

DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2019-85-4-50-56>

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАЗРУШЕНИЯ КВАЗИХРУПКОГО МАТЕРИАЛА С ОТВЕРСТИЕМ ПРИ СЖАТИИ*

© Сергей Викторович Сукнёв

Институт горного дела Севера им. Н. В. Черского СО РАН, г. Якутск, Россия; e-mail: suknyov@igds.ysn.ru

*Статья поступила 13 июня 2018 г. Поступила после доработки 6 декабря 2018 г.
Принята к публикации 30 января 2019 г.*

Цель исследования — разработка новых критериев разрушения квазихрупких материалов в условиях концентрации напряжений. Выполнен анализ возможности применения нелокальных критериев разрушения для описания хрупкого, квазихрупкого и вязкого разрушения материалов с вырезами. Общее свойство этих критериев — введение внутреннего размера материала, характеризующего его структуру, что позволяет описать масштабный эффект в условиях концентрации напряжений и тем самым расширить область их применения по сравнению с традиционными критериями. Вместе с тем показано, что эта область ограничена случаями хрупкого либо квазихрупкого разрушения с малой зоной предразрушения. Для расширения области применения критериев на случаи квазихрупкого разрушения с развитой зоной предразрушения предложено отказаться от гипотезы о размере зоны предразрушения как о константе материала, связанной только с его структурой. Разработаны, физически обоснованы и экспериментально подтверждены новые нелокальные критерии, являющиеся развитием критериев средних напряжений и фиктивной трещины. Эти критерии содержат комплексный параметр, характеризующий размер зоны предразрушения и учитывающий не только структуру материала, но также его пластические свойства, геометрию образца и условия нагружения. Получены выражения для критического давления в задаче об образовании трещин отрыва при сжатии в образцах геоматериалов с круговым отверстием. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными о разрушении гипсовых плит с отверстием.

Ключевые слова: хрупкое разрушение; квазихрупкое разрушение; вязкое разрушение; нелокальные критерии; геоматериалы; масштабный эффект; концентрация напряжений.

THE USE OF NONLOCAL CRITERIA IN FORECASTING FRACTURE OF QUASI-BRITTLE MATERIAL WITH A HOLE UNDER COMPRESSION

© Sergey V. Suknev

Chersky Institute of Mining of the North, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Yakutsk, Russia;
e-mail: suknyov@igds.ysn.ru

Received June 13, 2018. Revised December 6, 2018. Accepted January 30, 2019.

The study is aimed at the development of the new failure criteria for quasi-brittle materials in conditions of stress concentration. The possibility of using non-local failure criteria for description of the brittle, quasi-brittle and ductile fracture of the materials with notches is analyzed. The general feature of these criteria consists in the introduction of the internal dimension characterizing the structure of the material, which provides the possibility of describing a large-scale effect in conditions of the stress concentration and thereby expand the area of their application compared to traditional criteria though it is limited to the cases of brittle or quasi-brittle fracture with a small pre-fracture zone. To broaden the scope of their application to quasi-brittle fracture with a developed pre-fracture zone we propose to abandon the hypothesis about the size of the pre-fracture zone as a constant related only to the structure of the material. A number of the new nonlocal criteria, which are the development of the criteria of the mean stress and fictitious crack, are developed, substantiated from the physical standpoint, and proved experimentally. These criteria contain a complex parameter characterizing the size of the pre-fracture zone and taking into account not only the structure, but also the ductile properties of the material, specimen geometry and loading conditions. The expressions for the critical pressure in the problem of tensile crack formation upon compression

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-05-00323).

sion of the samples of geomaterials with a circular hole are derived. The results of calculations match rather well the experimental data on the destruction of drilled gypsum slabs.

Keywords: brittle fracture; quasi-brittle fracture; ductile fracture; nonlocal criteria; geomaterials; scale effect; stress concentration.

