

УДК 620.169:621.743.43

НАПРЯЖЕНИЯ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕЙ С КОЛЬЦЕВЫМИ ТРЕЩИНАМИ

© Д. С. Добровольский¹*Статья поступила 22 июня 2015 г.*

Ресурс работы элементов конструкции при переменном или длительном нагружении включает долговечность до образования трещины в надрезе, стадии живучести и окончательного разрушения. Для повышения надежности прогнозирования их безопасной работы напряженно-деформированное состояние в надрезах и трещинах целесообразно определять, используя единые аналитические подходы. В работе на основе упругих решений Г. Нейбера для кольцевых надрезов и развития энергетического метода оценки концентрации напряжений и упругопластических деформаций в надрезах предложен метод расчета полей местных напряжений и упругопластических деформаций в нетто-сечении стержней с кольцевыми трещинами при растяжении, изгибе или кручении. Сравнение результатов расчета по предлагаемым соотношениям и экспериментально-аналитическому методу Н. А. Махутова показало возможность применения метода в инженерной практике.

Ключевые слова: стержень; кольцевая трещина; диаграмма упругопластического деформирования материала; оценка приемлемости метода.

Кольцевые трещины возникают, например, в выточках, резьбах, переходах диаметров при переменном растяжении стержней, изгибе с вращением и кручении валов и являются причиной их разрушения. Напряженно-деформированное состояние (НДС) в окрестности трещин необходимо знать, в частности, при оценке живучести и трещиностойкости элементов конструкций.

В данной работе предложен метод расчета полей местных напряжений и упругопластических деформаций в нетто-сечении стержней с кольцевыми трещинами при растяжении, изгибе или кручении. В его основу положены упругие решения соответствующих задач [1, 2], теория упругопластических деформаций [3], инвариантные от траектории пропорционального нагружения диаграммы упругопластического деформирования материала в интенсивностях действительных и номинальных напряжений и деформаций, аппроксимированные линейными и степенными функциями

$$\sigma_i = \sigma_{iT} e_i / e_{iT} \text{ при } \sigma_i \leq \sigma_{iT}, \quad \sigma_i = \sigma_{iT} \left(\frac{e_i}{e_{iT}} \right)^{m_i} \text{ при } \sigma_i \geq \sigma_{iT},$$

$$\sigma_{iH} = \sigma_{iT} e_{iH} / e_{iT} \text{ при } \sigma_{iH} \leq \sigma_{iT},$$

$$\sigma_{iH} = \sigma_{iT} \left(\frac{e_{iH}}{e_{iT}} \right)^{m_i} \text{ при } \sigma_{iH} \geq \sigma_{iT} \quad (1)$$

(σ_{iT} , e_{iT} — интенсивности напряжений и деформаций, соответствующие схематизированному пределу теку-

чести; m_i — показатель упрочнения), а также предложенный для надрезов и развитый здесь применительно к трещинам энергетический метод оценки концентрации напряжений и упругопластических деформаций [4], метод переменных параметров упругости [5].

В соответствии с [2] представим коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) для условно мелкой ($0 < \lambda \leq 0,5$) и глубокой ($0,5 \leq \lambda < 1$) трещин: при растяжении

$$K_{1M} = (1-\lambda)\sigma_H \sqrt{\pi l}, \quad K_{1T} = 0,5 \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \sigma_H \sqrt{\pi l}; \quad (2)$$

при изгибе

$$K_{1M} = (1-0,5\lambda)(1-\lambda)\sigma_H \sqrt{\pi l}, \quad K_{1T} = 0,375 \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \sigma_H \sqrt{\pi l}; \quad (3)$$

при кручении

$$K_{3M} = (1-0,5\lambda)(1-\lambda)\tau_H \sqrt{\pi l}, \quad K_{3T} = 0,375 \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \tau_H \sqrt{\pi l}, \quad (4)$$

где l , $\lambda = l/(l+a)$ — абсолютная и относительная глубина трещины; a — радиус нетто-сечения стержня; σ_H , τ_H — номинальные нетто-напряжения, вычисляемые по формулам сопротивления материалов.

