

DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2019-85-3-75-82>

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ МОМЕНТА ИЗМЕНЕНИЯ ДИСПЕРСИИ ВРЕМЕННОГО РЯДА

© Геннадий Федорович Филаретов¹, Альмира Аснафовна Червова²¹ Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия, Москва; e-mail: gefefi@yandex.ru² Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Россия, Москва; e-mail: chervova.almira@gmail.com

*Статья поступила 15 июня 2018 г. Поступила после доработки 15 июня 2018 г.
Принята к публикации 28 июня 2018 г.*

Рассмотрен один из последовательных параметрических методов обнаружения «разладки» дискретного случайного процесса, т.е. спонтанного изменения той или иной его вероятностной характеристики. Среди множества подобных алгоритмов наибольшее распространение получили те, которые базируются на видоизмененном последовательном анализе и обычно называются алгоритмами кумулятивных сумм (АКС, или CUSUM-алгоритмами). Цель работы — исследование АКС, предназначенного для обнаружения изменения дисперсии гауссовского временного ряда. Сформулирована исходная постановка задачи, методом имитационного эксперимента исследованы вероятностные характеристики алгоритма, получены зависимости среднего интервала между ложными тревогами и среднего времени запаздывания в обнаружении разладки от величины решающего порога при разных значениях показателя, характеризующего степень изменения дисперсии при разладке. Показано, что рассматриваемый алгоритм более эффективен для обнаружения увеличения дисперсии, чем для случая ее возможного уменьшения. Предложен способ синтеза контролирующего алгоритма с заданными вероятностными характеристиками. Исследована его устойчивость по отношению к неточности задания дисперсии для исходного состояния без разладки. Выявлено, что даже относительно малые ошибки в значении этой дисперсии приводят к весьма большим отклонениям фактических вероятностных характеристик алгоритма от заданных при процедуре синтеза, что выдвигает достаточно жесткие требования к числу наблюдений, если дисперсия оценивается по экспериментальным данным. Приведено соотношение, позволяющее определить необходимый объем выборки для оценки среднеквадратического отклонения с заданной допустимой относительной погрешностью при выбранной доверительной вероятности. Результаты работы могут быть использованы при построении контрольных карт, предназначенных для решения задач статистического управления различного рода процессами.

Ключевые слова: временной ряд; обнаружение изменения дисперсии; алгоритм кумулятивных сумм; синтез контролирующего алгоритма.

SEQUENTIAL ALGORITHM FOR DETECTING CHANGES IN THE VARIANCE OF TIME SERIES

© Gennady F. Filaretov¹, Al'mira A. Chervova²¹ National Research University "MPEI", Russia, Moscow; e-mail: gefefi@yandex.ru² V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow; e-mail: chervova.almira@gmail.com

Received June 15, 2018. Revised June 15, 2018. Accepted June 28, 2018.

We consider one of the sequential parametric methods for detection of the so-called "disorder" of a discrete random process, i.e. spontaneous change of its probabilistic characteristics. Among the variety of the algorithms, the most common are those based on modified sequential analysis, usually referred as cumulative sums algorithms (CUSUM-algorithms). The aim of the work is to study the CUSUM-algorithm designed to detect changes in the variance of the Gaussian time series. The initial statement of the problem is formulated. The probabilistic characteristics of the algorithm are studied by the method of simulation experiment. The dependences of the average interval between false alarms and the average delay time in the detection of the disorder on the value of the decisive threshold for different values of the indicator characterizing the value of the variance change in the disorder are obtained. It is shown that the algorithm under consideration is more effective for detecting an increase in the variance compared to the case of its possible decrease. A method for synthesizing the controlling algorithm with the specified probabilistic characteristics is proposed. Study of the stability of the method in relation to the inaccuracy of setting the variance for the initial state without a disorder revealed that even relatively small errors in the value of the

variance lead to rather large deviations of the actual probabilistic characteristics of the algorithm from those specified in the synthesis procedure. This poses rather stringent requirements for the number of observations when the variance is estimated from the experimental data. A simplified relation for determination of the sample size required for estimation of the standard deviation with a given permissible relative error at the selected confidence probability is presented. The results of the study can be used in construction of the control cards designed to solve the problems of statistical management of various processes.

Keywords: time series; detection of variance change, CUSUM-algorithm; synthesis of control algorithm.

Рассмотрим один из последовательных параметрических методов обнаружения «разладки» дискретного случайного процесса, т.е. спонтанного изменения той или иной его характеристики. Такие методы нашли достаточно широкое применение при организации различного рода эффективных контролирующих процедур, в частности, при построении контрольных карт [1].

Среди последовательных алгоритмов обнаружения разладки временных рядов наибольшее распространение получили те, которые базируются на видоизмененном последовательном анализе и обычно называются алгоритмами кумулятивных сумм (АКС, CUSUM-алгоритмами). Хотя классический вариант такого алгоритма предложен достаточно давно [2], интерес к этой тематике не уменьшается. Это связано с тем, что появляются все новые прикладные задачи, для решения которых подобного рода алгоритмы являются весьма эффективными, к тому же многие теоретические вопросы исследованы еще далеко не в полной степени.

