

Математические методы исследования

Mathematical methods of investigation

DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2019-85-3-64-74>

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

© **Никита Васильевич Скибицкий**

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия; e-mail: SkibitskyNV@mpei.ru

*Статья поступила 20 ноября 2018 г. Поступила после доработки 27 ноября 2018 г.
Принята к публикации 6 декабря 2018 г.*

Показано, что коридор ошибок модели, полученной в предположении, что неточность исходных данных задана в интервальной форме, в отличие от статистического подхода, можно представить не двумя, а четырьмя, например, линейными сплайн-функциями, где первая пара функций описывает коридор ошибок внутри диапазона изменения входной переменной в эксперименте, а вторая пара — коридор вне этого диапазона. Решена задача анализа и разработки методов аппроксимации статических характеристик, представляемых в виде линейных сплайнов, гладкими функциями второго порядка. Показано, что для аппроксимации линейных сплайнов, задающих коридор ошибок, могут быть успешно применены полиномы второго порядка и неявные функции в виде конических сечений. Спланирован вычислительный эксперимент, в рамках которого сформулированы критерии, определяющие точность решения задачи аппроксимации, и определены области размещения экспериментальных точек на границах интервального коридора, на основании которых рассчитываются коэффициенты аппроксимирующих функций. Разработанный эксперимент минимизирует число расчетных точек при условии обеспечения заданной точности решения задачи аппроксимации. Показано, что при решении задачи аппроксимации границ интервального коридора квадратичной функцией достаточно провести все расчеты только для одной из границ с последующим простейшим расчетом параметров другой границы, что практически вдвое сокращает объем вычислений, а для аппроксимации линейных сплайнов, задающих коридор неопределенности, достаточно 30 экспериментальных точек. Сравнение результатов показало небольшое отличие в значениях критериев для случая аппроксимации полиномами и неявной функцией при незначительном преимуществе аппроксимации полиномиальной функцией.

Ключевые слова: модель; неопределенность; интервальный анализ; прямая и обратная статическая характеристика; аппроксимация; вычислительный эксперимент.

SOLVING THE PROBLEM OF ANALYTICAL DESCRIPTION OF STATIC CHARACTERISTICS IN CONDITIONS OF INTERVAL UNCERTAINTY

© **Nikita V. Skibitskiy**

National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow, Russia; e-mail: SkibitskyNV@mpei.ru

Received November 20, 2018. Revised November 27, 2018. Accepted December 6, 2018.

It is shown that the description of the error corridor of the model, obtained under the assumption that the inaccuracy of the source data is specified in the interval form, in contrast to the statistical approach, is given by four functions instead of two and can be represented by linear spline functions, where the first pair of functions describes the error corridor inside the range of change of the input variable in the experiment, and the second pair — outside this range. The problem of analyzing and developing of the methods for approximation of the static characteristics represented as linear splines by smooth functions of the second order is solved. It is also shown that second-order polynomials and implicit functions in the form of conic sections can be successfully used for approximation of linear splines which define the error corridor. A computational experiment was designed within which the criteria determining the accuracy of the solution of the approximation problem were formulated and the areas for placing experimental points on the

boundaries of the interval corridor (on the basis of which the coefficients of the approximating functions were calculated) were determined. The developed experiment minimizes the number of calculation points when the specified accuracy of the solution of the approximation problem is ensured. It is shown that when a quadratic function is used for approximation of the boundaries of the interval corridor, the calculations can be carried out for only one of the boundaries with subsequent simplest calculation of the parameters of the other boundary which almost halves the computations. Approximation of the linear splines that define the uncertainty corridor requires the use of no more than 30 experimental points. Comparison of the results showed a slight difference in the criterion values when polynomial or implicit function are used for approximation with a slight advantage of the approximation by a polynomial function.

Keywords: model; uncertainty; interval analysis; direct and inverse static characteristic; approximation; computational experiment.

Модели, позволяющие получить аналитическое описание процесса путем обработки неточных экспериментальных данных, применяются для решения широкого класса прикладных задач. При этом на практике часто используется линейная по параметрам статическая характеристика объекта [1 – 3], позволяющая решать так называемые прямые задачи, связанные с оценкой выходного значения y при заданном входном значении x . Применительно к системе с одним входом и одним выходом она может быть представлена в виде

$$y = f(x) = b_1\varphi_1(x) + \dots + b_m\varphi_m(x), \quad (1)$$

где $\varphi_i(x)$ — известные базисные функции; b_i — подлежащие определению параметры.

Вместе с тем при исследовании следящих систем, например в метрологии, кроме прямой задачи необходимо решать и обратную, т.е. находить оценку x при заданном значении y [4, 5]:

$$x(y) = f^{-1}(b_1, \dots, b_m, x) = \psi(a_1, \dots, a_m, y), \quad (2)$$

где a_j — неизвестные параметры, выражаемые через параметры b_i .

Для описания неточно известных данных обычно применяются три модели: вероятностная, нечеткая и интервальная. Сравнительный анализ указанных моделей, ограничения на их применение и области их предпочтительного использования приведены, в частности, в [6]. Там же показано, что достаточно широкое применение при решении подобных задач получила интервальная модель [7 – 9], предполагающая задание интервала неопределенности на значения неточно известных данных. Для определения указанного интервала может быть использован широкий спектр априорной информации: результаты экспериментов, сведения об абсолютных и относительных ошибках, ошибках округления, экспертные данные и т.п. Использование этой информации позволяет с помощью различных форм модели (1) представить экспериментальные данные в виде двух интервальных векторов $[x] = ([x_1] \dots [x_i] \dots [x_N])$ и $[y] = ([y_1] \dots [y_i] \dots [y_N])$. При

этом каждому интервальному наблюдению $[x_i]$ или $[y_i]$ соответствует не точка, а интервал, определяющий множество всех возможных значений переменной в данном опыте. Если ошибка имеет место при определении как x , так и y , то наблюдения на графике зависимости $y(x)$ будут представлены прямоугольниками.

В этой связи в [6] рассмотрен подход к построению прямых и обратных статических характеристик систем по экспериментальным данным, основанный на предположении, что ошибки эксперимента ограничены по величине, и предложена процедура обработки представленных в интервальной форме данных, позволяющая определить гарантированный интервал неопределенности статической характеристики.

Для иллюстрации предлагаемого метода решения рассматриваемой задачи используем наиболее часто применяемую линейную функцию вида

$$[y] = [b_1] + [b_2]x, \quad (3)$$

где $[b_1]$, $[b_2]$ — интервально заданные коэффициенты.

