

DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-2-55-59

## МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ НЕПЛОСКИХ ПЛЕНОК И МЕМБРАН СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

© **Нух Махмудович Якупов, Наиль Курбанович Галимов, Самат Нухович Якупов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Институт механики и машиностроения — обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», г. Казань, Россия; e-mail: yzsrr@kfti.knc.ru

*Статья поступила 14 февраля 2018 г. Поступила после доработки 6 апреля 2018 г. Принята к публикации 14 июня 2018 г.*

Среди тонкостенных элементов конструкций, отличающихся легкостью и высокой прочностью, широко применяются пленочные и мембранные элементы. Активно разрабатываются smart покрытия, имеющие сложную структуру. Из функционального назначения их целесообразно изготавливать неплоской формы — оболочечные пленки, мембраны и покрытия. При этом они могут иметь сложную структуру, заданную конструктором или приобретенную в процессе изготовления и эксплуатации. Исследование механических характеристик оболочечных пленок и мембран, имеющих сложную структуру, стандартным одноосным способом испытания не эффективно. Сложные структуры с макронеоднородностью малоэффективно исследовать методами индентирования, позволяющими судить о свойствах материала в окрестности рассматриваемой точки. В статье предложен экспериментально-теоретический метод определения механических характеристик неплоских пленочных и мембранных композиций сложной структуры. На экспериментальном этапе оценивается жесткость закрепленного по контуру неплоского образца, например, сферической, цилиндрической или тороидальной формы, нагруженного односторонним поверхностным давлением. Далее на базе соотношений, полученных из нелинейной теории оболочек, определяются интегральные механические характеристики материала оболочечно-образца: приведенный модуль упругости (упругое деформирование) или приведенный условный модуль упругости (пластическое деформирование), кривые деформирования и т.д. Рассмотрены соотношения для тонких сферических мембран для случая больших перемещений и деформаций, а также соотношения для тонких цилиндрических мембран переменного радиуса. Методика продемонстрирована на примере исследования резиновой сферической мембраны с отверстиями и бездефектной катеноидальной оболочки.

**Ключевые слова:** оболочечные пленки и мембраны; smart покрытия; сложная структура; экспериментально-теоретический метод; нелинейная теория оболочек; интегральные механические характеристики; сферические мембраны; катеноидальная оболочка.

## METHODOLOGY OF STUDYING NON-PLANAR FILMS AND MEMBRANES OF COMPLEX STRUCTURE

© **Nukh M. Yakupov, Nail K. Galimov, Samat N. Yakupov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Institute of Mechanics and Engineering — Subdivision of the Federal State Budgetary Institution of Science “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”, Kazan, Russia; e-mail: yzsrr@kfti.knc.ru

*Received February 14, 2018. Revised April 6, 2018. Accepted June 14, 2018.*

Among the thin-walled structural elements combining lightness and high strength, film and membrane elements are used most widely. Smart coatings with a complex structure are being actively developed nowadays. Proceeding from their functional duty, it is advisable to produce non-planar forms — shell films, membranes and coatings — which can have a complex structure specified by the designer or acquired in the process of manufacture and operation. Study of the mechanical properties of the shell films and membranes with a complex structure using standard uniaxial method of testing appeared ineffective. Complex structures with macro-heterogeneity should not be studied by indentation methods, capable of determining the material properties in the vicinity of the point in question. We developed an experimental-theoretical method for determination of the mechanical characteristics of non-planar films or membrane compositions of complex structure. At the stage of experiment, the stiffness of a non-planar sample (e.g., spherical, cylindrical or toroidal shape) fixed along the contour and loaded with by a unilateral surface pressure is estimated. Then, using the ratios derived from the nonlinear theory of shells, the integral mechanical characteristics of the shell sample material are determined: the reduced modulus of elasticity (elastic strain) or

reduced conditional modulus of elasticity (plastic strain), deformation curves, etc. The relations for thin spherical membranes for the case of large displacements and deformations, as well as relations for thin cylindrical membranes of variable radius are considered. Results of the case study of rubber spherical membrane with holes and defect-free catenoidal shell are presented to illustrate the developed methodology.