Для определения напряжений стержней с трещинами развивали решения [1], полученные для кольцевых надрезов, характеризуемых отношением радиуса a нетто-сечения к радиусу кривизны ρ в вершине надреза. При этом [1] начало координат расположено в центре тяжести нетто-сечения. Так, при растяжении стержня с кольцевым надрезом из решения [1,

¹ Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова, г. Ижевск, Россия; e-mail: s-dobrov@mail.ru

с. 99] следуют соответственно осевые, окружные и радиальные напряжения:

$$\sigma_{ze} = \frac{K}{\cos \nu} + \frac{D + C \cos^2 \nu}{\cos^3 \nu}, \quad (5)$$

$$\sigma_{\varphi e} = \frac{1}{\cos \nu} \left[\frac{A}{1 + \cos \nu} - B + 0,5Z(1 + \cos \nu) \right], \quad (6)$$

$$\sigma_{re} = \frac{1}{\cos \nu} \left(E - \frac{A}{1 + \cos \nu} \right) + \frac{1}{\cos^2 \nu} (F - C \cos^3 \nu), \quad (7)$$

где $\nu = \arcsin\left(\frac{x}{a} \sin \nu_0\right)$; x — гиперболическая и линейная координаты рассматриваемой точки нетто-сечения надреза; $\nu_0 = \arctg \sqrt{a/\rho}$; $\alpha = 1,4$; $A = (\alpha - 1)(1 + \cos \nu_0)$; $B = A - C \cos^2 \nu_0$; $D = B - A$; $F = A - B$; $K = B - (1 + \alpha)C$; $C = -0,5\sigma_{\text{н}}(2 + \cos^2 \nu_0)/[1 + (2 - \alpha)\cos \nu_0 + \cos^2 \nu_0]$; $Z = (\alpha - 2)C$.

При анализе напряжений в окрестности трещины начало прямоугольных координат располагают в ее вершине [6, с. 136], а положение рассматриваемой точки нетто-сечения задают расстоянием $r = a - x$ до вершины трещины, следовательно, $\nu = \arcsin[(1 - r/a)\sin \nu_0]$. С учетом [6, с. 137] и соотношений (2), используя (5) – (7) при $a/\rho \rightarrow \infty$ и $\mu = 0,3$, получаем осевые, окружные и радиальные напряжения в рассматриваемой точке нетто-сечения при растяжении стержня с трещиной:

$$\sigma_{ze} = \sigma_{1e} = \frac{K_{1p}}{\sqrt{2\pi r}} f_1\left(\frac{r}{a}\right), \quad \sigma_{\varphi e} = \sigma_{2e} = \sigma_{1e} f_2(r/a),$$

$$\sigma_{re} = \sigma_{3e} = \sigma_{\text{н}} f_3(r/a), \quad f_1\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-r/2a}},$$

$$f_2\left(\frac{r}{a}\right) = 0,3 \left[1 + \sqrt{\frac{r(2-r/a)}{a}} \right] + \frac{0,4 \sqrt{\frac{r(2-r/a)}{a}}}{1 + \sqrt{\frac{r(2-r/a)}{a}}},$$

$$f_3\left(\frac{r}{a}\right) = 0,5 \sqrt{\frac{r(2-r/a)}{a}} - \frac{0,2 \sqrt{\frac{r(2-r/a)}{a}}}{1 + \sqrt{\frac{r(2-r/a)}{a}}}, \quad \frac{r}{a} = \frac{\lambda r}{(1-\lambda)l}, \quad (8)$$

где σ_{1e} , σ_{2e} , σ_{3e} — главные напряжения при упругом деформировании.