Введение

В работах [1, 2] рассмотрены области применения классических критериев, критериев механики разрушения, а также нелокальных критериев разрушения (средних напряжений и фиктивной трещины). Показаны преимущества и ограничения использования нелокальных критериев в задаче о прочности твердого тела, содержащего концентратор напряжений, при растяжении и сжатии. Важной особенностью нелокальных критериев является возможность их применения для описания разрушения как у гладких (тупых), так и у сингулярных (острых) концентраторов напряжений. В качестве концентраторов напряжений будем рассматривать вырезы (отверстия, полости) в твердом теле.

Среди нелокальных критериев наибольшее распространение получил критерий средних напряжений. Он основан на представлении о формировании в материале зоны предразрушения (fracture process zone), в которой происходит локальное перераспределение напряжений, в то время как основной материал деформируется упруго вплоть до разрушения. Его применяют аналогично традиционным критериям с той лишь разницей, что расчет левой части критерия проводят путем осреднения напряжений в малой области вблизи точки максимума. Размер этой области полагают константой материала, характеризующей его структуру. Вычисленную таким образом величину эквивалентного напряжения приравнивают к прочностной характеристике материала, которую также полагают константой.

Критерий фиктивной трещины основан на применении методов механики разрушения. Для трещины в твердом теле составляют энергетический баланс при ее виртуальном приращении на бесконечно малую величину и записывают условие роста трещины, которое и является критерием разрушения. Процедура применения критериев механики разрушения обычно сводится к расчету соответствующего коэффициента интенсивности напряжений, характеризующего степень снижения напряжений у вершины трещины, и приравниванию его к критическому значению, которое также полагается константой материала. Для того чтобы критерий линейной (упругой) механики разрушения применить к описанию разрушения у гладкого выреза, поступают следующим образом. Предполагают, что в вершине выреза в зоне концентрации напря-

жений изначально существует воображаемая (фиктивная) трещина, длина которой является константой материала, характеризующей его структуру. Для трещины, находящейся в неоднородном поле напряжений, рассчитывают коэффициент интенсивности напряжений и применяют подход линейной механики разрушения.

Хотя нелокальные критерии успешно используют при решении нелинейных задач механики разрушения [3 – 6], область их применения — преимущественно хрупкое разрушение материалов с вырезами. Для описания вязкого разрушения необходима дополнительная информация о неупругом поведении материала в зоне предразрушения или о константах материала, характеризующих его пластические свойства. Промежуточное положение между зонами хрупкого и вязкого разрушения занимают области квазихрупкого и квазивязкого разрушения. Эти области отличаются размером зоны предразрушения по отношению к длине трещины [7]. Часто такое отличие между областями не делается, а разрушение с развитой зоной поврежденности, размер которой может быть сопоставим с размером трещины и тела, называют квазихрупким [8]. В дальнейшем не будем делать этого отличия и для простоты промежуточную область между хрупким и вязким разрушением будем называть областью квазихрупкого разрушения.

Наглядно области хрупкого, квазихрупкого и вязкого разрушения могут быть представлены на диаграмме разрушения в координатах разрушающая нагрузка — размер выреза (рис. 1).

Штриховая прямая на рис. 1 соответствует расчету разрушающей нагрузки (критического напряжения) по традиционному критерию прочности, который имеет вид

$$\sigma_e < \sigma_0, \quad (1)$$

где $\sigma_e = f(\sigma_{ij})$; $\sigma_0 = \text{const}$. Эквивалентное напряжение σ_e характеризует внутреннее напряженное состояние тела и в общем случае является функцией компонент тензора напряжений σ_{ij} . Прочность материала σ_0 полагается константой. Наступлению предельного состояния (разрушению) соответствует знак равенства в выражении (1), а критическое напряжение σ_e , при котором в наиболее напряженной точке тела достига-