**Keywords:** shell films and membranes; smart coatings; complex structure; experimental-theoretical method; non-linear theory of shells; the integral mechanical properties; spherical membrane; catenoidal shell.

Среди тонкостенных элементов конструкций, отличающихся легкостью с высокой прочностью, особо выделяются пленочные и мембранные элементы, к которым относятся и различные покрытия. Благодаря достаточной надежности и относительно низкой стоимости они находят широкое применение во многих отраслях промышленности [1, 2]. Активно разрабатываются функциональные и интеллектуальные (smart) покрытия.

Для безопасной (безаварийной) работы тонкостенных конструкций необходимо достоверно оценивать их прочность и жесткость, грамотно проектировать и диагностировать элементы конструкции [3, 4].

Стандартный одноосный способ испытаний не эффективен или вовсе не применим для пленок и мембран, имеющих сложную структуру [1, 4]. Для исследования сложных структур с макронеоднородностью малоэффективны инденторные методы [5, 6], позволяющие судить о свойствах материала в окрестности рассматриваемой точки.

В работах [7, 8] описан двумерный экспериментально-теоретический метод исследования механических характеристик плоских пленок и мембран. Он позволяет оценивать интегральные механические свойства (жесткостные свойства, модуль упругости и условный модуль упругости) тонкослойных образцов.

Из функционального назначения пленки и мембраны целесообразно изготавливать неплоской формы. Это так называемые «материал-конструкции», или оболочечные пленки и мембраны, в том числе покрытия. Наряду с неплоской исходной геометрией они могут иметь различную сложную структуру, заданную конструктором или приобретенную в процессе изготовления и

эксплуатации. В связи с этим возникает необходимость развития экспериментально-теоретического метода для определения приведенных механических свойств оболочечных пленок и мембран.

В работе рассмотрен эффективный экспериментально-теоретический метод исследования механических свойств пленок и мембран исходно неплоской формы, основанный на синтезе экспериментальных данных и теоретических соотношений, полученных из нелинейной теории тонких оболочек, теории упругости и пластичности.

На экспериментальном этапе оценивали жесткость закрепленного по контуру неплоского образца, например, сферической, цилиндрической (рис. 1) или тороидальной формы, нагруженного односторонним поверхностным давлением.

В общем случае исследуемый образец может иметь сложную структуру. Проводили мониторинг формы образуемого купола и строили экспериментальные кривые прогиб  $w$  – давление  $p$ .

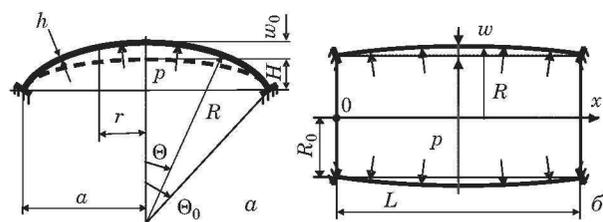
Далее на базе соотношений, полученных из нелинейной теории оболочек, определяли интегральные механические характеристики материала оболочечного образца: приведенный модуль упругости (при упругом деформировании) или приведенный условный модуль упругости (при пластическом деформировании), кривые деформирования, и т.д.

Точность получаемых результатов зависит от точности используемых измерительных приборов и от точности теоретических соотношений.

На экспериментальном этапе использовали цифровые индикаторы ИЦ-50 с точностью 0,001 мм (ГОСТ 577–68) и цифровые манометры ДМ-5001 с погрешностью  $\pm 1\%$  (ТУ 4212-039-00225590–2003). Используя аппарат статистической обработки, проводили фильтрацию экспериментальных данных, обеспечивая доверительный интервал с надежностью 95 %.

На теоретическом этапе на базе соотношений, полученных из нелинейной теории оболочек, определяли механические характеристики оболочечного образца.

*Тонкие сферические мембраны.* Рассмотрим сферическую мембрану радиусом  $R$  с исходной толщиной  $h_0$ , радиусом опорного круга  $a$  (см.