С учетом соотношений (3) и решения [1, с. 104] аналогичным образом определим осевые, окружные и радиальные напряжения для изгиба стержня с кольцевой трещиной ($a/\rho \rightarrow \infty$):

$$\sigma_{ze} = \sigma_{1e} = \frac{K_{1\text{н}}}{\sqrt{2\pi r}} f_1\left(\frac{r}{a}\right), \quad \sigma_{\varphi e} = \sigma_{2e} = \sigma_{1e} f_2(r/a),$$

$$\sigma_{re} = \sigma_{3e} = 0,75(1 - r/a)f_3(r/a)\sigma_{\text{н}}. \quad (9)$$

Интенсивности напряжений и упругих деформаций составят:

$$\sigma_{ie} = \sqrt{\sigma_{ze}^2 + \sigma_{\varphi e}^2 + \sigma_{re}^2 - \sigma_{ze}\sigma_{\varphi e} - \sigma_{\varphi e}\sigma_{re} - \sigma_{re}\sigma_{ze}},$$

$$e_{ie} = \sigma_{ie} e_{i\text{т}} / \sigma_{i\text{т}}. \quad (10)$$

Из решения [1, с. 108] с учетом соотношений (4) получим местные напряжения при кручении стержня с трещиной в упругом состоянии:

$$\tau_e = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} f_k\left(\frac{r}{a}\right), \quad f_k\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1-r/a}{1-r/2a},$$

$$\sigma_{ie} = \sqrt{3}\tau_e, \quad e_{ie} = \sigma_{ie} e_{i\text{т}} / \sigma_{i\text{т}}. \quad (11)$$

В соответствии с [4] интенсивности местных напряжений σ_i и упругопластических деформаций e_i в рассматриваемой точке нетто-сечения взаимосвязаны с аналогичными величинами в предположении упругого деформирования (σ_{ie} , e_{ie}) таким образом:

$$\sigma_{iei} = \sigma_{ie} e_{ie} F. \quad (12)$$

При номинально упругом деформировании ($\sigma_{\text{иН}} \leq \sigma_{i\text{т}}$)

$$F = 0,5(1 + m_i) + \frac{0,5(1 - m_i)}{(\sigma_{ie} / \sigma_{i\text{т}})^2}, \quad (13)$$

$$\sigma_i = \sigma_{\text{иН}} \left[\left(\frac{\sigma_{ie}}{\sigma_{\text{иН}}} \right)^2 F \right]^{1+m_i} \left(\frac{\sigma_{\text{иН}}}{\sigma_{i\text{т}}} \right)^{\frac{m_i-1}{m_i+1}}, \quad (14)$$

$$e_i = e_{\text{иН}} \left[\left(\frac{\sigma_{ie}}{\sigma_{\text{иН}}} \right)^2 F \right]^{\frac{1}{1+m_i}} \left(\frac{\sigma_{\text{иН}}}{\sigma_{i\text{т}}} \right)^{\frac{1-m_i}{1+m_i}}. \quad (15)$$

Для номинального упругопластического деформирования ($\sigma_{\text{иН}} \geq \sigma_{i\text{т}}$)

$$F = 1 - \frac{0,5(1 - m_i)\sigma_{i\text{т}} e_{i\text{т}}}{u_{\text{иН}F}} \left[1 - \left(\frac{\sigma_{\text{иН}}}{\sigma_{ie}} \right)^2 \right], \quad (16)$$

$$\sigma_i = \sigma_{\text{иН}} \left[\left(\frac{\sigma_{ie}}{\sigma_{\text{иН}}} \right)^2 F \right]^{\frac{m_i}{1+m_i}}, \quad e_i = e_{\text{иН}} \left[\left(\frac{\sigma_{ie}}{\sigma_{\text{иН}}} \right)^2 F \right]^{\frac{1}{1+m_i}}, \quad (17)$$

где номинальная энергия изменения формы

$$u_{\text{иН}F} = \int_0^{e_{\text{иН}}} \sigma_{\text{иН}} de_{\text{иН}} = 0,5\sigma_{\text{иН}} e_{\text{иН}} \left[1 + \frac{2}{1+m_i} \left(\frac{\sigma_{\text{иН}} e_{\text{иН}}}{\sigma_{i\text{т}} e_{i\text{т}}} - 1 \right) \right]. \quad (18)$$

В качестве примера на рис. 1 представлены функции (13) и (16) для $\sigma_{ie}/\sigma_{\text{иН}} = 4$ в зависимости от относи-

тельной интенсивности номинальных деформаций $\bar{e}_{in} = e_{in}/e_{it}$ для значений показателя упрочнения $0 \leq m_i \leq 1$. При упругом деформировании $F \equiv 1$. В случае упругопластического деформирования при $\bar{e}_{in} = 1$ и $0 \leq m_i \leq 1$ значения $0,5 < F \leq 1$. Для глубокого пластического деформирования ($\bar{e}_{in} \rightarrow \infty$) функция $F \rightarrow 1$.