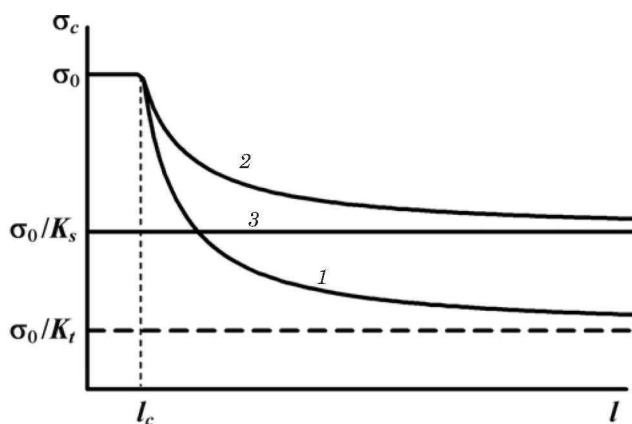


Рис. 1. Диаграммы разрушения при хрупком (1), квази-хрупком (2) и вязком (3) разрушении

ется предельное состояние, определяется выражением

$$\sigma_c = \sigma_0/K_t, \quad (2)$$

где K_t — коэффициент концентрации упругих напряжений, характеризующий отношение эквивалентного напряжения σ_e в наиболее напряженной точке тела к приложенному напряжению σ .

Для упругопластического тела коэффициент концентрации напряжений $K_s < K_t$ вследствие перераспределения упругих напряжений в пластической зоне (зоне предразрушения). Коэффициент K_s определяют из решения упругопластической задачи. Соответствующее значение критического напряжения показано на рис. 1 (прямая 3). В соответствии с традиционным подходом к расчету на прочность разрушающее напряжение не зависит от размера концентратора напряжений, масштабный эффект отсутствует. Разрушение образца с вырезом любого размера l происходит при одних и тех же напряжениях $\sigma_c < \sigma_0$.

В соответствии с современными представлениями о реальном твердом теле, обладающем изначальной дефектностью, малые искусственные дефекты, размеры которых сопоставимы с размерами структурных составляющих материала, не оказывают влияния на его прочность до тех пор, пока их размеры не достигнут определенного (критического) значения. После достижения концентратором напряжений критического размера l_c разрушающее напряжение уменьшается с ростом l , асимптотически приближаясь к теоретическому значению σ_0/K_t (см. рис. 1, кривая 1), рассчитанному по формуле (2) при хрупком разрушении, или к значению σ_0/K_s (см. рис. 1, кривая 2) при квазихрупком разрушении.

В первом случае материал ведет себя упруго вплоть до разрушения, демонстрирует выраженный масштабный эффект и разрушается без об-

разования пластических (необратимых) деформаций в зоне концентрации напряжений. Квазихрупкое разрушение характеризуется образованием зоны поврежденности (пластичности). Если размер зоны поврежденности d сопоставим с размерами структурных составляющих материала, то его пластические свойства проявляются слабо и разрушение носит хрупкий характер. Но с увеличением d пластические свойства проявляются сильнее, характер разрушения меняется и масштабный эффект проявляется в меньшей степени. В пределе, когда размер зоны поврежденности намного превышает размер структуры материала, имеем обычное вязкое разрушение упругопластического тела, при этом d пропорционален l , масштабный эффект отсутствует (см. рис. 1, прямая 3).

В настоящее время для описания квазихрупкого разрушения широко используют модели когезионной зоны или когезионной трещины [7–13]. Под когезионной зоной понимают область, в которой силы сцепления между частицами материала слабее, чем в основном материале. Закон ослабления (softening law) задается априори. Обычно когезионная зона представляется в виде математического разреза (трещины), по берегам которого действуют нормальные силы, имитирующие силы сцепления. Для расчета разрушающего напряжения используют аппарат механики трещин. Модель когезионной трещины представляет собой логическое развитие модели фиктивной трещины.

В результате распространения когезионных моделей сложилось упрощенное представление о моделях квазихрупкого и хрупкого разрушения по принципу использования или неиспользования в них в явном виде закона ослабления. Не вдаваясь в вопросы физической адекватности различных (в том числе когезионных) моделей разрушения, заметим, что не существует принципиальных ограничений на использование других (некогезионных) моделей для описания квазихрупкого разрушения. Стоит упомянуть модели с затуплением вершины выреза в результате образования зоны поврежденности [14, 15] или модели с деградацией упругих свойств материала в той же зоне [16].