**Рис. 1.** Геометрия образцов сферической (а) и цилиндрической (б) мембраны



Рис. 2. Мембрана из группы «с» в процессе испытания

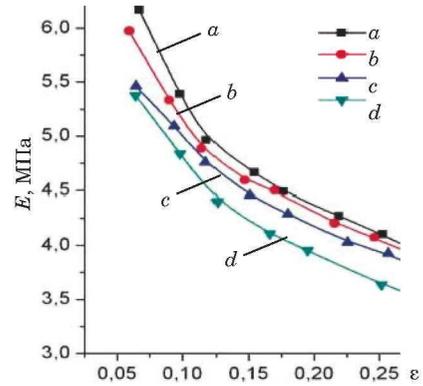


Рис. 3. Зависимости модуля упругости  $E$  от деформации  $\epsilon_0$  для четырех групп мембран

рис. 1, а). Мембрана крепится по контуру и нагружается внутренним давлением  $p$ . Используем следующие обозначения:  $H$  — высота подъема сегмента оболочки до подачи давления;  $w_0$  — прогиб центра оболочки;  $r$  — радиальная координата.

Расчетные соотношения для тонких сферических мембран для случая больших перемещений и деформаций [9] получим из системы разрешающих уравнений

$$\int_0^a \{(T_1 + T_2)[a^4 - a^2r^2 + (c + w_0/R) \times (a^4 - 4a^2r^2 + 3r^4)] - 2T_1a^2r^2\}rdr = 0,$$

$$\int_0^a (T_1K_1^* + T_2K_2^*)(a^2 - r^2)rdr = p \int_0^a (a^2 - r^2)rdr, \quad (1)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — радиальные и кольцевые усилия;  $K_1^*$  и  $K_2^*$  — кривизна деформированного купола в радиальном и окружном направлениях;  $0 \leq r \leq a$ .

Постоянная  $c$  определяется при заданной величине  $w_0$ . Поскольку в выражения усилий  $T_1$  и  $T_2$  входит модуль упругости  $E$  или условный модуль упругости  $E_{усл} = d\sigma_i/de_i$ , из уравнений (1) при заданной величине нагрузки  $p$  можно определить  $E$  или  $E_{усл}$ , а далее — вычислить усилия  $T_1$  и  $T_2$ .

Исследовали сферическую мембрану из резины с отверстиями со следующими параметрами (рис. 3):  $H = 10,2$  мм;  $a = 36$  мм;  $h_0 = 0,591$  мм;  $\nu = 0,5$ . Рассмотрены четыре группы мембран:  $a$  — без отверстий;  $b$  — с одним центральным отверстием;  $c$  — с семью отверстиями — одним центральным и шестью по кругу диаметром 20 мм;  $d$  — с тринадцатью отверстиями — одним центральным, шестью по кругу диаметром 20 мм и шестью по кругу диаметром 40 мм. Диаметр отверстий  $d_{отв} = 1$  мм.

При испытаниях всех образцов использовали подкладку из мягкого полимерного материала толщиной 0,008 мм (жесткость на растяжение подкладки более чем на два порядка меньше соответствующей жесткости мембраны). На рис. 3 приведена зависимость модуль упругости  $E$  (МПа) — деформация  $\epsilon_0$  ( $\epsilon_0$  — деформация в вершине купола). Видно, что для образца с тринадцатью отверстиями наблюдается большее падение модуля упругости с увеличением деформации по сравнению с образцом без отверстия. Максимальная величина модуля упругости находится в интервале от 5,42 до 6 МПа в зависимости от количества отверстий. Для бездефектной резины модуль упругости [10] изменяется от 3 до 12 МПа в зависимости от типа резины, т.е. полученные результаты согласуются с известными данными.

*Тонкие цилиндрические мембраны переменного радиуса.* Рассмотрим цилиндрическую оболочку переменного радиуса  $R$ , длиной  $L$  и толщиной  $h$  (см. рис. 1, б), которая закреплена по торцам и нагружена внутренним давлением  $p$ . Прогибы предполагаются малыми.

