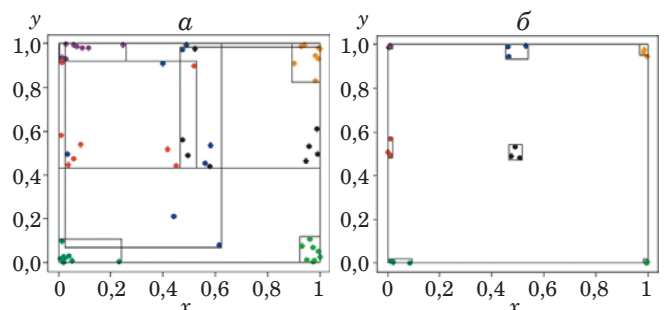


Рис. 7. Расположение отобранных m_1 точек после N_1 испытаний — $m_1 = 8$, $N_1 = 100$ (а) и m_2 точек после N_2 испытаний — $m_2 = 3$, $N_2 = 200$ (б)

кратило бы количество проб, но это предмет дальнейшего исследования.

Пример 1. Область планирования D_1 является единичным квадратом: $D_1 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$. Число точек плана $N = 3$. Известно точное решение: существует бесконечно много D -оптимальных планов. Это $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1)$ и любая точка $\mathbf{x}_3 = (x, y)$ из множества $\{x = 1; 0 \leq y \leq 1\}$. Кроме того, D -оптимальными являются все планы, полученные из описанного поворотом на угол, кратный 90° . На рис. 1 представлено расположение отобранных m точек: а — результат 2-го пункта алгоритма после N_1 испытаний ($m_1 = 11$, $N_1 = 100$); поворот не зафиксировался; значение критерия = 0,81685; точное значение критерия = 1; б — результат 4-го пункта алгоритма после N_2 испытаний ($m_2 = 10$, $N_2 = 100$); поворот зафиксировался; значение критерия = 0,97827; точное значение критерия = 1.

Пример 2. Область планирования — D_1 , число точек плана $N = 4$. Точное решение известно: план сосредоточен в вершинах квадрата. На рис. 2 показано расположение отобранных m точек: а — результат 2-го пункта алгоритма после N_1 испытаний ($m_1 = 12$, $N_1 = 100$), значение критерия = 2,11726; точное значение критерия = 4; б — результат 4-го пункта алгоритма после N_2 ис-

пытаний ($m_2 = 9$, $N_2 = 100$); значение критерия = 3,20574; точное значение критерия = 4.

Пример 3. Область планирования — D_1 , число точек плана $N = 5$. План сосредоточен в вершинах квадрата, при этом в одной из вершин с равной вероятностью находятся две точки. На рис. 3 представлено расположение отобранных m точек: а — результат 2-го пункта алгоритма после N_1 испытаний ($m_1 = 9$, $N_1 = 100$); значение критерия = 5,01804, точное значение критерия = 7; б — результат 4-го пункта алгоритма после N_2 испытаний ($m_2 = 7$, $N_2 = 100$); значение критерия = 6,05873; точное значение критерия = 7.

Пример 4. Область планирования D_2 является усеченным квадратом: $D_2 = D_1/D_3$, где $D_3 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; 2x/3 + 1/2 \leq y \leq 1\}$. Число точек плана $N = 3$. Точное решение известно: является частью множества планов примера 1. На рис. 4 показано расположение отобранных m точек: а — результат 2-го пункта алгоритма после N_1 испытаний ($m_1 = 10$, $N_1 = 100$); значение критерия = 0,90805; точное значение критерия = 1; б — результат 4-го пункта алгоритма после N_2 испытаний ($m_2 = 4$, $N_2 = 100$); значение критерия = 0,98266; точное значение критерия = 1.

Пример 5. Область планирования D_5 является областью, образованной «параболой»: $D_5 = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; 4(x - 1/2)^2 \leq y \leq 1\}$. Число точек

плана $N = 3$. Точное решение известно: является частью множества планов примера 1. На рис. 5 представлено расположение отобранных m точек: a — результат 2-го пункта алгоритма после N_1 испытаний ($m_1 = 10$, $N_1 = 100$); значение критерия = 0,73035; точное значение критерия = 1; b — результат 4-го пункта алгоритма после N_2 испытаний ($m_2 = 4$, $N_2 = 100$); значение критерия = 0,98266; точное значение критерия = 1.