Для расчета разрушающего напряжения большое значение имеют не только вид критерия и соответствующая вычислительная процедура, но и правильное определение параметров критерия, прежде всего размера зоны предразрушения. В дальнейшем под квазихрупким разрушением будем понимать внезапное распространение неустойчивой трещины (характерное также для хрупкого разрушения), сопровождающееся образованием значительной зоны предразрушения. При этом размер зоны предразрушения d

будем сравнивать не с размером трещины, как это принято в механике трещин [7, 8], а с характерным размером структуры материала d_0 . Если $d = d_0$, будем говорить о хрупком разрушении, если $d \gg d_0$, — о вязком разрушении. Размер d_0 — это, по сути, размер представительного объема материала, т.е. минимального объема, в котором осредненные напряжения могут быть рассчитаны по теории упругости. Поэтому перераспределение напряжений в пределах d_0 не связано с пластической (в макроскопическом смысле) деформацией материала. Пластические свойства материала проявляются при $d > d_0$ и тем сильнее, чем d больше d_0 . С учетом этого представим d в следующем виде:

$$d = d_0 + \beta L_e, \quad (3)$$

где L_e — размер зоны концентрации напряжений; β — безразмерный параметр, характеризующий пластичность материала. Для хрупких материалов $\beta = 0$, для пластичных материалов $\beta \gg 1$. При $\beta \approx 1$ материал характеризуется умеренными пластическими свойствами.

При вязком разрушении критическое напряжение не зависит от размера концентратора напряжений, поэтому размер зоны поврежденности пропорционален размеру концентратора и, соответственно, размеру L_e (при неизменных граничных условиях). При хрупком разрушении, напротив, размер зоны поврежденности не зависит от размера концентратора напряжений и определяется структурой материала.

При сжатии разрушающее напряжение, характеризующее образование трещин отрыва у выреза, имеет вид, аналогичный показанному на рис. 1, с той лишь разницей, что роль коэффициента концентрации напряжений выполняет отношение предела прочности материала при сжатии к пределу прочности при растяжении. При малых значениях L_e материал не чувствует присутствия концентратора напряжений и разрушается как гладкий образец при достижении критическим давлением предела прочности при сжатии C_0 . После достижения критического размера концентратора разрушающее давление p_c уменьшается, асимптотически приближаясь к пределу прочности T_0 материала при растяжении в случае хрупкого разрушения и к напряжению T_s ($C_0 > T_s > T_0$) в случае вязкого разрушения (рис. 2).

Рассмотрим известные нелокальные критерии с учетом изложенных выше представлений о формировании зоны поврежденности.

Критерий средних напряжений

Из нелокальных критериев наибольшее распространение получил критерий средних напря-

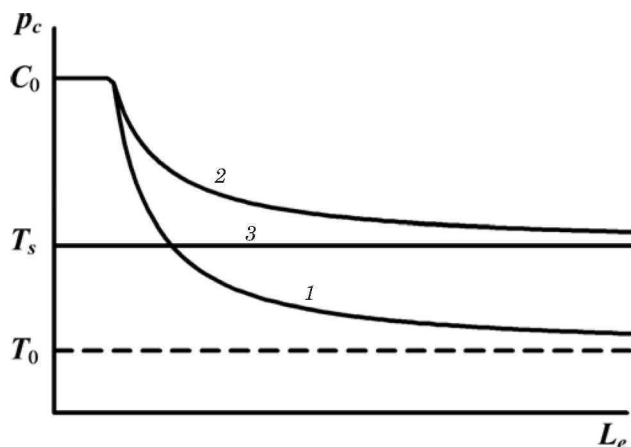


Рис. 2. Зависимость критического давления от размера зоны концентрации напряжений при хрупком (1), квази-хрупком (2) и вязком (3) разрушении

жений, или интегральный критерий, который имеет вид

$$\langle \sigma_e \rangle_d < \sigma_0, \quad (4)$$

где
$$\langle \sigma_e \rangle_d = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_e(x) dx \quad (5)$$

усредненное на расстоянии d по опасному сечению значение эквивалентного напряжения.