Можно выделить три направления развития исследований по данной тематике. Первое связано с расширением перечня разновидностей контролируемых процессов и их вероятностных характеристик, используемых в качестве параметров контроля. Если первоначально предметом рассмотрения являлись одномерные гауссовские процессы с независимыми отсчетами, а в качестве контролируемого параметра могли фигурировать либо математическое ожидание, либо дисперсия, то затем этот список стал быстро пополняться. Были предложены АКС для процессов с различными распределениями вероятностей, с коррелированными отсчетами, с использованием предварительных преобразований исходных данных для векторных временных рядов, для фрактальных процессов и т.д. [2 – 10].

Второе направление обусловлено необходимостью решения многих достаточно сложных прикладных задач, связанных с обнаружением внезапных изменений в свойствах наблюдаемого объекта, где такое событие зачастую требует оперативного принятия тех или иных управленческих решений. Такие задачи могут возникнуть, например, при мониторинге нестационарных

объектов управления [11], при построении систем автоматического управления такими объектами [12], в системах массового обслуживания [13], системах обнаружения и отражения хакерских атак на компьютерные сети [14], в энергетике [15], медицине [16], в составе программно-алгоритмического обеспечения средств неразрушающего контроля [17].

Наконец, третье направление связано с углубленным изучением уже известных алгоритмов для получения полной информации об их потребительских качествах, обеспечения процедуры синтеза контролирующего алгоритма с заданными статистическими свойствами. В качестве примера можно привести статью [18], в которой для классического АКС, предназначенного для обнаружения скачкообразного изменения математического ожидания от некоторого начального уровня m_0 до заданной номинальной величины m_1 , рассматривается случай, когда значение m_1 априори неизвестно. Данная работа находится как раз в русле этого третьего направления. В ней рассматривается классический АКС для обнаружения изменения дисперсии. Для этого варианта в опубликованных работах имеются лишь отдельные отрывочные сведения, которые не позволяют ни осуществлять целенаправленный синтез соответствующей контролирующей процедуры, ни оценить ее качество и пригодность для практического применения. Далее в систематической форме рассмотрим именно вариант разладки случайной последовательности (временного ряда) по дисперсии.

Наблюдается дискретный гауссовский случайный процесс (временной ряд) с независимыми отсчетами $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Считается, что до некоторого неизвестного момента времени n_0 процесс имеет функцию плотности распределения вероятностей $w_X(x, \sigma_0^2)$, а начиная с некоторого неизвестного момента n_0 — функцию плотности $w_X(x, \sigma_1^2)$. Именно такое скачкообразное изменение дисперсии σ_X^2 и будет далее пониматься как разладка наблюдаемого процесса x_n . Необходимо обнаружить неизвестный момент времени n_0 , причем в реальном масштабе времени, и оптимально в смысле минимизации среднего времени в обнаружении разладки $\bar{t}$ при фиксированном уровне вероятности ложного срабатывания.

рованном среднем интервале между ложными тревогами $\bar{T}_{лт}$.

Как известно [2], алгоритм кумулятивных сумм основывается на использовании решающей функции

$$g_n = \max(0; g_{n-1} + z_{n-1}), \quad (1)$$

где начальное ее значение $g_0 = 0$;

$$z_n = \ln \frac{w_X(x_n, \sigma_1^2)}{w_X(x_n, \sigma_0^2)}; \quad (2)$$

l — некоторая константа (далее $l = 0$). Нулевое значение в формуле (1) играет роль своего рода поглощающего экрана, не позволяя решающей функции сместиться в область отрицательных значений.

Контролирующая процедура продолжается до тех пор, пока на некотором шаге n^* не будет выполнено неравенство:

$$g_{n^*} \geq H, \quad (3)$$

где H — некоторая решающая граница. В этом случае подается сигнал о наличии разладки. При этом вполне возможно, что в действительности разладка отсутствует, т.е. имеет место ситуация ложной тревоги.

Далее предполагается, что значение математического ожидания наблюдаемого процесса $m_X = 0$ до и после разладки, а в исходном состоянии (без разладки) наблюдаемый процесс x_n нормированный, т.е. $\sigma_0^2 = 1$. Тогда соотношение (2) примет следующий вид:

$$z_n = \ln \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{x_n^2}{2\sigma_1^2}\right) / \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_n^2}{2}\right) \right\} \quad (4)$$