При переходе от упругого к местному пластическому деформированию отношения главных напряжений $\bar{\sigma}_2 = \sigma_2/\sigma_1$ и $\bar{\sigma}_3 = \sigma_3/\sigma_1$ вблизи вершины трещины изменяются. Для определения $\bar{\sigma}_3$ рекомендуется использовать упругие решения (8) и (9), а для получения $\bar{\sigma}_2$ реализуется предложение Г. Нейбера [1] о выполнении в концентраторе условия местной плоской деформации для «дополнительного» напряжения

$$\bar{\sigma}_2 = \mu_* (1 + \bar{\sigma}_3) - \frac{\mu E_*}{E(\sigma_i/\sigma_{in})}. \quad (19)$$

С учетом этого представим главные напряжения в виде

$$\sigma_1 = \sigma_z = \frac{\sigma_i}{\sqrt{0,5[(1 - \bar{\sigma}_2)^2 + (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3)^2 + (\bar{\sigma}_3 - 1)^2]}},$$

$$\sigma_2 = \sigma_\varphi = \bar{\sigma}_2 \sigma_1, \quad \sigma_3 = \sigma_r = \bar{\sigma}_3 \sigma_1. \quad (20)$$

Для установления взаимосвязей главных напряжений σ_j ($j = 1, 2, 3$) и упругопластических деформаций e_j используем метод переменных параметров упругости [5]:

$$e_1 = [\sigma_1 - \mu_*(\sigma_2 + \sigma_3)]/E_*, \dots (1; 2; 3), \quad (21)$$

где (1; 2; 3) — знак круговой перестановки индексов. Переменные параметры упругости определим по формулам

$$\mu_* = \frac{0,5 - (0,5 - \mu)\bar{\sigma}_i / (1 + \mu)\bar{e}_i}{1 + (0,5 - \mu)\bar{\sigma}_i / (1 + \mu)\bar{e}_i},$$

$$E_* = \frac{3\bar{\sigma}_i / 2(1 + \mu)\bar{e}_i}{1 + (0,5 - \mu)\bar{\sigma}_i / (1 + \mu)\bar{e}_i} E, \quad (22)$$

где $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/\sigma_{it}$, $\bar{e}_i = e_i/e_{it}$.

Для реализации метода проводили испытания на растяжение цилиндрических образцов из стали 45. В результате обработки эксперимента получено: $\sigma_r = 480$ МПа; $\sigma_b = 675$ МПа; $\delta = 6,7$ %; $\psi = 46,2$ %; $E = 2,04 \cdot 10^5$ МПа. Для определения параметров аппроксимации (1) в широком диапазоне упругопластических деформаций использовали методику работы [6, с. 15, 18]: $\sigma_{it} = \sigma_r = 480$ МПа; $e_{it} = 2(1 + \mu)\sigma_r/3E = 0,204$ %; $S_k = (1 + 1,4\psi)\sigma_b = 1112$ МПа; $e_k = \ln(1 - \psi)^{-1} = 62$ %; $m_i = \frac{\lg(S_k/\sigma_{it})}{\lg(e_k/e_{it})} = 0,147$.