Для хрупких материалов размер усреднения d полагают константой материала, характеризующей его структуру:

$$d = d_0 = \text{const.} \quad (6)$$

Критическое давление для образца с круговым отверстием [1]

$$p_c = \chi C_0 \frac{(1 + 2d/l)^3}{1 + d/l}, \quad l > l_c, \quad (7)$$

где $\chi = T_0/C_0$; l — диаметр отверстия; l_c — критический диаметр отверстия. Для описания квази-хрупкого разрушения значение d определим по формуле (3), в которой размер зоны концентрации напряжений

$$L_e = \frac{\sigma_e}{|\text{grad} \sigma_e|}. \quad (8)$$

Распределение нормального напряжения вдоль линии приложения нагрузки имеет вид [17]

$$\sigma_y = \frac{p}{2} \left(3 \frac{a^4}{x^4} - \frac{a^2}{x^2} \right), \quad (9)$$

где p — приложенное сжимающее напряжение (давление); a — радиус отверстия. Начало ко-

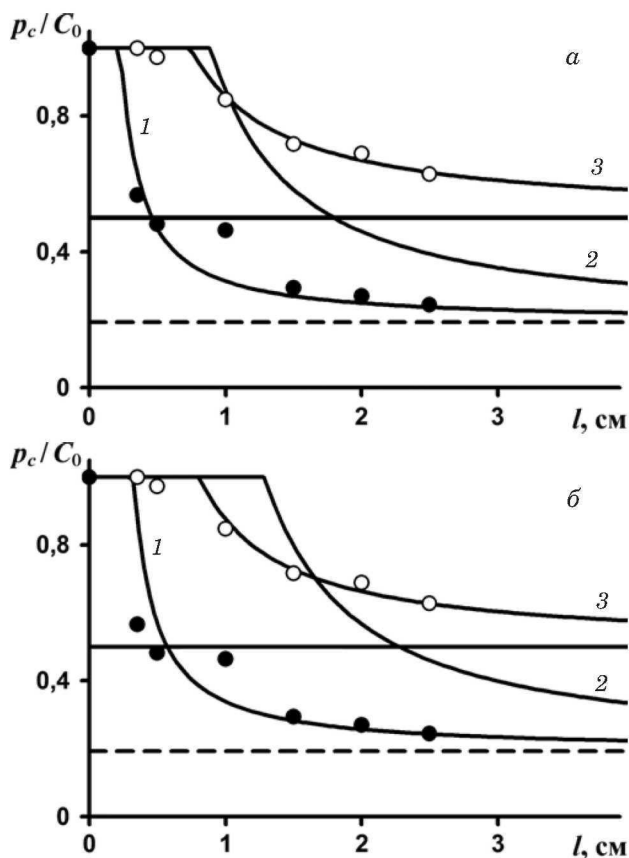


Рис. 3. Зависимости критического давления от диаметра отверстия: точки — экспериментальные данные; кривые 1, 2, 3 — расчет по критерию средних напряжений (а) и по критерию фиктивной трещины (б)

ординат выбрано в центре отверстия, напряжение p принято положительным. Размер зоны концентрации напряжений, рассчитанный по формуле (8) с учетом (9), составил $L_e = l/10$. Критическое давление получим, подставив (3) в (7) с учетом оценки L_e :

$$p_c = \chi C_0 \frac{(1 + 2d_0/l + 0,2\beta)^3}{1 + d_0/l + 0,1\beta}. \quad (10)$$

При $l \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{(1 + 0,2\beta)^3}{1 + 0,1\beta}. \quad (11)$$

Проведена экспериментальная проверка возможности применения критерия средних напряжений к оценке образования трещин отрыва при сжатии. В качестве модельного материала использовали дигидрат сульфата кальция (двухводный гипс), приготовленный из водного раствора строительного гипса. Наряду с полуводным сульфатом кальция строительный гипс уже содержит в своем составе определенную долю двухводного сульфата кальция, который не уча-

ствует в реакции гидратации при изготовлении образцов и фактически играет роль заполнителя. Были изготовлены две партии образцов: одна из гипсового материала с высоким (более 90 %) содержанием полуводного сульфата кальция (гипс 1); вторая — из гипсового материала с низким (в пределах 60 – 70 %) содержанием полуводного сульфата кальция в исходном составе (гипс 2).