или после несложных преобразований —

$$\begin{aligned} z_n &= -\frac{1}{2} \ln \sigma_1^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - 1 \right) x_n^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \sigma_1^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sigma_1^2} \right) x_n^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Если ввести показатель d степени изменчивости дисперсии σ_X^2 от начального уровня $\sigma_0^2 = 1$ до уровня σ_1^2 и пренебречь не влияющим на конечный результат сомножителем $1/2$, то формула (5) запишется как

$$z_n = -\ln d + \left(1 - \frac{1}{d} \right) x_n^2. \quad (6)$$

Отметим, что в общем случае математическое ожидание z_n

$$\begin{aligned} M\{z_n\} &= -\ln d + \left(1 - \frac{1}{d} \right) M\{x_n^2\} = \\ &= -\ln d + \left(1 - \frac{1}{d} \right) \sigma_X^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда следует, что при отсутствии разладки, когда $\sigma_X^2 = \sigma_0^2 = 1$,

$$\begin{aligned} M\{z_n | \text{при отсутствии разладки}\} &= \\ &= -\ln d + (1 - 1/d), \end{aligned}$$

а при номинальной разладке, когда $\sigma_X^2 = \sigma_1^2$,

$$\begin{aligned} M\{z_n | \text{при номинальной разладке}\} &= \\ &= -\ln d + (d - 1). \end{aligned}$$

Если обозначить k — коэффициент кратности изменения дисперсии, то при разладке в сторону ее увеличения, т.е. $d = k$ ($d > 1$), по-прежнему получим

$$\begin{aligned} M\{z_n | \text{при отсутствии разладки}\} &= \\ &= -\ln k + (1 - 1/k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\{z_n | \text{при номинальной разладке}\} &= \\ &= -\ln k + (k - 1). \end{aligned}$$

Однако при разладке в сторону уменьшения дисперсии с тем же коэффициентом кратности, когда $d = 1/k$,

$$\begin{aligned} M\{z_n | \text{при отсутствии разладки}\} &= \ln k - (k - 1), \\ M\{z_n | \text{при номинальной разладке}\} &= \\ &= \ln k - (1 - 1/k). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что рассматриваемый алгоритм несимметричен относительно направления разладки, чем принципиально отличается от случая разладки процесса по математическому ожиданию, где направление изменения контролируемого параметра не играет никакой роли (см., например, [5]).

Анализ вероятностных характеристик алгоритма

Для практического применения контролирующего алгоритма необходимо предварительно исследовать его основные вероятностные характеристики, а именно найти зависимость среднего интервала между ложными тревогами $\bar{T}_{лт}$ от ве-

Значения показателя эффективности μ для варианта $d > 1$ и $d < 1$

$\bar{T}_{\text{лт}}$	1,25	1,5	2,0	2,5	3,0	1/1,25	1/1,5	1/2,0	1/2,5	1/3,0
100	3,0	4,3	7,7	11,0	13,7	2,1	3,1	5,3	6,5	7,6
200	3,4	6,0	12,0	17,7	22,7	2,6	4,5	8,1	10,4	12,4
300	3,9	7,5	15,9	23,8	31,0	3,2	5,6	10,4	13,9	16,8
500	5,0	10,4	23,0	35,0	46,4	4,1	7,7	14,6	20,3	24,9
1000	7,3	16,6	38,5	60,3	81,4	6,1	12,2	23,9	34,5	43,1
2000	11,3	27,3	65,7	105,8	144,9	9,4	20,0	40,1	59,5	75,5
3000	14,8	36,8	90,5	147,9	204,1	12,3	27,2	54,9	82,3	105,4
4000	18,0	45,8	113,8	188,2	260,9	14,9	34,0	69,1	103,9	133,8
5000	21,1	54,4	136,2	227,0	316,0	17,4	40,6	82,7	124,6	161,2

личины решающего порога H при разных значениях коэффициента кратности k и аналогичную зависимость для среднего запаздывания обнаружения разладки $\bar{\tau}$, характеризующего быстродействие алгоритма.

Различные теоретические методы определения указанных характеристик известны (см., например, [3]), однако применительно к рассматриваемой задаче все они не позволяют получить достаточно точные и полные результаты. Поэтому в данном случае использовали метод имитационного моделирования. Для его практической реализации в среде МАТЛАБ разработан специальный программный модуль «АКСИМ-Д», предназначенный для имитационного моделирования и исследования АКС в случае разладки гауссовского процесса по дисперсии.

Данный модуль содержит следующие функциональные блоки:

генератор дискретного гауссовского процесса с некоррелированными отсчетами и параметрами, изменяющимися по желанию пользователя; в числе таких параметров в данном исследовании задавали значение математического ожидания процесса $m_X = 0$, а также величину дисперсии $\sigma_X^2 = \sigma_0^2 = 1$ при моделировании ситуации в отсутствие разладки и $\sigma_X^2 = \sigma_1^2$ — при наличии разладки. Фактически тем самым задавали направление разладки и коэффициент кратности k ;

операционный блок, имитирующий работу алгоритма кумулятивных сумм с фиксацией интервалов T_g ($g = 1, 2, \dots$) между моментом начала очередной контролирующей процедуры и появлением сигнала о наличии разладки;

блок управления, позволяющий задавать необходимое количество повторных контролируемых процедур N с тем, чтобы обеспечить необходимую точность результатов моделирования;

блок статистической обработки, определяющий среднее значение и дисперсию интервалов T_g ($g = 1, 2, \dots, N$), а также дисперсию $\bar{T}$:

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^N T_g, \quad \sigma_{T_g}^2 = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^N (T_g - \bar{T})^2,$$

$$\sigma^2\{\bar{T}\} = \frac{1}{N} \sigma_{T_g}^2.$$

Использовали различные значения k (1,25; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0) для двух вариантов разладки в сторону как увеличения дисперсии ($d = k$), так и ее уменьшения ($d = 1/k$) при $\bar{T}_{\text{лт}}$, равной 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 5000. Число повторений N выбирали равным 10 000 при нахождении $\bar{T}_{\text{лт}}$ и 5000 при вычислении $\bar{\tau}$, что обеспечивает приемлемую для данного исследования точность моделирования. По результатам моделирования получены зависимости решающего порога H и интервала $\bar{\tau}$ от $\bar{T}_{\text{лт}}$ (рис. 1).

Для получения представления об эффективности контролирующих процедур используем показатель μ , определяемый как отношение среднего интервала между ложными тревогами к среднему времени запаздывания в обнаружении разладки: $\mu = \bar{\tau} / \bar{T}_{\text{лт}}$. Расчетные значения показателя μ для вариантов разладки в сторону увеличения дисперсии ($d > 1$) и ее уменьшения ($d < 1$) представлены в таблице. Из нее можно заключить следующее:

с ростом среднего интервала между ложными тревогами $\bar{T}_{\text{лт}}$ эффективность контролирующей процедуры увеличивается;

эффективность контролирующих процедур, предназначенных для обнаружения разладки в сторону увеличения дисперсии, выше, чем аналогичных процедур для варианта уменьшения дисперсии.