Построение прямой статической характеристики по интервальным данным

В [11] показано, что через интервальные наблюдения можно провести много функций заданного вида, имеющих одну и ту же структуру, но определяемых своим вектором параметров $\mathbf{b}$, который можно отобразить точкой в пространстве соответствующей размерности. Тогда множеству всех адекватных моделей соответствует область B всех возможных векторов $\mathbf{b}$, определяемая в результате решения системы линейных интервальных уравнений:

$$B = \{\mathbf{b}: \mathbf{F}\mathbf{b} = \mathbf{y}, \mathbf{F} \in [\mathbf{F}], \mathbf{y} \in [\mathbf{y}]\},$$

где $\mathbf{b}$ — вектор искомых коэффициентов; $[\mathbf{F}]$ — матрица интервальных значений базисных

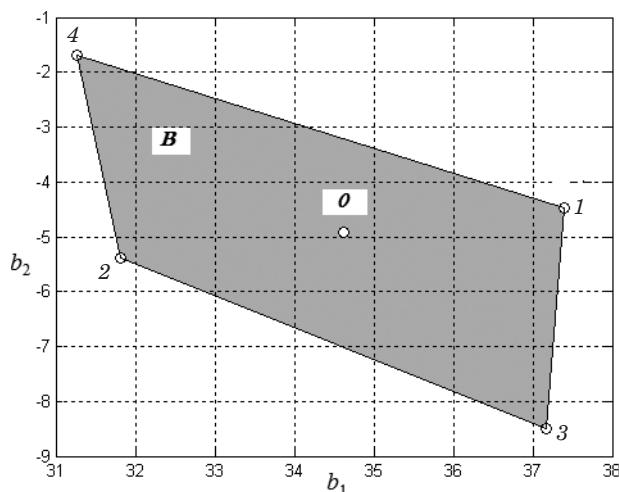


Рис. 1. Область изменения коэффициентов прямой интервальной модели

функций; $[y]$ — вектор интервальных наблюдений выходной переменной.

Область B представляет собой выпуклый многогранник в пространстве параметров [11], что позволяет при ее описании ограничиться вычислением лишь конечного числа $\mathbf{b}^{(j)}$ его вершин, каждой из которых соответствует статическая характеристика, проходящая по границам интервальных наблюдений. В случае двух параметров эта область является выпуклым четырехугольником, а значит, для ее построения достаточно определить лишь координаты четырех ее вершин — $\mathbf{b}^{(1)}$, $\mathbf{b}^{(2)}$, $\mathbf{b}^{(3)}$, $\mathbf{b}^{(4)}$. При этом вершина $\mathbf{b}^{(1)}$ рассчитывается для эксперимента, в котором переменные установлены на своих верхних границах x_{imax} , y_{imax} , а вершина $\mathbf{b}^{(2)}$ — по данным нижних границ x_{imin} , y_{imin} . Вершины $\mathbf{b}^{(3)}$, $\mathbf{b}^{(4)}$ определяются по двум наиболее разнесенным в области переменной y экспериментальным точкам. Средней точке четырехугольника $\mathbf{b}^{(0)}$ соответствует характеристика, рассчитанная с использованием центров интервальных наблюдений. Пример области B приведен на рис. 1.

Для расчета интервала неопределенности сглаживаемой кривой используются правила построения интервальной функции в соответствии с базовым принципом интервального анализа — интервал неопределенности результата есть множество всех его возможных значений, получаемых при варьировании переменных и параметров задачи в границах известных интервалов. Тогда если переменные или/и коэффициенты для функции $y = f(\mathbf{b}, \mathbf{x})$ заданы в интервальном виде, то ее значение при фиксированном аргументе также будет интервалом. Границы интервального значения функции определяются как ее предельные значения при изменении коэффици-

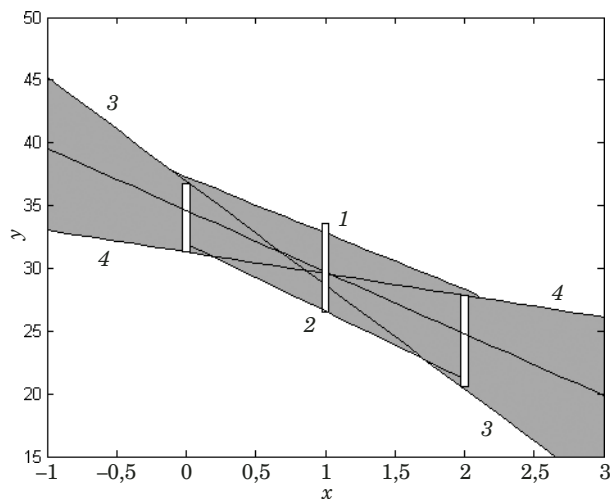


Рис. 2. Коридор неопределенности прямой интервальной модели

ентов b_j и переменных x_i внутри заданных интервалов, т.е.

$$[y] = [y^-; y^+] = [y = f(\mathbf{b}, \mathbf{x}), \mathbf{x} \in [\mathbf{x}], \mathbf{b} \in B].$$

На рис. 2 приведены интервалы неопределенности моделей, полученные с использованием множества B возможных значений коэффициентов, представленных на рис. 1. Прямоугольниками показаны интервальные наблюдения в осях $Ox - Oy$. Для установления соответствия между вершинами области B и функциями на рис. 2 проставлены цифры. В частности, граница 1 на рис. 2 определяется вектором $\mathbf{b}^{(1)}$, рассчитанным по верхним правым углам трех интервальных наблюдений.

Таким образом, в случае однофакторной линейной модели в интервальном методе, в отличие от статистического подхода, границы коридора ошибок модели описываются не двумя гладкими функциями, а кусочно-линейными сплайнами, образованными четырьмя экстремальными прямыми — $y(\mathbf{b}^{(1)}, x)$, $y(\mathbf{b}^{(2)}, x)$, $y(\mathbf{b}^{(3)}, x)$, $y(\mathbf{b}^{(4)}, x)$, коэффициенты которых совпадают с координатами вершин области B [11]. При этом первая пара функций описывает коридор ошибок модели внутри диапазона изменения переменной x в эксперименте, а вторая — коридор вне этого диапазона. В диапазоне $0 \leq x \leq 2$ центральная прямая построена как полусумма границ коридора ошибок.