Соотношения для тонких цилиндрических мембран переменного радиуса получены из общих уравнений равновесия оболочек:

$$\frac{d(A_2T_1)}{dx} - T_2 \frac{dA_2}{dx} + A_1A_2K_1N = 0,$$

$$\frac{d(A_2N)}{dx} - A_1A_2(K_1T_1 + K_2T_2 - p) = 0,$$

$$N = \frac{1}{A_1A_2} \left[ \frac{d(A_2M_1)}{dx} - M_2 \frac{dA_2}{dx} \right], \quad (2)$$

где  $T_1, K_1, A_1$  и  $T_2, K_2, A_2$  — усилие, кривизна и параметр Ламе в продольном и в окружном направлениях;  $N$  — перерезывающая сила в продольном направлении;  $x$  — продольная координата ( $0 \leq x \leq L$ ).

Значения параметров исследованных образцов

Номер образца	Геометрические параметры, мм					$p$ , МПа	$w(L/2)/(D_1/2)$	$E_{кат}$ , МПа
	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$L$	$h$			
1	95	70	71,9	75	0,20	0,20	0,020	1340
2	90	72	74,0	90	0,20	0,20	0,022	1260
3	90	75	76,9	105	0,20	0,20	0,021	1320

Усилия и моменты выражаются линейно через компоненты деформаций, а деформации — линейно через перемещения:

$$T_1 = B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1),$$

$$M_1 = -D(\chi_1 + \nu\chi_2), \quad M_2 = -D(\chi_2 + \nu\chi_1),$$

$$B = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{du}{dx} + K_1 w,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u}{A_1 A_2} \frac{dA_2}{dx} + K_2 w, \quad \omega = \frac{1}{A_1} \frac{dw}{dx} - K_1 u,$$

$$\chi_1 = \frac{-1}{A_1} \frac{d\omega}{dx}, \quad \chi_2 = -\frac{\omega}{A_1 A_2} \frac{dA_2}{dx}. \quad (3)$$

Для рассматриваемой оболочки средней длины выводят уравнения типа Мейсснера относительно перерезывающей силы  $N$  и поворота  $\omega$ . Корни этой системы уравнений являются большими величинами, что позволяет пренебречь малыми величинами в данной системе.

Для вычисления прогиба образующей цилиндрической оболочки переменного радиуса, закрытой торцевыми днищами и нагруженной внутренним давлением, при  $x = 0,5L$  получена приближенная формула

$$w|_{x=0,5L} = \frac{pR_0^2}{Eh} \left\{ \left(1 - \frac{a}{R_0}\right)^2 + \frac{4aR_0}{L^2} \left[ \left(1 - \frac{a}{R_0}\right)^3 + \cos \frac{4a}{L} \right] - \nu \frac{(1-a/R_0)^3 + \cos(4a/L)}{2(1-a/R_0)} \right\}, \quad (4)$$

где  $p$  — давление;  $E$  и  $\nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала мембраны;  $h$  — толщина;  $a = R_0 - R|_{x=0,5L}$ ,  $R_0 = R|_{x=0,5L}$ .

Приняв в (4)  $a = 0$ , получим прогиб в середине пролета для тонкой цилиндрической оболочки (при  $h/R \leq 0,01$ ), находящейся под действием внутреннего давления:

$$w = \frac{pR_0^2(1-0,5\nu)}{Eh}. \quad (5)$$

Из соотношения (4) или (5), зная из эксперимента значения  $p$  и  $w$ , можно определить модуль упругости  $E$  (при известном значении  $\nu$ ). Так, ис-

ходя из (5), для тонкой цилиндрической оболочки модуль упругости

$$E = \frac{pR_0^2(1-0,5\nu)}{wh} \quad (6)$$

(для полимера можно принять коэффициент поперечного сжатия  $\nu = 0,4$ ).

Исследования проводили на катеноидальной оболочке. Параметры образцов приведены в таблице, где:  $D_1$  — диаметр основания оболочки;  $D_2$  — диаметр ее шейки;  $D_3$  — диаметр шейки под давлением;  $L$  — длина. Здесь же представлены результаты расчета модулей упругости рассмотренных образцов ( $E_{кат}$ ), полученные исходя из (4); среднее значение модуля упругости материала оболочек:  $E = 1307$  МПа.