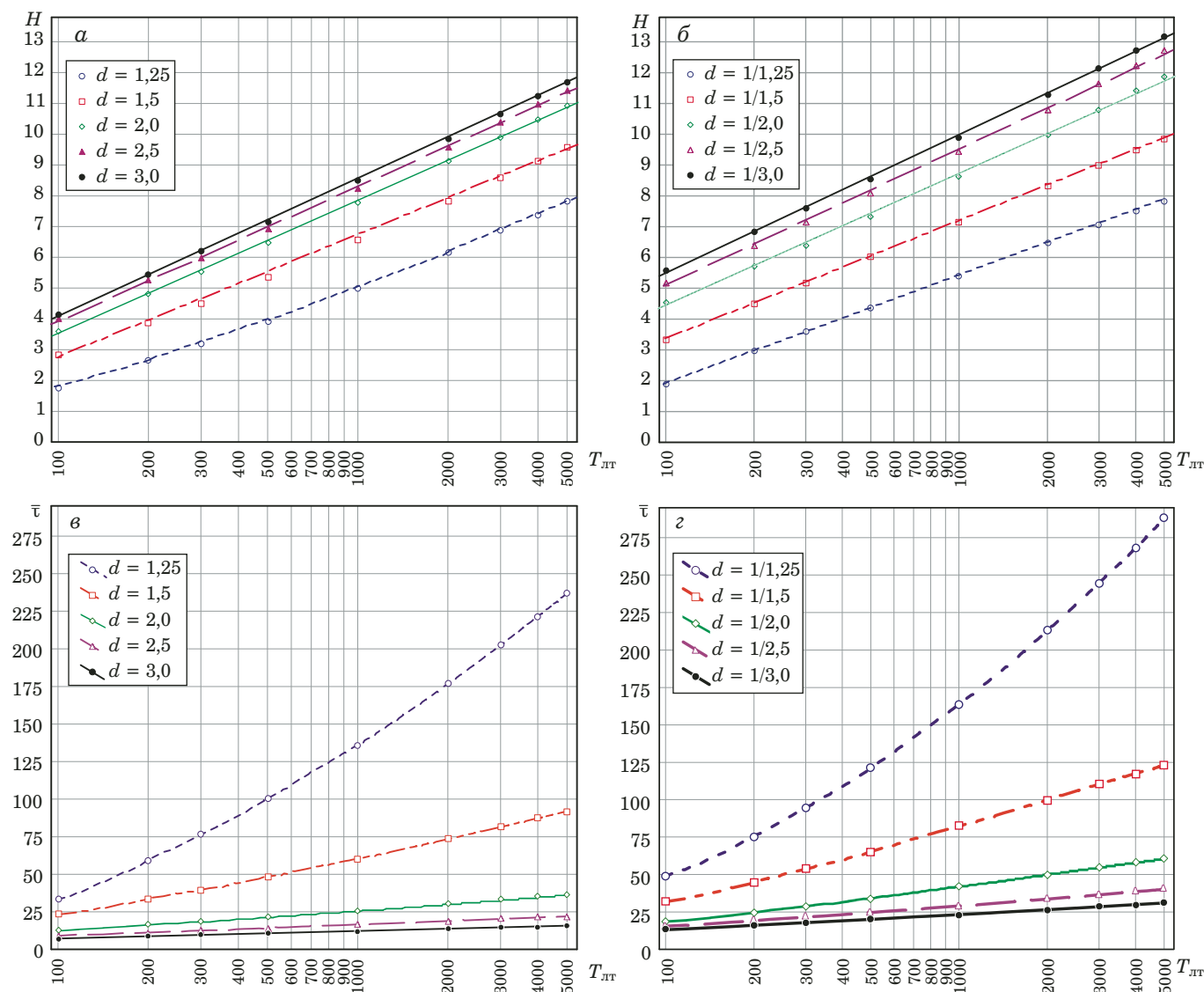


Рис. 1. Зависимости решающего порога H (а, б) и интервала τ (в, г) от $\bar{T}_{\text{лт}}$ при $d > 1$ (а, в) и $d < 1$ (б, г)

Синтез контролирующего алгоритма

Синтез контролирующего алгоритма проводят с учетом конкретных особенностей решаемой практической задачи. Предлагаем следующую процедуру синтеза, состоящую из ряда последовательно осуществляемых этапов.

1. Получение исходной информации о значениях математического ожидания m_X и дисперсии процесса в нормальном состоянии (без разладки) σ_0^2 ; эти значения необходимы в дальнейшем для нормирования получаемых отсчетов процесса x_n .

2. Выбор необходимого значения интервала между ложными тревогами $\bar{T}_{\text{лт}}$ с учетом возможных потерь, связанных с появлением ложного сигнала о наличии разладки, степени опасности длительной задержки в ее выявлении, сведений об эффективности контролирующей процедуры.

3. Задание значения дисперсии σ_1^2 , соответствующей номинальному (ожидаемому) значе-

нию разладки, и вычисление параметра $d = \sigma_1^2 / \sigma_0^2$.

4. Определение решающего порога H , обеспечивающего заданное значение среднего интервала между ложными тревогами $\bar{T}_{\text{лт}}$. Такое определение может быть проведено с помощью графиков на рис. 1, а, если $d > 1$, или на рис. 1, б, если $d < 1$.

5. Определение с помощью графиков на рис. 1, в, г среднего времени запаздывания $\bar{\tau}$ в обнаружения номинальной разладки. Эта информация полезна для оценки реального быстродействия контролирующего алгоритма.

Исследование устойчивости вероятностных характеристик алгоритма

Для любой статистической процедуры одним из важных свойств, во многом определяющих ее практическую применимость, является устой-

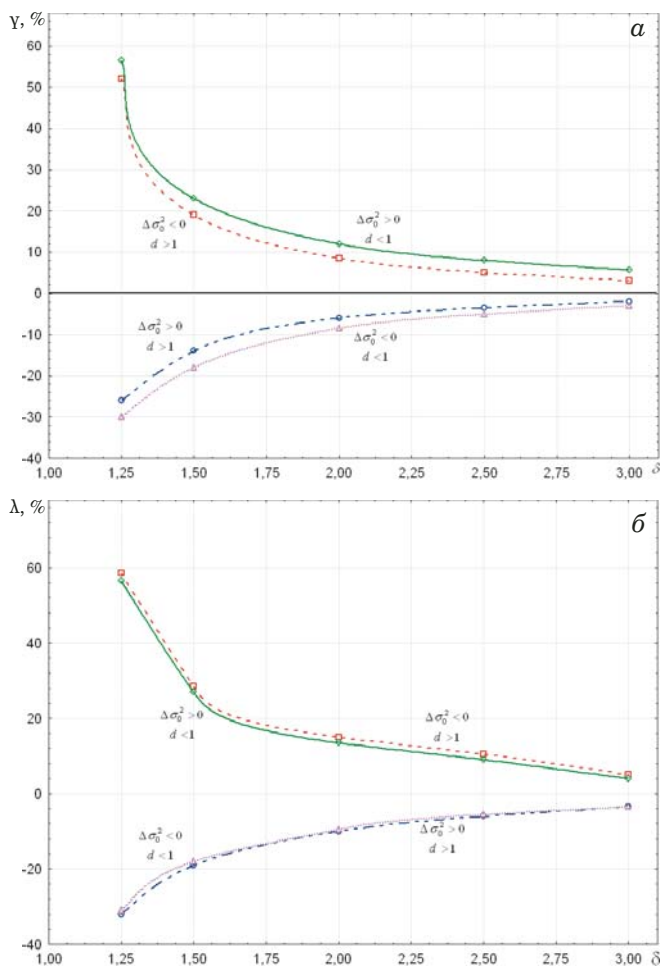


Рис. 2. Зависимости коэффициентов γ (а) и λ (б) от параметра δ

чивость, характеризующая степень чувствительности к возможным нарушениям исходных предпосылок или неточному знанию тех или иных параметров, используемых при настройке процедуры. В данном случае наибольший интерес представляет вопрос о влиянии неточного задания дисперсии контролируемого процесса в состоянии без разладки σ_0^2 на такие характеристики рассматриваемого АКС, как $\bar{T}_{\text{лт}}$ и $\bar{\tau}$.