Очевидно, что координаты стыков функций на верхней и нижней границах в общем случае не совпадают, т.е. существуют участки, где возможны смешанные комбинации функций из разных пар. Это затрудняет описание границы единственной аналитической функцией, которая была бы гораздо удобнее и привычнее, являясь в

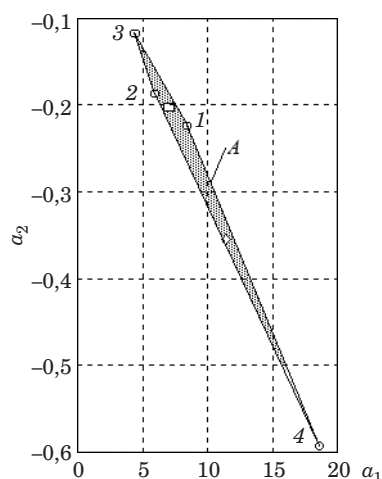


Рис. 3. Область коэффициентов обратной интервальной модели

определенной степени аналогом доверительного интервала при описании неточно известных данных вероятностной моделью.

Построение обратных характеристик объекта

Данная задача в технических приложениях обычно решается для однофакторных, монотонных функций, обеспечивающих однозначность преобразования. В этом случае, как правило, сначала по экспериментальным данным находят оценки $\hat{b}_j$ коэффициентов прямой модели (1), а затем рассчитывают оценки $\hat{a}_j$ параметров обратной функции (2), что позволяет записать искомую обратную статическую характеристику в виде

$$\hat{x}(y) = f^{-1}(\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_m, x) = \psi(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_m, y). \quad (4)$$

Для иллюстрации рассмотрим линейную функцию. Опытам в эксперименте соответствуют прямоугольные области неопределенности. Прямая интервальная модель в области эксперимента имеет вид (3), а границы коридора ошибок определяются кусочно-линейными функциями.

Учитывая взаимно однозначное соответствие между переменными, на основе модели (3) легко получить обратную интервальную модель

$$[x] = -[b_1]/[b_2] + (-1/[b_2]y) = a_1 + a_2y. \quad (5)$$

Пример области коэффициентов A обратной интервальной модели, соответствующей области коэффициентов прямой функции B , приведен на рис. 3. Координаты четырех вершин $\mathbf{a}^{(j)}$ найдены по формуле (5) преобразованием соответствующих вершин области B .

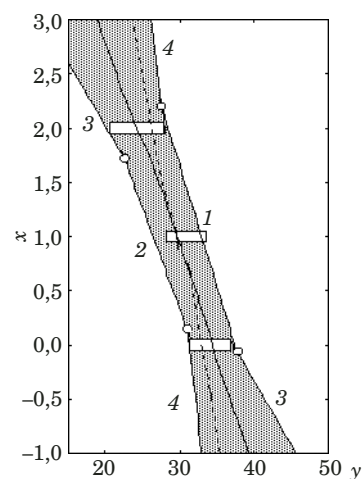


Рис. 4. Коридор ошибок обратной интервальной модели

Тогда множеству всех прямых моделей, определяемых выпуклой областью B , имеющей в случае двух параметров вид выпуклого четырехугольника с вершинами $\hat{\mathbf{b}}^{(1)}, \hat{\mathbf{b}}^{(2)}, \hat{\mathbf{b}}^{(3)}, \hat{\mathbf{b}}^{(4)}$, соответствует выпуклая область A , имеющая вид четырехугольника с вершинами $\hat{\mathbf{a}}^{(1)}, \hat{\mathbf{a}}^{(2)}, \hat{\mathbf{a}}^{(3)}, \hat{\mathbf{a}}^{(4)}$, определяющая множество обратных моделей $x(\hat{\mathbf{a}}^{(1)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(2)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(3)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(4)}, y)$ и задающая коридор возможных ошибок обратной функции, т.е. ее интервал неопределенности

$$[x(y)] = [x_{\min}(y); x_{\max}(y)]. \quad (6)$$

Границы интервала неопределенности обратной функции определяются выражением

$$x_{\min}(y) = \min_y \{x(\hat{\mathbf{a}}^{(1)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(2)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(3)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(4)}, y)\},$$

$$x_{\max}(y) = \max_y \{x(\hat{\mathbf{a}}^{(1)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(2)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(3)}, y), x(\hat{\mathbf{a}}^{(4)}, y)\}.$$

На рис. 4 показан интервал неопределенности обратной модели, полученный с использованием множества возможных коэффициентов, представленных на рис. 3. Каждый вектор коэффициентов получен с помощью МНК, а прямые проведены через экстремальные точки. Граница 1 определяется вектором $\mathbf{a}^{(1)}$, граница 2 — вектором $\mathbf{a}^{(2)}$ и т.д.

Аппроксимация интервальных сплайн-моделей гладкими функциями

Выше было показано, что линейные однофакторные модели при интервальном методе построения могут быть описаны линейными сплайн-функциями. Подобное описание границ интервальной модели часто оказывается неудобным. Поэтому встает вопрос возможности аппроксимации указанных линейных кусочно-постоянных функций гладкой функцией.

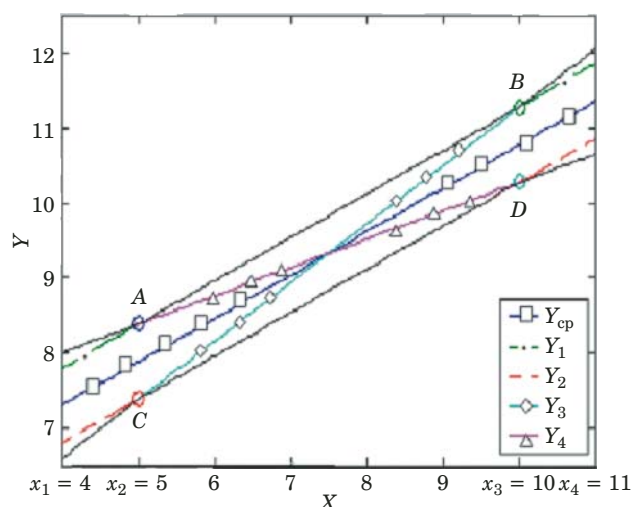


Рис. 5. Пример интервального коридора прямой зависимости

Визуальный анализ показывает, что в качестве аппроксимирующих могут быть использованы полиномиальные либо неявные функции.