Образование трещин отрыва в зонах концентрации напряжений исследовали на образцах, содержащих центральные круговые отверстия различного диаметра и подверженных одноосному сжатию со скоростью 0,5 мм/мин. Образцы представляли собой квадратные плиты размером 200×200 мм и толщиной 30 – 35 мм. Диаметр отверстия изменяли от 3,5 до 25 мм. На контур отверстия наносили графитовые датчики электропроводности. Трещины отрыва регистрировали по диаграммам изменения электропроводности графитовых датчиков в процессе нагружения образца. Методика проведения эксперимента описана в работе [18].

Образцы из гипса 1 имели хрупкий характер разрушения. Формирование трещин отрыва на контуре кругового отверстия носило внезапный характер для всех исследованных диаметров отверстий, протяженность трещин в момент образования составляла 5 – 6 см. С увеличением диаметра отверстия наблюдалось снижение величины критического давления в момент образования трещин, дальнейшее развитие трещин приводило к разрушению образца путем раскалывания на две части. Формирование трещин отрыва на контуре кругового отверстия диаметром 10 мм и более в образцах из гипса 2 происходило постепенно, что характерно для вязкого разрушения. После образования удаленных от контура отверстия трещин раскрытие первичных трещин отрыва уменьшалось, их рост прекращался, на дальнейший процесс разрушения образца они влияния не оказывали.

На рис. 3, а представлены экспериментальные значения (темные точки) нагрузки в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия в зависимости от его диаметра, полученные на образцах из гипса 1, и результаты расчета критического давления (кривая 1) по формуле (10) при $\beta = 0$. Величина $d_0 = 1,1$ мм оказалась сопоставимой с размером наиболее крупных пор. Штриховую прямую рассчитывали согласно традиционному подходу. Здесь же приведены экспериментальные данные (светлые точки) и результаты расчета для гипса 2 при значениях $\beta = 0$ (кривая 2) и $\beta = 2,5$ (кривая 3). В первом случае размер d_0 составил 4,5 мм, во втором — 2 мм. В соответствии с формулой (11) в первом случае

напряжение $T_s = T_0$, во втором — $T_s = 2,7T_0$ (сплошная прямая).

Рис. 3, а иллюстрирует существенный масштабный эффект, т.е. влияние диаметра отверстия на локальную прочность материала. С его уменьшением критическое давление возрастает, достигая предела прочности на сжатие, с увеличением — асимптотически приближается к пределу прочности на растяжение T_0 для гипса 1 и к напряжению T_s — для гипса 2. Такое поведение хорошо описывается модифицированным критерием средних напряжений, в котором размер усреднения d определяется по формуле (3).

Критерий фиктивной трещины

Критерий фиктивной трещины основан на моделировании зоны предразрушения в виде трещины, исходящей из вершины концентратора. Для трещины, находящейся в неоднородном поле напряжений, рассчитывается коэффициент интенсивности напряжений и применяется подход линейной механики разрушения, в соответствии с которым наступление предельного состояния (рост трещины) связывают с достижением коэффициентом интенсивности напряжений критического значения. Начальную длину трещины d полагают константой материала. Критическое давление для образца с круговым отверстием определяется выражением [2]

$$p_c = \chi C_0 \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2d}{l} \right)^{-3/2} + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{2d}{l} \right)^{-7/2} \left(1 + \frac{d}{l} + \frac{d^2}{2l^2} \right) \right]^{-1}. \quad (12)$$

Подставив (3) в (12) с учетом сделанной выше оценки для L_e , для квазихрупкого материала получим

$$p_c = \chi C_0 \left[-\frac{1}{2} \left(1 + 0,2\beta + \frac{2d_0}{l} \right)^{-3/2} + \frac{3}{2} \left(1 + 0,2\beta + \frac{2d_0}{l} \right)^{-7/2} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + 0,1\beta + \frac{d_0}{l} + \frac{1}{2} \left(0,1\beta + \frac{d_0}{l} \right)^2 \right) \right]^{-1}. \quad (13)$$