Необходимость данного исследования следует из того факта, что, с одной стороны, значение σ_0 должно использоваться для нормировки контролируемого процесса, а с другой стороны, точное значение дисперсии σ_0^2 почти всегда априори неизвестно и его приходится оценивать по экспериментальным данным на этапе подготовки к синтезу контролирующего алгоритма. Очевидно, что в таком случае дисперсия σ_0^2 будет определена с некоторой ошибкой и важно понять, как эта ошибка скажется на значениях $\bar{T}_{\text{лт}}$ и $\bar{\tau}$.

Для ответа на этот вопрос был проведен специальный имитационный эксперимент, практически повторяющий описанный выше. Значения d выбирали из того же ряда, что и ранее, при зна-

чениях $\bar{T}_{\text{лт}}$, равных 500, 2000, 5000. Имитировали изменения дисперсии процесса на величину $\pm \Delta \sigma_0^2$ от исходного значения σ_0^2 , что при реализации процесса контроля приводило к неточностям нормировки текущих отсчетов контролируемого процесса. Было выбрано сравнительно малое относительное изменение $\varepsilon = \Delta \sigma_0^2 / \sigma_0^2$ — на уровне 5 %.

В качестве показателей степени изменчивости характеристик контролирующего алгоритма использовали коэффициенты γ и λ :

$$\gamma = \frac{\Delta \bar{T}_{\text{лт}}}{\bar{T}_{\text{лт}}} \cdot 100\%, \quad \lambda = \frac{\Delta \bar{\tau}}{\bar{\tau}} \cdot 100\%.$$

Анализ полученных результатов показал, что коэффициенты γ и λ практически остаются одними и теми же при различных $\bar{T}_{\text{лт}}$. Вместе с тем влияние изменений дисперсий $\Delta \sigma_0^2$ оказалось весьма существенным. На рис. 2 представлены зависимости коэффициентов γ и λ от параметра δ , полученные путем усреднения по $\bar{T}_{\text{лт}}$, для вариантов разладки в сторону как увеличения дисперсии ($\delta > 1$), так и ее уменьшения ($\delta < 1$) при положительных и отрицательных значениях $\Delta \sigma_0^2$.

Очевидно, что даже относительно малые ошибки в значении дисперсии контролируемого процесса в исходном состоянии без разладки σ_0^2 , а значит, и величины σ_0 , используемой при его нормировке, приводят к весьма большим отклонениям фактических характеристик $\bar{T}_{\text{лт}}$ и $\bar{\tau}$ от заданных при процедуре синтеза контролирующего алгоритма. Особенно сильно этот эффект проявляется при малых значениях ожидаемой разладки δ . Отсюда следует необходимость достаточно точного задания дисперсии σ_0^2 . Если речь идет о ее оценивании по экспериментальным данным, то имеются определенные требования к числу наблюдений N , экспериментальной выборки, используемой для получения оценки $\hat{\sigma}_0^2$ и, соответственно, среднеквадратического отклонения $\hat{\sigma}_0$, необходимого при нормировке.

В [19, 20] приведено соотношение, позволяющее определить объем выборки N для оценки среднеквадратического отклонения с заданной допустимой относительной погрешностью $\varepsilon_{\text{доп}}$ и доверительной вероятностью Q . Это соотношение может быть преобразовано к следующему виду [20]:

$$\frac{\chi_{v, \alpha=(1+Q)/2}^2}{\chi_{v, \alpha=(1-Q)/2}^2} \approx (1 + \varepsilon_{\text{доп}})^2, \quad (8)$$

где $\chi_{v, \alpha}^2$ — α -квантиль χ^2 -распределения с v степенями свободы.

В общем случае для получения ответа с помощью соотношения (8) приходится использовать метод подбора. Однако для больших N_0 (именно этот случай имеет место здесь) можно воспользоваться асимптотической аппроксимацией квантилей χ^2 -распределения с помощью квантилей u_α гауссовского распределения [21]:

$$\chi^2_{v,\alpha} \approx \frac{1}{2}(\sqrt{2v-1} + u_\alpha)^2. \quad (9)$$

Подставляя (9) в формулу (8) и полагая, что в данном случае $v = N_0$, после несложных преобразований получим

$$N_0 \approx \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{2u_{\alpha=(1+Q)/2}}{\varepsilon_{\text{доп}}} + u_{\alpha=(1+Q)/2} \right]^2 - 1 \right\}. \quad (10)$$

Сопоставление результатов расчета числа наблюдений N_0 по формуле (10) с табличными значениями [19] показало вполне приемлемую точность соотношения (10) в широком диапазоне значений Q .

Для доверительной вероятности Q , равной 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 расчетные значения N_0 , найденные с помощью (10), составили 1500, 2300, 3500, 5400 соответственно (значения округлены до сотен). При этом в оценке среднеквадратического отклонения σ_0 использовали величину относительной допустимой погрешности $\varepsilon_{\text{доп}}$, равную 0,025, что примерно соответствует пятипроцентному относительному изменению значений σ_0^2 .