Пример интервального коридора прямой зависимости приведен на рис. 5, где $[x_1, x_4]$ — область определения интервальной сплайн-модели; $[x_2, x_3]$ — экспериментальная область при построении интервальной сплайн-модели; $[x_1, x_2]$ и $[x_3, x_4]$ — области прогноза по интервальной сплайн-модели;

$$y_{\max}(x) = \{Y_4(x), x \in [x_1, x_2]; Y_1(x), x \in [x_2, x_3];$$

$$Y_3(x), x \in [x_3, x_4]\} \text{ — верхняя граница;}$$

$$y_{\min}(x) = \{Y_3(x), x \in [x_1, x_2]; Y_2(x), x \in [x_2, x_3];$$

$$Y_4(x), x \in [x_3, x_4]\} \text{ — нижняя граница.}$$

Идея аппроксимации состоит в том, чтобы с использованием заданных сплайн-функций границ сгенерировать на каждой границе конечное число точек, которые в дальнейшем можно будет использовать для построения гладкой кривой подходящего вида с помощью метода наименьших квадратов. Вариант такого набора точек приведен на рис. 6, где отмечены точки, которые могут быть использованы для решения задачи аппроксимации. Форма коридора, включая его ширину, наклон и соотношение между его средней частью, соответствующей области эксперимента при построении интервальной сплайн-модели, и «хвостами», соответствующими областям прогноза по интервальной сплайн-модели, может сильно различаться в зависимости от исходных данных. В связи с этим встает задача выбора как числа аппроксимирующих точек, так и их распределения между средней частью и «хвостами» коридора. Очевидно, что для повышения точ-

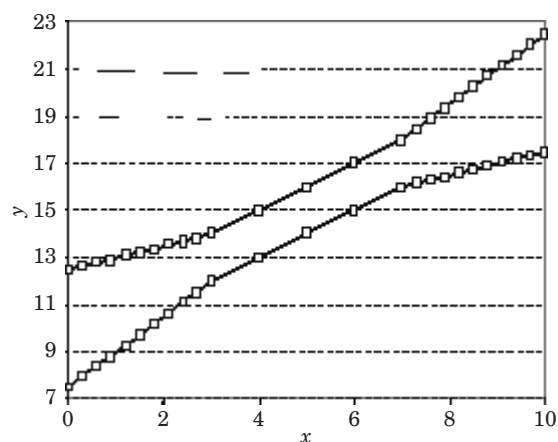


Рис. 6. Схема расположения исходных точек для построения аппроксимирующей функции

ности аппроксимации при коротких хвостах следует увеличивать число аппроксимирующих точек на этих участках. При решении задачи необходимо задаться требуемой точностью аппроксимации и обеспечить ее достижение путем синтеза плана по выбору количества точек и их расположения.

В связи с тем, что получение аналитической зависимости для синтеза оптимального плана встречает серьезные трудности, для решения поставленной задачи был разработан алгоритм управляемого вычислительного эксперимента и проведено численное моделирование. Решение задачи включает следующие этапы.

1. В ходе управляемого вычислительного эксперимента генерируется набор точек $\{x_i, y_i\}$ на границах интервального коридора, необходимый для расчета коэффициентов аппроксимирующей функции.

2. С помощью МНК определяются коэффициенты аппроксимирующей функции. Максимальная относительная ошибка аппроксимации сравнивается с допустимым значением ε .

3. Если $\delta_{\text{appr}} \leq \varepsilon$, задача считается решенной. Если же $\delta_{\text{appr}} > \varepsilon$, в план вычислительного эксперимента добавляется точка, в которой имела место наибольшая ошибка. Итеративный процесс продолжается, пока не будет достигнута требуемая точность. Если достижение требуемой точности при выбранной функции невозможно, ее заменяют на более сложную.

Для решения задачи приняты следующие обозначения.

1. Коэффициент k задает соотношение между величинами области $[x_2, x_3]$ и областей $[x_1, x_2]$ и $[x_3, x_4]$ при постоянном значении $[x_1, x_4]$.

2. Общее число точек N , используемых для получения аппроксимирующей функции на каж-

дой из границ интервального коридора, разбито на две составляющих:

Nm ($m \in [0, 0,5]$) точек, задаваемых вблизи каждой области перегиба интервального коридора, т.е. в итоге $2 \times N \times m$ точек как для $y_{\max}$, так и для $y_{\min}$;

$N(1 - 2m)$ точек равномерно распределенных на $[x_1, x_4]$ с шагом $(x_4 - x_1)/(n - 1)$.

3. Коэффициент z определяет угол наклона интервальной сплайн-модели на участке $[x_2, x_3]$.

4. Параметр d определяет ширину интервала $(y_{\max} - y_{\min})$ на участке $[x_2, x_3]$.

5. $y_{\min}^{\text{ап}}$ и $y_{\max}^{\text{ап}}$ — аппроксимирующие функции соответственно для нижней и верхней границ интервального коридора.

В качестве критериев точности аппроксимации использовали следующие:

$$\begin{aligned}\Delta_{\max}^{\text{сред}} &= \frac{1}{N} \sum_N (y_{\max}^{\text{ап}} - y_{\max})^2, \\ \Delta_{\min}^{\text{сред}} &= \frac{1}{N} \sum_N (y_{\min}^{\text{ап}} - y_{\min})^2, \\ \Delta_{\max}^{\text{абс}} &= \max |y_{\max}^{\text{ап}} - y_{\max}|, \\ \Delta_{\min}^{\text{абс}} &= \max |y_{\min}^{\text{ап}} - y_{\min}|, \\ \Delta_{\max}^{\text{отн}} &= \max |y_{\max}^{\text{ап}} - y_{\max}| / Y, \\ \Delta_{\min}^{\text{отн}} &= \max |y_{\min}^{\text{ап}} - y_{\min}| / Y.\end{aligned}\quad (7)$$

Первый критерий определяет средний квадрат отклонения аппроксимирующей функции от соответствующих значений сплайн-функции, задающей границу интервального коридора. Второй и третий критерии определяют максимальные абсолютное и относительное отклонения аппроксимирующей функции от сплайн-функции, задающей границу интервального коридора.

В тестовом примере примем следующие значения переменных:

$[x_1, x_4] = [4, 11]$; $k \in [0, 1; 1]$ — определяет соотношение между экспериментальной областью и областями прогноза от $[x_2, x_3] = [7, 25; 7, 75]$ и $[x_1, x_2] = [4; 7, 25]$, $[x_3, x_4] = [7, 75; 11]$ до $[x_2, x_3] = [5, 10]$ и $[x_1, x_2] = [4, 5]$, $[x_3, x_4] = [10, 11]$; $z \in [25^\circ, 65^\circ]$; $d \in [0, 5; 5]$.