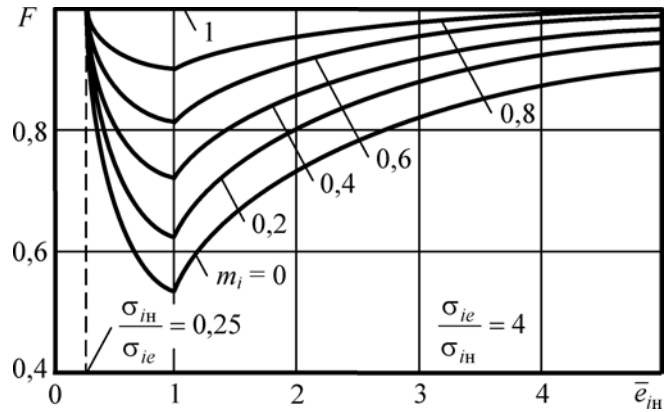


Рис. 1. Зависимость функции F от относительной интенсивности номинальных деформаций для различных значений показателя упрочнения

Исходные данные для расчетов НДС: относительная глубина трещины $\lambda = 0,5$; номинальное НДС — $\sigma_{in} = 0,5\sigma_{it} = 240$ МПа, $e_{in} = 0,5e_{it} = 0,102$ %; $\tau_n = \sigma_{in}/\sqrt{3} = 139$ МПа, $\gamma_n = \sqrt{3}e_{in} = 0,177$ %.

Используя условие пластичности $\sigma_{ie} = \sigma_{it}$ и решения (8) – (11), вычисляли относительный размер пластических зон $(r/a)_p$, который при растяжении составил 0,023; изгибе — 0,013; кручении — 0,013. Затем по соотношениям (8), (9), (11) и закону Р. Гука находили местные напряжения и деформации для упругих областей нетто-сечений. В частности, для указанных значений $(r/a)_t$ при растяжении получено $\sigma_{1T} = 562$, $\sigma_{2T} = 223$, $\sigma_{3T} = 12$ МПа, $e_{1T} = 0,241$, $e_{2T} = 0,025$, $e_{3T} = -0,109$ %; изгибе — $\sigma_{1T} = 558$, $\sigma_{2T} = 216$, $\sigma_{3T} = 9$ МПа, $e_{1T} = 0,240$, $e_{2T} = 0,022$, $e_{3T} = -0,109$ %; кручении — $\sigma_T = 277$ МПа, $\sigma_T = 0,347$ %.

Для пластически деформированной зоны НДС рассматривали в двух характерных точках: вблизи вершины трещины при $r/a = 10^{-3}$, $l/r = 10^3$ и в промежуточной точке при $r/a = 5 \cdot 10^{-3}$, $l/r = 200$.

Растяжение. Для точки с $r/a = 10^{-3}$ и $l/r = 10^3$ по соотношениям (8) и (10) получали главные напряжения $\sigma_{1e} = 2683$, $\sigma_{2e} = 885$, $\sigma_{3e} = 3$ МПа и их интенсивность $\sigma_{ie} = 2366$ МПа в предположении упругого деформирования. Используя (13) – (15), вычисляли значения $F = 0,591$; интенсивности напряжений $\sigma_i = 677$ МПа и упругопластических деформаций $e_i = 2,11$ % (в относительных величинах $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/\sigma_{it} = 1,41$; $\bar{e}_i = e_i/e_{it} = 10,34$). По результатам упругого решения (8) $\bar{\sigma}_3 = \sigma_{3e}/\sigma_{1e} = 0,0011$. С учетом (19) находили $\bar{\sigma}_2 = 0,436$. По выражениям (20) рассчитывали главные напряжения при упругопластическом деформировании: $\sigma_1 = 780$, $\sigma_2 = 340$, $\sigma_3 = 1$ МПа. По формулам (22) определяли $\mu_* = 0,469$ и $E_* = 0,314 \cdot 10^5$ МПа. Главные упругопластические деформации находили по зависимостям (21): $e_1 = 1,98$; $e_2 = -0,08$, $e_3 = -1,67$ %.