Таким образом, разработан экспериментально-теоретический метод определения интегральной жесткости на растяжение неплоских пленочных или мембранных композиций сложной структуры. Метод — эффективный инструмент для анализа жесткостных характеристик тонкостенных образцов сложной структуры, применимый практически для всех типов материалов. При исследовании системы «пленка – подложка» метод пригоден только для случая немассивной подложки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Якупов Н. М., Якупов С. Н. Пленки неоднородной структуры / Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2009. № 1. С. 60 – 70.
2. Якупов С. Н., Якупов Н. М. Тонкослойные покрытия / Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 1. С. 6 – 14.
3. Махутов Н. А. Прочность и безопасность. Фундаментальные и прикладные исследования. — Новосибирск: Наука, 2008. — 523 с.
4. Якупов Н. М. Механика «лечения» тонкостенных конструкций / XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань, 20 – 24 августа 2015. С. 4320 – 4322.
5. Oliver W., Pharr G. / J. Mater. Res. Soc. Symp. Proc. 1997. Vol. 57. P. 473.
6. Шугуров А. Р., Панин А. В., Оскомов К. В. Особенности определения механических характеристик тонких пленок методом нанопрофилирования / Физика твердого тела. 2008. Т. 50. № 6. С. 1007 – 1012.
7. Якупов Н. М., Нургалиев А. Р., Якупов С. Н. Методика испытания пленок и мембран в условиях равномерного распределенного поверхностного давления / Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 2008. Т. 74. № 11. С. 54 – 56.

8. **Якупов Н. М., Галимов Н. К., Леонтьев А. А.** Экспериментально-теоретический метод исследования прочности полимерных пленок / Механика композиционных материалов и конструкций. 2000. Т. 6. № 2. С. 238 – 243.
9. **Галимов Н. К., Якупов Н. М., Якупов С. Н.** Экспериментально-теоретический метод определения механических характеристик сферических пленок и мембран со сложной структурой / Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 3. С. 58 – 66.
10. Энциклопедия полимеров. Т. 3. — М.: Изд-во «Советская энциклопедия», 1972. С. 310 – 333.

## REFERENCES

1. **Yakupov N. M., Yakupov S. N.** Films of heterogeneous structure / Stroit. Mekh. Inzh. Konstr. Sooruzh. 2009. N 1. P. 60 – 70 [in Russian].
2. **Yakupov S. N., Yakupov N. M.** Thin Coatings / Stroit. Mekh. Inzh. Konstr. Sooruzh. 2017. N 1. P. 6 – 14 [in Russian].
3. **Makhutov N. A.** Strength and safety. Fundamental and applied research. — Novosibirsk: Nauka, 2008. — 523 p. [in Russian].
4. **Yakupov N. M.** Mechanics of “treatment” of thin-walled structures / XI All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. 2015. Kazan. P. 4320 – 4322 [in Russian].
5. **Oliver W., Pharr G.** / J. Mater. Res. Soc. Symp. Proc. 1997. Vol. 57. P. 473.
6. **Shugurov A. R., Panin A. V., Oskomov K. V.** Features of the determination of the mechanical characteristics of thin films by the method of nanoindentation / Fiz. Tverd. Tela. 2008. N 6. P. 1007 – 1012 [in Russian].
7. **Yakupov N. M., Nurgaliev A. R., Yakupov S. N.** Method for testing films and membranes under conditions of uniform distributed surface pressure / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2008. N 11. P. 54 – 56 [in Russian].
8. **Yakupov N. M., Galimov N. K., Leontiev A. A.** Experimental-theoretical method for studying the strength of polymer films / Mekh. Kompozits. Mater. Konstr. 2000. Vol. 6. N 2. P. 238 – 243 [in Russian].
9. **Galimov N. K., Yakupov N. M., Yakupov S. N.** Experimental-theoretical method for determining the mechanical characteristics of spherical films and membranes with a complex structure / Izv. RAN. Mekh. Tv. Tela. 2011. N 3. P. 58 – 66 [in Russian].
10. Encyclopedia of polymers. Vol. 3. — Moscow: Sovetskaya éntsiklopediya, 1972. P. 310 – 333 [in Russian].