При $l \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{T_s}{T_0} = \left[-\frac{1}{2} (1 + 0,2\beta)^{-3/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} (1 + 0,2\beta)^{-7/2} \left(1 + 0,1\beta + \frac{1}{2} (0,1\beta)^2 \right) \right]^{-1}. \quad (14)$$

На рис. 3, б представлены экспериментальные значения (темные точки) величины нагрузки в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия в зависимости от его диаметра, полученные на образцах из гипса 1, и результаты расчета критического давления (кривая 1) по формуле (13) при $\beta = 0$. Размер d_0 составил 0,8 мм. Штриховую прямую рассчитывали согласно традиционному подходу. Здесь же приведены экспериментальные данные (светлые точки) и результаты расчета для гипса 2 при значениях $\beta = 0$ (кривая 2) и $\beta = 1,45$ (кривая 3). В первом случае размер d_0 составил 3,3 мм, во втором — 0,9 мм. В соответствии с формулой (14) в первом случае напряжение $T_s = T_0$, во втором — $T_s = 2,7T_0$ (сплошная прямая).

Результаты эксперимента хорошо описываются модифицированным критерием фиктивной трещины, в котором длина фиктивной трещины d определяется по формуле (3).

Выводы

1. Разработаны новые нелокальные критерии разрушения, являющиеся развитием критериев средних напряжений и фиктивной трещины. Критерии содержат комплексный параметр, характеризующий размер зоны предразрушения и учитывающий не только структуру материала, но также пластические свойства материала, геометрию образца и условия его нагружения.

2. Показано (см. рис. 3), что экспериментальные данные, полученные при хрупком (гипс 1) и вязком (гипс 2) характерах распространения трещины отрыва от кругового отверстия при сжатии, хорошо описываются модифицированными нелокальными критериями, в которых изменение размера зоны предразрушения оценивается в соответствии с выражением (3). В первом случае параметр пластичности β равен нулю, во втором — определяется асимптотическим значением критического давления при больших размерах отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сукнев С. В. Критерий средних напряжений: преимущества и ограничения / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т. 74. № 2. С. 52 – 56.
2. Сукнев С. В. Критерий фиктивной трещины: преимущества и ограничения / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2009. Т. 75. № 10. С. 45 – 51.
3. Левин В. А., Морозов Е. М. Нелокальные критерии для определения зоны предразрушения при описании роста дефекта при конечных деформациях / ДАН. 2007. Т. 415. № 1. С. 52 – 54.
4. Матвиенко Ю. Г. Диаграммы трещиностойкости в связи со сжатием деформаций у вершины трещины и выреза / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2008. Т. 74. № 10. С. 55 – 60.