Очевидно, что для корректной настройки и дальнейшего функционирования АКС при определении величины σ_0 следует использовать выборки достаточно большого объема. Впрочем, это не должно приводить к существенным трудностям, поскольку речь идет об измерениях значений контролируемого процесса в нормальном рабочем режиме (без разладки), в котором он и должен находиться большую часть времени.

Выводы

Таким образом, рассмотрена задача построения алгоритма кумулятивных сумм, предназначенного для обнаружения спонтанного изменения (разладки) временного ряда в виде скачкообразного изменения его дисперсии.

Методом имитационного эксперимента исследованы вероятностные характеристики алгоритма. Получены зависимости среднего интервала между ложными тревогами $\bar{T}_{\text{лт}}$ и среднего времени запаздывания обнаружения разладки $\bar{\tau}$ от величины решающего порога H при разных значениях показателя d , характеризующего величину

изменения дисперсии при разладке от исходного уровня (в состоянии без разладки).

Показано, что вероятностные характеристики алгоритма зависят от направления разладки, причем эффективность контролирующих процедур, предназначенных для обнаружения разладки в сторону увеличения дисперсии, выше, чем аналогичных процедур для варианта уменьшения дисперсии. Предложен алгоритм синтеза контролирующего алгоритма с заданными вероятностными характеристиками. Исследована устойчивость контролирующего алгоритма по отношению к неточности задания дисперсии σ_0^2 для состояния без разладки; выявлено, что даже относительно малые ошибки в значении дисперсии σ_0^2 приводят к весьма большим отклонениям фактических характеристик $\bar{T}_{\text{лт}}$ и $\bar{\tau}$ от заданных при процедуре синтеза контролирующего алгоритма, что выдвигает достаточно жесткие требования к числу наблюдений N_0 , если σ_0^2 оценивается по экспериментальным данным. Предложен упрощенный способ определения необходимого объема выборки N_0 для оценки среднеквадратического отклонения σ_0 с заданной допустимой относительной погрешностью $\varepsilon_{\text{доп}}$ и доверительной вероятностью Q .

Полученные результаты могут быть использованы при построении контрольных карт, предназначенных для решения задач статистического управления различного рода процессами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мердок Дж. Контрольные карты / Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1986. — 152 с.
2. Page E. S. Continuous inspection schemes / *Biometrika*. 1954. Vol. 41. N 1. P. 100 – 115.
3. Никифоров И. В. Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. — М.: Наука, 1983. — 200 с.
4. Filaretov G., Sviridenkov K. Analysis and Synthesis of CUSUM Quality-Control Procedures for Discrete Processes with Exponential Densities / 39. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium. Technische Universität Ilmenau (Thür.). 1994. Band 3. S. 793 – 800.
5. Сивова Д. Г., Филаретов Г. Ф. Последовательный алгоритм обнаружения момента изменения характеристик векторных временных рядов / *Вестник МЭИ*. 2014. № 2. С. 63 – 69.
6. Reza Habibi. Cusum Procedure Using Transformed Observations / *Applied Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 5. N 43. P. 2177 – 2185.
7. Hamed M. S. Average Run Length Performance for Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart Procedure with Application / *International Journal of Computing and Optimization*. 2016. Vol. 3. N 1. P. 33 – 61.
8. Julia Kuhn. A Large Deviations Approach to Detecting Changes in VARMA Processes. — Amsterdam: University of Amsterdam, TNO, 2013. — 101 p.
9. Lombard F., Hawkins D. M., Potgieter C. J. Sequential rank CUSUM charts for angular data / *Computational Statistics and Data Analysis*. 2017. Vol. 105. P. 268 – 279.
10. Филаретов Г. Ф., Червова А. А. Последовательный алгоритм обнаружения разладки фрактальных временных рядов / *Вестник МЭИ*. 2015. № 3. С. 102 – 109.