Аппроксимация полиномами второго порядка

Аппроксимирующие полиномы для верхней $y_{\max}^{\text{пол}}(x)$ и нижней $y_{\min}^{\text{пол}}(x)$ границ соответственно имеют следующий вид:

$$y_{\max}^{\text{пол}}(x) = \beta_{0\max} + \beta_{1\max}x + \beta_{2\max}x^2,$$

$$y_{\min}^{\text{пол}}(x) = \beta_{0\min} + \beta_{1\min}x + \beta_{2\min}x^2.$$

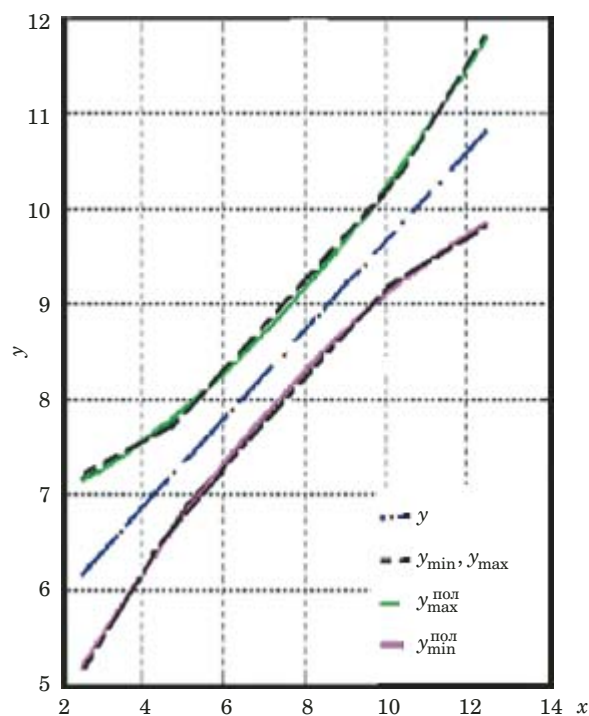


Рис. 7. Аппроксимация интервальной модели полиномами второго порядка

Для определения параметров верхней $\mathbf{B}_{\max} = (\beta_{0\max}, \beta_{1\max}, \beta_{2\max})$ и нижней $\mathbf{B}_{\min} = (\beta_{0\min}, \beta_{1\min}, \beta_{2\min})$ границ воспользуемся основной формулой МНК:

$$\mathbf{B}_{\max} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{y}_{\max}, \quad \mathbf{B}_{\min} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{y}_{\min}, \quad (8)$$

где матрица базисных функций

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{bmatrix}.$$

Вычислив векторы параметров $\mathbf{B}_{\max}$ и $\mathbf{B}_{\min}$, можно определить параметры аппроксимирующих функций и рассчитать значения аппроксимирующих функций $y_{\max}^{\text{пол}}(x)$ — для верхней и $y_{\min}^{\text{пол}}(x)$ — для нижней границ.

Результат для случая $z = 45^\circ$, $k = 0,2$, $d = 1$ приведен на рис. 7.

Для различных комбинаций параметров (z , k , d) по формулам (7) были рассчитаны значения критериев точности аппроксимации для обеих границ, приведенные в табл. 1.

Анализ полученных результатов показал:

рассчитанные значения каждого из критериев для верхней и нижней границ совпадают вне зависимости от параметров прямой зависимости:

$$\begin{aligned}\Delta_{\max}^{\text{сред}} &= \Delta_{\min}^{\text{сред}} = \Delta^{\text{сред}}, \quad \Delta_{\max}^{\text{абс}} = \Delta_{\min}^{\text{абс}} = \Delta^{\text{абс}}, \\ \Delta_{\max}^{\text{отн}} &= \Delta_{\min}^{\text{отн}} = \Delta^{\text{отн}};\end{aligned}\quad (9)$$

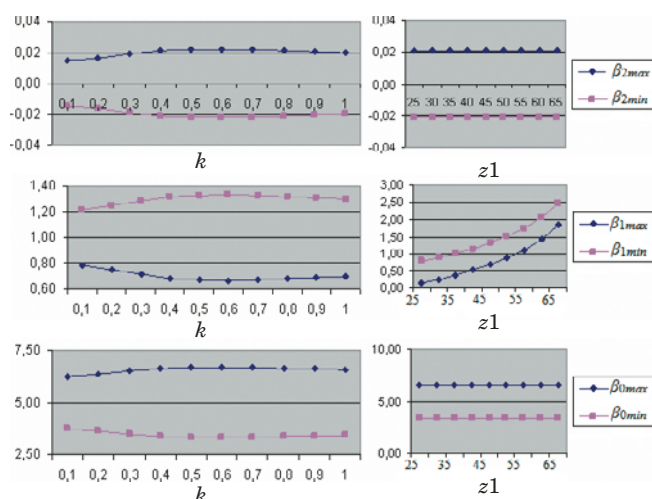


Рис. 8. Сравнение параметров аппроксимирующих полиномов

аппроксимация границ с помощью полиномов второго порядка обеспечивается с высокой точностью: $\Delta_{\text{сред}} \approx 0,001$, $\Delta_{\text{абс}} \approx 0,05$.

Равенство критериев (9) для нижней и верхней границ интервальной модели позволяет предположить наличие связи между аналогичными параметрами полиномиальных зависимостей обеих границ. Для проверки этого предположения сравним параметры $\beta_{i\max}$ и $\beta_{i\min}$ полиномов $y_{\max}^{\text{пол}}(x)$ и $y_{\min}^{\text{пол}}(x)$. С этой целью построим зависимости от варьируемых параметров k и z (рис. 8).

При анализе построенных графиков и сравнении значений параметров $\beta_{i\max}$ и $\beta_{i\min}$ ($i = 0, 1, 2$) друг с другом и с коэффициентами при соответствующих степенях x в выражении для сглаживающей и сплайн-модели выявлены следующие закономерности:

$$(\beta_{0\max} + \beta_{0\min})/2 = b_0, (\beta_{1\max} + \beta_{1\min})/2 = b_1,$$

$$\beta_{2\max} + \beta_{2\min} = 0. \quad (10)$$

Приведенные равенства подтверждают выдвинутое выше предположение о взаимозависимости параметров.

Таким образом, для решения задачи аппроксимации границ интервального коридора квадратичной функцией достаточно провести все расчеты только для одной из границ с последующим простейшим расчетом параметров другой границы, что практически вдвое сокращает объем вычислений.

Аппроксимация неявной функцией

Одной из альтернатив полиномиальной аппроксимации является сглаживание границ неявной функцией вида

$$f(x, y, \mathbf{a}) = 0 \text{ или } z(x, y) = f(x, y, \mathbf{a}),$$

где f и z — известные функции; $\mathbf{a}$ — неизвестный вектор параметров.

В результате проведенного анализа были выбраны конические сечения как неявные функции, имеющие наиболее простой вид, общее уравнение которых [12] задается в виде

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_6 = 0, \quad (11)$$

где a_j — неизвестные параметры уравнения.