Для промежуточной точки при $r/a = 5 \cdot 10^{-3}$ и $l/r = 200$ аналогично получали: $\sigma_{1e} = 1697$, $\sigma_{2e} = 621$,

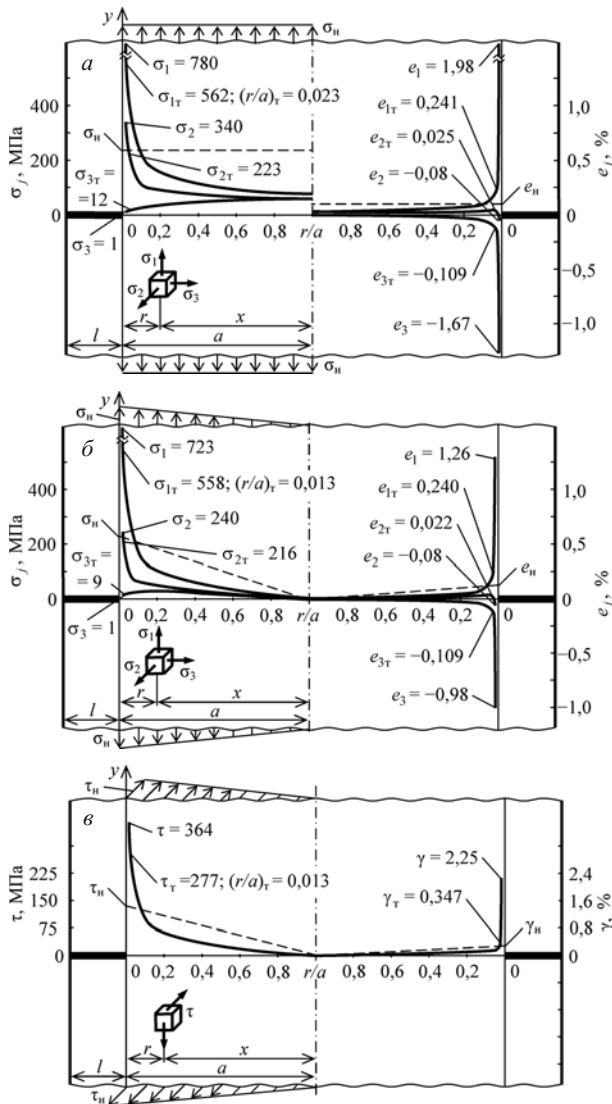


Рис. 2. Поля местных и номинальных напряжений и деформаций при растяжении (а), изгибе (б) и кручении (в) стержней с кольцевыми трещинами

$\sigma_{3e} = 8$ и $\sigma_{ie} = 1481$ МПа; $F = 0,618$; $\sigma_i = 602$ МПа и $e_i = 0,956$ %.

Изгиб. Для точки с $r/a = 10^{-3}$ и $l/r = 10^3$ аналогично растяжению определяли $\sigma_{1e} = 2012$, $\sigma_{2e} = 665$, $\sigma_{3e} = 2$ и $\sigma_{ie} = 1774$ МПа; $F = 0,605$; $\sigma_i = 630$ МПа ($\bar{\sigma}_i = 1,31$) и $e_i = 1,30$ % ($\bar{e}_i = 6,35$); $\bar{\sigma}_3 = 0,001$, $\bar{\sigma}_2 = 0,401$; $\sigma_1 = 723$, $\sigma_2 = 240$, $\sigma_3 = 1$ МПа; $\mu^* = 0,454$, $E^* = 0,471 \cdot 10^5$ МПа; $e_1 = 1,26$, $e_2 = -0,08$ и $e_3 = -0,88$ %.

Для промежуточной точки при $r/a = 5 \cdot 10^{-3}$ и $l/r = 200$ находили $\sigma_{1e} = 1273$, $\sigma_{2e} = 467$, $\sigma_{3e} = 6$ и $\sigma_{ie} = 1111$ МПа; $F = 0,653$; $\sigma_i = 564$ МПа и $e_i = 0,608$ %.

Кручение. Для точки с $r/a = 10^{-3}$ и $l/r = 10^3$ по соотношениям (11) рассчитывали $\tau_e = 1161$, $\sigma_{ie} = 1788$ МПа, $\gamma_e = 2(1 + \mu)\tau_e/E = 1,48$ %. Используя (12) – (15), вычисляли $F = 0,604$; $\sigma_i = 630$ МПа ($\bar{\sigma}_i = 1,31$), $e_i = 1,30$ % ($\bar{e}_i = 0,353$); $\tau = \sigma_i/\sqrt{3} = 364$ МПа и $\gamma = \sqrt{3}e_i = 2,25$ %.