11. Димаки А. В., Светлаков А. А. Применение алгоритма кумулятивных сумм при рекуррентном оценивании параметров нестационарных объектов управления / Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2012. Вып. 2(145).
12. Елисеев В. Л., Филаретов Г. Ф. Методика синтеза нейросетевой системы управления нестационарным объектом / Вестник МЭИ. 2010. № 3. С. 100 – 106.
13. Репин Д. С. Синтез алгоритма обнаружения изменения параметров системы массового обслуживания / Материалы XLI международной конференции «Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе IT+SE'2013». 2013.
14. Мазалов В. В., Никитина Н. Н. Метод кумулятивных сумм для обнаружения вторжений и борьбы с ними / Программирование. 2014. № 6. С. 54 – 61.
15. Antony Hilliard, Greg A. Jamieson. Recursive Estimates as an Extension to CUSUM-based Energy Monitoring & Targeting / ACEEE Summer Study on Energy Efficiency in Industry. 2013. Panel 4. P. 94 – 101.
16. Olatunde A. Adeoti. Application of Cusum Control Chart for Monitoring HIV/AIDS Patients in Nigeria / International Journal of Statistics and Applications. 2013. N 3(3). P. 77 – 80.
17. Spandan Mishra, O. Arda Vanli, Chiwoo Park. A Multivariate Cumulative Sum Method for Continuous Damage Monitoring with Lamb-wave Sensors / International Journal of Prognostics and Health Management. 2015. Vol. 6. Special Issue. — 11 p.
18. Wenpo Huang, Lianjie Shu, Wei Jiang. A Gradient Approach to the Optimal Design of CUSUM Charts Under Unknown Mean-Shift Sizes / Journal of Quality Technology. 2016. Vol. 48. N 1. P. 68 – 83.
19. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1965. — 464 с.
20. Красовский Г. И., Филаретов Г. Ф. Планирование эксперимента. — Минск: Издательство БГУ, 1982. — 302 с.
21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Пер. с англ. — М.: Наука, 1968. — 720 с.
6. Reza Habibi. Cusum Procedure Using Transformed Observations / Applied Mathematical Sciences. 2011. Vol. 5. N 43. P. 2177 – 2185.
7. Hamed M. S. Average Run Length Performance for Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart Procedure with Application / International Journal of Computing and Optimization. 2016. Vol. 3. N 1. P. 33 – 61.
8. Julia Kuhn. A Large Deviations Approach to Detecting Changes in VARMA Processes. — Amsterdam: University of Amsterdam, TNO, 2013. — 101 p.
9. Lombard F., Hawkins D. M., Potgieter C. J. Sequential rank CUSUM charts for angular data / Computational Statistics and Data Analysis. 2017. Vol. 105. P. 268 – 279.
10. Filaretov G. F., Chervova A. A. Sequential algorithm of the change point detection of fractal time series / Vestn. MĖI. 2015. N 3. P. 102 – 109 [in Russian].
11. Dimaki A. V., Svetlakov A. A. Application of the cumulative sums algorithm for recursive estimation of parameters of non-stationary control objects / Nauch.-Tekhn. Vedom. SPbPU. Estestv. Inzh. Nauki. 2012. Issue 2(145) [in Russian].
12. Eliseev V. L., Filaretov G. F. Methods of synthesis of neural network control system of non-stationary object / Vestn. MĖI. 2010. N 3. P. 100 – 106 [in Russian].
13. Repin D. S. Synthesis of the algorithm for detecting changes in the parameters of a queuing system / Proceedings of the XLI international conference “Information technologies in science, education, telecommunications and business IT+SE'2013». 2013 [in Russian].
14. Mazalov V. V., Nikitina N. N. Cumulative sums method for intrusion detection and fight against them / Programirovanie. 2014. N 6. P. 54 – 61 [in Russian].
15. Antony Hilliard, Greg A. Jamieson. Recursive Estimates as an Extension to CUSUM-based Energy Monitoring & Targeting / ACEEE Summer Study on Energy Efficiency in Industry. 2013. Panel 4. P. 94 – 101.
16. Olatunde A. Adeoti. Application of Cusum Control Chart for Monitoring HIV/AIDS Patients in Nigeria / International Journal of Statistics and Applications. 2013. N 3(3). P. 77 – 80.
17. Spandan Mishra, O. Arda Vanli, Chiwoo Park. A Multivariate Cumulative Sum Method for Continuous Damage Monitoring with Lamb-wave Sensors / International Journal of Prognostics and Health Management. 2015. Vol. 6. Special Issue. — 11 p.
18. Wenpo Huang, Lianjie Shu, Wei Jiang. A Gradient Approach to the Optimal Design of CUSUM Charts Under Unknown Mean-Shift Sizes / Journal of Quality Technology. 2016. Vol. 48. N 1. P. 68 – 83.
19. Bol'shev L. N., Smirnov L. N. Tables of mathematical statistics.. — Moscow: Nauka, 1965. — 464 p. [in Russian].
20. Krasovskii G. I., Filaretov G. F. Design of experiments. — Minsk: Izd. BGU, 1982. — 302 p. [in Russian].
21. Korn G. A., Korn T. M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review. — McGraw-Hill companies, Inc., 1961. — 720 p.

REFERENCES

1. Murdoch J. Control Charts. The Macmillan Press Limited, 1979. — 150 p.
2. Page E. S. Continuous inspection schemes / Biometrika. 1954. Vol. 41. N 1. P. 100 – 115.
3. Nikiforov I. V. Sequential detection of changes in the properties of time series. — Moscow: Nauka, 1983. — 200 p. [in Russian].
4. Filaretov G., Sviridenkov K. Analysis and Synthesis of CUSUM Quality-Control Procedures for Discrete Processes with Exponential Densities / 39. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium. Technische Universität Ilmenau (Thür.). 1994. Band 3. S. 793 – 800.
5. Sivova D. G., Filaretov G. F. Sequential algorithm of the moment change characteristics detection for vector time series / Vestn. MĖI. 2014. N 2. P. 63 – 69 [in Russian].