В зависимости от значений коэффициентов в уравнении возможны разные варианты сечения конуса плоскостью и возникающие при этом кривые второго порядка, включая эллипс, гиперболу и параболу. Одной из особенностей уравнения (11) является то, что умножение всех его коэффициентов на постоянный ненулевой множитель не изменяет типа конического сечения.

Как и ранее, для определения неизвестных параметров воспользуемся МНК. Для этого исходную модель объекта для неявной функции, заданной на плоскости, запишем в виде

$$z(x, y) = a_1f_1(x, y) + \dots +$$

Таблица 1. Критерии качества аппроксимации

z	$k, \%$	d	$\Delta_{\text{сред}}^{\text{max}}$	$\Delta_{\text{сред}}^{\text{min}}$	$\Delta_{\text{абс}}^{\text{max}}$	$\Delta_{\text{абс}}^{\text{min}}$	$\Delta_{\text{отн}}^{\text{max}}$	$\Delta_{\text{отн}}^{\text{min}}$
45	10	0,5	0,00087	0,00087	0,06044	0,06044	0,00672	0,00672
45	15	0,5	0,00090	0,00090	0,05373	0,05373	0,00597	0,00597
45	20	1	0,00096	0,00096	0,04917	0,04917	0,00490	0,00490
45	25	2	0,00107	0,00107	0,05266	0,05266	0,00596	0,00596
45	30	2	0,00113	0,00113	0,05544	0,05544	0,00629	0,00629
65	20	1	0,00096	0,00096	0,04917	0,04917	0,00325	0,00325
55	20	1	0,00096	0,00096	0,04917	0,04917	0,00411	0,00411
35	20	0,5	0,00096	0,00096	0,04917	0,04917	0,00573	0,00573
25	20	2	0,00096	0,00096	0,04917	0,04917	0,00666	0,00666

$$+ a_j f_j(x, y) + \dots + a_m f_m(x, y), \quad (12)$$

где $z(x, y)$ и $f_j(x, y)$ — известные функции.

В качестве переменной z может быть выбрана любая базисная функция $f_j(x, y)$. Однако целесообразно [12] выбирать тот член уравнения, для которого требуется наибольшая точность коэффициента. Например, если основная цель — предсказание переменной y по заданному x , то целесообразно записать модель $y = f(x, y)$, в которой $a_5 = -1$.

Таким образом, выбранную модель (11) можно представить как

$$y = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy + a_4 x + a_6, \quad (13)$$

где $a_5 = -1$. Подобная запись не снижает общности подхода, поскольку если выбрать $a_5 \neq -1$, то можно переписать уравнение в виде

$$y = c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 xy + c_4 x + c_6,$$

где $c_j = a_j/a_5$, а после определения параметров c_j — провести обратное преобразование и вычислить искомые параметры a_j .

По экспериментальным данным формируются вектор $\mathbf{z}$, матрица базисных функций $\mathbf{F}$ и записывается матричная система уравнений

$$\mathbf{F}\mathbf{a} = \mathbf{z}, \quad (14)$$

которая, если модель (12) адекватно описывает явление, имеет следующее решение:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{z}. \quad (15)$$

Для перехода к модели (11) необходимо провести тривиальное обратное преобразование и вычислить искомые параметры a_j .

Исходными данными для аппроксимации обеих границ интервальной модели являются векторы $\mathbf{x}^\Sigma$ и $\mathbf{y}^\Sigma$ размером $2N$, сформированные из двух векторов значений для верхней $y_{\max}^\Sigma$ и нижней $y_{\min}^\Sigma$ границ: $\mathbf{x}^\Sigma = [x \ x]$ и $\mathbf{y}^\Sigma = [y_{\min}^\Sigma \ y_{\max}^\Sigma]$.

Для модели (13) матрица базисных функций и вектор $\mathbf{z}$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1^2 & x_1 x_1 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N+1}^2 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2N}^2 & y_{2N}^2 & y_{2N} y_{2N} & y_{2N} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2N} \end{bmatrix}.$$

Подставив в уравнение (13) известные значения вектора $\mathbf{x}$ и определенные по (15) параметры

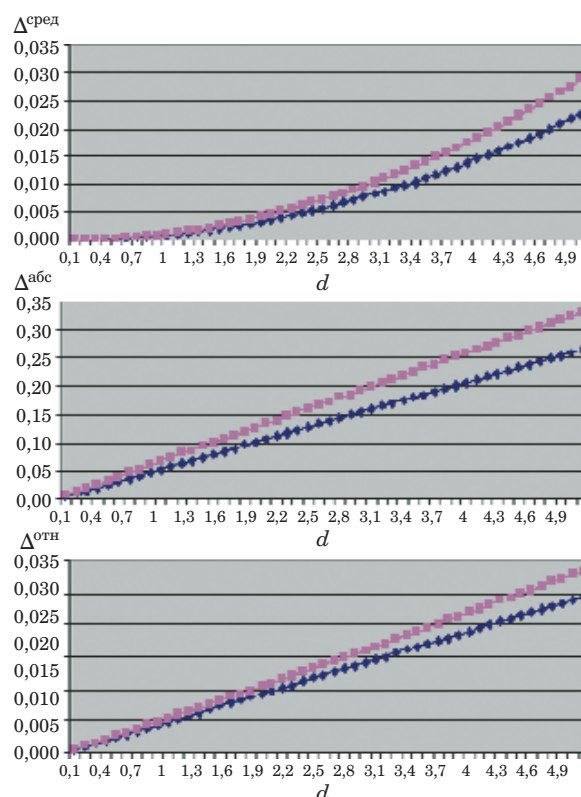


Рис. 9. Качество аппроксимации в зависимости от ширины области эксперимента: $\blacklozenge$ — аппроксимация полиномами; $\blacksquare$ — аппроксимация неявной функцией

a_j , можно для каждого x найти два решения — $y_{\min}^{\text{неяв}}$ и $y_{\max}^{\text{неяв}}$, каждое из которых принадлежит к отдельной ветке гиперболы, аппроксимирующей границу интервальной модели.

Сравнительный анализ методов по качеству аппроксимации

Проанализируем качество аппроксимации обоих методов в зависимости от различных значений параметров интервальной модели. Для этого построим зависимости значений каждого из критериев от варьируемых параметров.