5. **Матвиенко Ю. Г.** Несингулярные T -напряжения в проблемах двухпараметрической механики разрушения / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78. № 2. С. 51 – 58.
6. **Матвиенко Ю. Г.** Моделирование кинетики развития трещин в поверхностных слоях материала / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. Т. 83. № 1. Ч. I. С. 65 – 71.
7. **Корнев В. М., Зиновьев А. А.** Модель квазихрупкого разрушения горных пород / ФТПРПИ. 2013. № 4. С. 74 – 82.
8. **Панасюк В. В.** Механика квазихрупкого разрушения материалов. — Киев: Наукова думка, 1991. — 416 с.
9. **Elices M., Guinea G. V., Gómez J., Planas J.** The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges / Eng. Fract. Mech. 2002. Vol. 69. N 2. P. 137 – 163.
10. **Gómez F. J., Elices M.** A fracture criterion for blunted V-notched samples / Int. J. Fract. 2004. Vol. 127. N 3. P. 239 – 264.
11. **Wnuk M. P.** New mathematical models pertinent to material fracture at meso- and nanoscales / Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12. № 4. С. 71 – 77.
12. **Корнев В. М.** Критические кривые разрушения и эффективный диаметр структуры хрупких и квазихрупких материалов / Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 5. С. 25 – 34.
13. **Астапов Н. С.** Модифицированная модель зоны предразрушения квазихрупких структурированных материалов / Физическая мезомеханика. 2014. Т. 17. № 1. С. 89 – 96.
14. **Полилов А. Н.** Схема предразрушения композитов около отверстий / Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1982. № 3. С. 110 – 117.
15. **Berto F., Lazzarin P., Radaj D.** Fictitious notch rounding concept applied to V-notches with root hole subjected to in-plane mixed mode loading / Eng. Fract. Mech. 2014. Vol. 128. P. 171 – 188.
16. **Tan S. C.** A progressive failure model for composite laminates containing openings / J. Compos. Mater. 1991. Vol. 25. N 5. P. 556 – 577.
17. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 2. — М.: Наука, 1984. — 560 с.
18. **Сукнев С. В., Елшин В. К., Новопашин М. Д.** Экспериментальное моделирование процессов трещинообразования в образцах горных пород с отверстием / ФТПРПИ. 2003. № 5. С. 47 – 54.
3. **Levin V. A., Morozov E. M.** Nonlocal criteria for determining a prefracture zone in the process of defect growth for finite strains / Dokl. Phys. 2007. Vol. 52. N 7. P. 391 – 393.
4. **Matvienko Yu. G.** Crack Resistance Diagrams Adaptive to strain constraint at the Tip of crack and Notch / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2008. Vol. 74. N 10. P. 55 – 60 [in Russian].
5. **Matvienko Yu. G.** Nonsingular T -stress in problems of two-parameter fracture mechanics / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2012. Vol. 78. N 2. P. 51 – 58 [in Russian].
6. **Matvienko Yu. G.** Modeling of the crack growth kinetics in the surface layers of materials / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2017. Vol. 83. N 1. Part I. P. 65 – 71 [in Russian].
7. **Kornev V. M., Zinov'ev A. A.** Quasi-brittle rock failure model / Journal of Mining Science. 2013. Vol. 49. N 4. P. 576 – 582.
8. **Panasjuk V. V.** Quasi-brittle fracture mechanics of materials. — Киев: Naukova dumka, 1991. — 416 p. [in Russian].
9. **Elices M., Guinea G. V., Gómez J., Planas J.** The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges / Eng. Fract. Mech. 2002. Vol. 69. N 2. P. 137 – 163.
10. **Gómez F. J., Elices M.** A fracture criterion for blunted V-notched samples / Int. J. Fract. 2004. Vol. 127. N 3. P. 239 – 264.
11. **Wnuk M. P.** New mathematical models pertinent to material fracture at meso- and nanoscales / Fiz. Mezomekh. 2009. Vol. 12. N 5 – 6. P. 263 – 268.
12. **Kornev V. M.** Critical fracture curves and effective structure diameter for brittle and quasibrittle materials / Fiz. Mezomekh. 2013. Vol. 16. N 5. P. 25 – 34 [in Russian].
13. **Astapov N. S.** Modified prefracture zone model for structured quasibrittle material / Fiz. Mezomekh. 2014. Vol. 17. N 1. P. 89 – 96 [in Russian].
14. **Polilov A. N.** Prefracture pattern of composites near the holes / Izv. AN SSSR. Mekh. Tv. Tela. 1982. N 3. P. 110 – 117 [in Russian].
15. **Berto F., Lazzarin P., Radaj D.** Fictitious notch rounding concept applied to V-notches with root hole subjected to in-plane mixed mode loading / Eng. Fract. Mech. 2014. Vol. 128. P. 171 – 188.
16. **Tan S. C.** A progressive failure model for composite laminates containing openings / J. Compos. Mater. 1991. Vol. 25. N 5. P. 556 – 577.
17. **Sedov L. I.** Mechanics of continua. Vol. 2. — Moscow: Nauka, 1984. — 560 p. [in Russian].
18. **Suknev S. V., Elshin V. K., Novopashin M. D.** Experimental investigation into processes of crack formation in rock samples with hole / Journal of Mining Science. 2003. Vol. 39. N 5. P. 460 – 466.

REFERENCES