Пример 6. Область планирования — D_2 , $N = 4$. Точное решение известно: $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 1)$, $\mathbf{x}_4 = (0, 1/2)$. На рис. 6 приведено расположение отобранных m точек: a — результат 2-го пункта алгоритма после N_1 испытаний ($m_1 = 10$, $N_1 = 100$); значение критерия = 1,77911, точное значение критерия = 2,5; b — результат 4-го пункта алгоритма после N_2 испытаний ($m_2 = 6$, $N_2 = 100$); значение критерия = 2,36067; точное значение критерия 2,5.

Далее рассмотрим случай, когда решение можно найти только численно. Для сравнения вместо точного значения критерия будем указывать значение, полученное данным методом при достаточно большом количестве вычислений ($N_1 = 10^6$, $N_2 = 10^6$). Рассмотрим квадратичную регрессию

$$f_1(\mathbf{x}) = 1; f_2(\mathbf{x}) = x_1; f_3(\mathbf{x}) = x_2;$$

$$f_4(\mathbf{x}) = x_1^2; f_5(\mathbf{x}) = x_1 x_2; f_6(\mathbf{x}) = x_2^2.$$

Пример 7. Область планирования — D_1 , $N = 7$. Точное решение неизвестно. На рис. 7 представлено расположение отобранных m точек: a — результат 2-го пункта алгоритма после N_1 испытаний ($m_1 = 8$, $N_1 = 200$); значение критерия = 0,00573; значение при больших N_1 , $N_2 = 0,01458$; b — результат 4-го пункта алгоритма после N_2 испытаний ($m_2 = 3$, $N_2 = 200$); значение критерия = 0,01382; значение при больших N_1 , $N_2 = 0,01458$.

При решении численных примеров построены так называемые точные D -оптимальные планы, которые очень трудно получить другими методами. Хотя с ростом числа переменных трудоемкость метода (как и других известных методов)

резко возрастает за счет увеличения порядка определителя, предложенный алгоритм прост, надежен и легко распараллеливается. Известно, что выигрыш от использования оптимальных планов в ряде случаев способен оправдывать любые вычислительные затраты на построение этих планов.

Используя описанную методику, даже с помощью ПК можно построить оптимальные планы для разных областей при умеренных значениях параметров (например, для квадратичной регрессии от s переменных при $s \leq 10$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P. Optimization by Simulated Annealing / Science. 1983. Vol. 220(4598). P. 671 – 680.
2. Ермаков С. М., Куликов Д. В., Леора С. Н. К анализу метода имитации отжига в многоэкстремальном случае / Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 2. С. 220 – 227.
3. Ермаков С. М. О рандомизации квазислучайных последовательностей Холтона / Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 4. С. 570 – 576.
4. Григорьев Ю. Д. Методы оптимального планирования эксперимента: линейные модели: Учебное пособие. — СПб.: Лань. 2015. — 320 с.
5. Федоров В. В. Теория оптимального планирования эксперимента. — М.: Наука, 1971. — 312 с.
6. Kiefer J., Wolfowitz J. The equivalence of two extremum problems / Canad. J. Math. 1960. N 12. P. 363 – 366.
7. Kiefer J. General equivalence theory for optimum designs (approximate theory) / The Annals of Statistics. 1974. Vol. 2. P. 849 – 879.

REFERENCES

1. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P. Optimization by Simulated Annealing / Science. 1983. Vol. 220(4598). P. 671 – 680.
2. Ermakov S. M., Kulikov D. V., Leora S. N. Towards the analysis of the simulated annealing method in the multiextremal case / Vestn. SPbSU. Matem. Mekh. Astron. 2017. Vol. 4(62). Issue 2. P. 220 – 226 [in Russian].
3. Ermakov S. M. On the Halton quasi-random sequences randomization / Vestn. SPbSU. Matem. Mekh. Astron. 2017. Vol. 4(62). Issue 4. P. 570 – 576 [in Russian].
4. Grigoriev Yu. D. Methods of optimal experiment planning: linear models. — St. Petersburg: Lan', 2015. — 320 p. [in Russian].
5. Fedorov V. V. Theory of Optimal Experiments Designs. — Moscow: Nauka, 1971. — 312 p. [in Russian].
6. Kiefer J., Wolfowitz J. The equivalence of two extremum problems / Canad. J. Math. 1960. N 12. P. 363 – 366.
7. Kiefer J. General equivalence theory for optimum designs (approximate theory) / The Annals of Statistics. 1974. Vol. 2. P. 849 – 879.