На рис. 9 представлены зависимости критериев от ширины области эксперимента d , т.е. от величины ошибки предсказания, с которой был построен интервальный коридор. Здесь $[x_2; x_3] = [5; 10]$; $k = 0,2$; $z = 45$; $N = 40$; $m = 0,25$. При максимально возможной ошибке предсказания (для конкретного рассматриваемого случая $d = 5$) и для $k = 1$ значения критериев для обоих

Таблица 2. Точность аппроксимации в зависимости от ширины области эксперимента

Аппроксимация	$\Delta_{\text{сред}}$	$\Delta_{\text{абс}}$	$\Delta_{\text{отн}}$
Полиномами	0,02	0,25	0,025
Неявными функциями	0,03	0,35	0,030

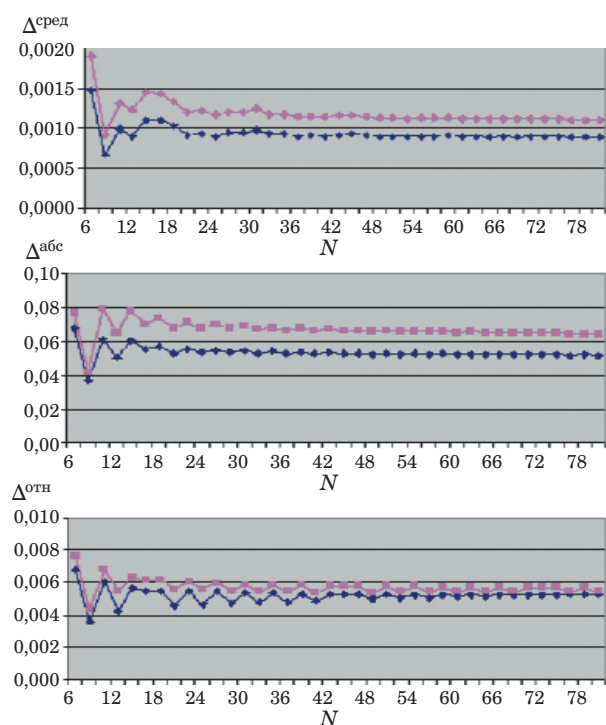


Рис. 10. Качество аппроксимации в зависимости от числа экспериментальных точек: $\blacklozenge$ — аппроксимация полиномами; $\blacksquare$ — аппроксимация неявной функцией

методов аппроксимации дают результаты, представленные в табл. 2.

На рис. 10 приведены зависимости точности аппроксимации от количества экспериментальных точек N . Здесь $[x_2:x_3] = [5:10]$; $k = 0,2$; $z = 45$; $d = 1$; $m = 0,25$. При построении данных зависимостей величина N варьировалась в пределах от 6 до 80. Анализ результатов говорит о том, что для аппроксимации границ предложенной интервальной модели вполне достаточно 30 точек, поскольку при таком наборе N значения критериев устанавливаются на своем оптималь-

Таблица 3. Точность аппроксимации в зависимости от числа экспериментальных точек

Аппроксимация	$\Delta_{\text{сред}}$	$\Delta_{\text{абс}}$	$\Delta_{\text{отн}}$
Полиномами	0,008	0,055	0,0050
Неявными функциями	0,012	0,065	0,0055

Таблица 4. Рассчитанные оценки параметров аппроксимирующих функций

$y_{\text{max}}^{\text{ан}}(x) = \beta_{0\text{max}} + \beta_{1\text{max}}x + \beta_{2\text{max}}x^2$			$y_{\text{min}}^{\text{ан}}(x) = \beta_{0\text{min}} + \beta_{1\text{min}}x + \beta_{2\text{min}}x^2$		
$\beta_{0\text{max}}$	$\beta_{1\text{max}}$	$\beta_{2\text{max}}$	$\beta_{0\text{min}}$	$\beta_{1\text{min}}$	$\beta_{2\text{min}}$
0,0164	0,7542	6,3769	-0,0164	1,2458	3,6231
$f(X, Y, A) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3yx + a_4x + a_5y + a_6$					
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0,098	0,1	-0,199	1,028	-1	2,374

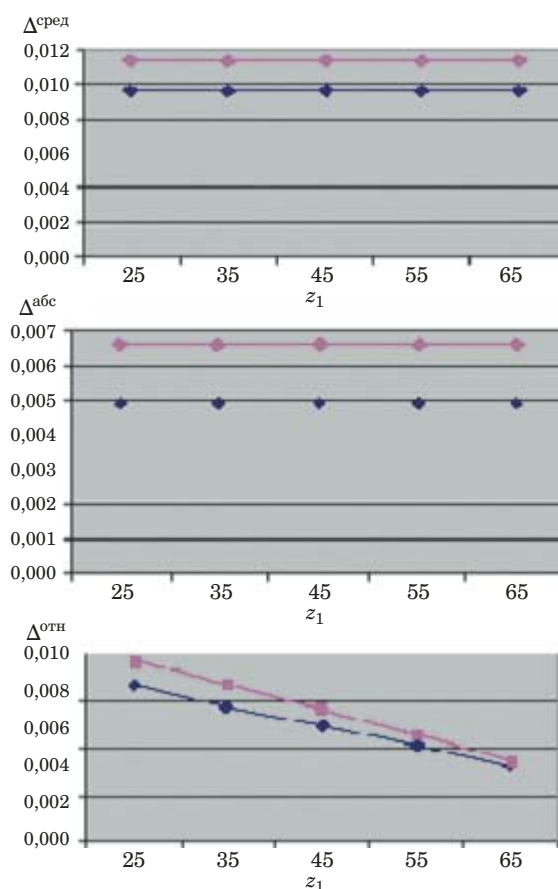


Рис. 11. Качество аппроксимации в зависимости от угла наклона: $\blacklozenge$ — аппроксимация полиномами; $\blacksquare$ — аппроксимация неявной функцией

ном уровне. Результаты для обоих методов аппроксимации представлены в табл. 3.

Величина наклона функции z_1 , как видно из рис. 11, для обоих методов аппроксимации сказывается лишь на значении критерия $\Delta_{\text{отн}}$: увеличение угла наклона ведет к прямо пропорциональному снижению значения критерия $[x_2:x_3] = [5:10]$; $k = 0,2$; $d = 1$; $N = 40$; $m = 0,25$). Зависимость остальных критериев от данного параметра не установлена.

На рис. 12 приведены функции, найденные для случая $[x_1; x_2] = [4; 5]$, $[x_2; x_3] = [5; 10]$, $[x_3; x_4] = [10; 11]$, $z_1 = 45$, $k = 0,2$, $d = 1$, $N = 20$.

Параметры и ошибки аппроксимации полиномиальных и неявных функций приведены соответственно в табл. 4 и табл. 5.

Сравнение результатов показало небольшое отличие в значениях критериев (см. табл. 5) для случая аппроксимации полиномами и неявной функцией, хотя аппроксимация полиномами в целом дает лучший результат при примерно равной трудоемкости вычислений.

Таким образом, показано, что коридор ошибок модели, полученной в предположении, что неточность исходных данных задана в интервальной форме, в отличие от статистического подхода, можно представить не двумя, а четырьмя, например, функциями и линейными сплайн-функциями, где первая пара функций описывает коридор ошибок внутри диапазона изменения входной переменной в эксперименте, а вторая пара — коридор вне этого диапазона.

Решена задача анализа и разработки методов аппроксимации статических характеристик, представляемых в виде линейных сплайнов, гладкими функциями второго порядка. Для аппроксимации линейных сплайнов, задающих коридор ошибок, могут быть успешно применены полиномы второго порядка и неявные функции в виде конических сечений.

Спланирован вычислительный эксперимент, в рамках которого:

сформулированы критерии, определяющие точность решения задачи аппроксимации;

определены области размещения экспериментальных точек на границах интервального коридора, на основании которых рассчитываются коэффициенты аппроксимирующих функций.

Разработанный эксперимент минимизирует число расчетных точек при условии обеспечения заданной точности решения задачи аппроксимации.

Установлено, что при решении задачи аппроксимации границ интервального коридора квадратичной функцией достаточно провести все расчеты только для одной из границ с последующим простейшим расчетом параметров другой границы, что практически вдвое сокращает объем вычислений. Для аппроксимации линейных сплайнов, задающих коридор неопределенности, достаточно 30 экспериментальных точек.

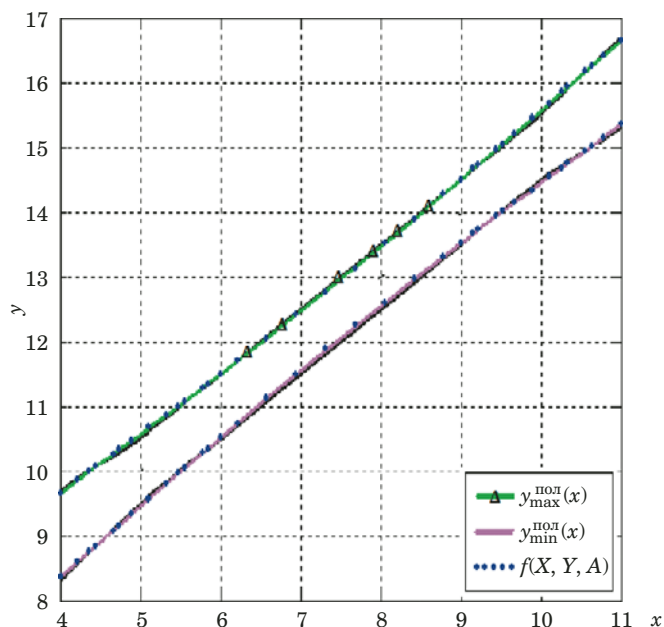


Рис. 12. Сравнение аппроксимирующих функций

Сравнение результатов показало небольшое отличие в значениях критериев для случая аппроксимации полиномами и неявной функцией при незначительном преимуществе аппроксимации полиномиальной функцией. В целом оба описанных подхода к аппроксимации границ интервальной модели можно считать примерно равноценными по трудоемкости вычислений и точности полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. — М.: Мир, 1973. — 948 с.
2. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессия. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 302 с.
3. Орлов А. И. Прикладная статистика. — М.: Экзамен, 2006. — 671 с.
4. Крутько П. Д. Обратные задачи управляемых систем, линейные модели. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
5. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984. — 261 с.
6. Скибицкий Н. В. Применение статистического подхода к построению прямых и обратных характеристик объекта / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2016. Т. 82. № 11. С. 67 – 75.
7. Воинин А. П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2002. Т. 68. № 1. С. 95 – 98.

Таблица 5. Рассчитанные значения критериев точности

Вид функции	Граница	$\Delta_{\text{сред}}$	$\Delta_{\text{абс}}$	$\Delta_{\text{отн}}$
$y_{\text{max}}^{\text{пол}}(x)$	Верхняя	0,00096	0,04917	0,00490
$y_{\text{min}}^{\text{пол}}(x)$	Нижняя	0,00096	0,04917	0,00490
$f(X, Y, A)$	Верхняя	0,00120	0,05533	0,00540
	Нижняя	0,00120	0,05580	0,00523

8. **Орлов А. И.** Статистика интервальных данных (обобщающая статья) / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81. № 3. С. 61 – 69.
9. **Новиков Д. А., Орлов А. И.** Математические методы анализа интервальных данных / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2014. Т. 80. № 7. С. 5 – 6.
10. **Вощинин А. П., Скибицкий Н. В.** Обработка неточных данных как неопределенных чисел / Вестник МЭИ. 2005. № 3. С. 95 – 107.
11. **Скибицкий Н. В.** Построение прямых и обратных статистических характеристик объектов по интервальным данным / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. Т. 83. № 1. С. 87 – 93.
12. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1988. — 223 с.
4. **Krutiko P. D.** Inverse problems of controllable systems, linear models. — Moscow: Nauka, 1987. — 304 p. [in Russian].
5. **Romanov V. G.** Inverse problems of mathematical physics. — Moscow: Nauka, 1984. — 261 p. [in Russian].
6. **Skibitskiy N. V.** Application of the statistical approach to the construction of direct and inverse characteristics of the object / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2016. Vol. 82. N 11. P. 67 – 75 [in Russian].
7. **Vochinin A. P.** Interval analysis of data: development and prospects / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2002. Vol. 68. N 1. P. 95 – 98 [in Russian].
8. **Orlov A. I.** Statistics of interval data (generalizing article) / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2015. Vol. 81. N 3. P. 61 – 69 [in Russian].
9. **Novikov D. A., Orlov A. I.** Mathematical Methods for Analysis of Interval Data / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2014. Vol. 80. N 7. P. 5 – 6 [in Russian].
10. **Vochinin A. P., Skibitskiy N. V.** Processing of inaccurate data as undetermined numbers / Vestn. MÉI. 2005. N 3. P. 95 – 107 [in Russian].
11. **Skibitskiy N. V.** Construction of direct and inverse static characteristics of objects by interval data / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2017. Vol. 83. N 1. P. 87 – 93 [in Russian].
12. **Iliin V. A., Pozniak E. G.** Analytic geometry. — Moscow: Nauka, 1988. — 223 p. [in Russian].

REFERENCES

1. **Chimmelblau D.** Analysis of the processes with statistical methods. — Moscow: Mir, 1973. — 948 p. [Russian translation].
2. **Demidenko E. Z.** Linear and nonlinear regression. — Moscow: Finansy i Statistika, 1981. — 302 p. [in Russian].
3. **Orlov A. I.** Applied statistics. — Moscow: Ékzamen, 2006. — 671 p. [in Russian].