Для промежуточной точки при $r/a = 5 \cdot 10^{-3}$ и $l/r = 200$ получали $\tau_e = 521$, $\sigma_{ie} = 903$ МПа, $\gamma_e = 0,664$ %; $F = 0,684$; $\sigma_i = 540$ МПа, $e_i = 0,448$ %; $\tau = 312$ МПа, $\gamma = 0,776$ %.

На рис. 2 представлены поля местных и номинальных напряжений и деформаций при растяжении (а), изгибе (б) и кручении (в) стержней с кольцевыми трещинами.

Для обоснования применимости предлагаемого метода использовали экспериментально-аналитический метод [6, с. 65], соотношения которого запишем в принятых здесь обозначениях для номинально упругого деформирования ($\sigma_{ih} < \sigma_{it}$):

$$\sigma_i e_i = \sigma_{ie} e_{ie} F_1, F_1 = \left(\frac{\sigma_{ie}}{\sigma_{it}} \right)^{-n_i(1-m_i)} \left(1 - \frac{\sigma_{ih} + \sigma_{im}}{\sigma_{it} + \sigma_{ie}} \right), \quad (23)$$

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{ih} \left(\frac{\sigma_{ie}}{\sigma_{ih}} \right)^{\frac{2m_i}{1+m_i}}}{\left(\frac{\sigma_{ih}}{\sigma_{it}} \right)^{\frac{1-m_i}{1+m_i}} \left(\frac{\sigma_{ie}}{\sigma_{it}} \right)^{\frac{n_i(1-m_i)m_i}{1+m_i}} \left(1 - \frac{\sigma_{ih} + \sigma_{im}}{\sigma_{it} + \sigma_{ie}} \right)}, \quad (24)$$

$$e_i = \frac{e_{ih} \left(\frac{\sigma_{ie}}{\sigma_{ih}} \right)^{\frac{2}{1+m_i}} \left(\frac{\sigma_{ih}}{\sigma_{it}} \right)^{\frac{1-m_i}{1+m_i}}}{\left(\frac{\sigma_{ie}}{\sigma_{it}} \right)^{\frac{n_i(1-m_i)}{1+m_i}} \left(1 - \frac{\sigma_{ih} + \sigma_{im}}{\sigma_{it} + \sigma_{ie}} \right)}, \quad (25)$$

где n_i — постоянная, равная 0,5 [6].

Сопоставление формул (14), (15) и (24), (25) показывает, что расхождения результатов расчета интенсивностей деформаций и напряжений можно представить таким образом: $\Delta_e = \left(\frac{F}{F_1} \right)^{1/(1+m_i)} - 1$; $\Delta_\sigma =$

$$= \left(\frac{F}{F_1} \right)^{m_i/(1+m_i)} - 1. \text{ Для ранее рассмотренных точек зна-}$$

чения F_1 , рассчитанные по формуле (23), при растяжении составили 0,556, 0,599; изгибе — 0,581, 0,627; кручении — 0,581, 0,649. С учетом полученных значений F и F_1 расхождения результатов определения интенсивностей упругопластических деформаций по предлагаемому методу и решению (25) в рассмотренных точках составили: при растяжении — 5,5 и 2,8 %; при изгибе — 3,8 и 3,4 %; при кручении — 3,4 и 4,7 %. Аналогичные расхождения по интенсивностям напряжений оказались менее 1 %.

Таким образом, предлагаемый метод можно рекомендовать для использования в инженерных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейбер Г. Концентрация напряжений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1947. — 204 с.

2. Добровольский Д. С. Коэффициенты интенсивности напряжений для цилиндрического образца с кольцевой трещиной / Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2016. Т. 82. № 5. С. 61 – 62.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948. — 376 с.
4. Добровольский С. В. Энергетический метод оценки концентрации напряжений и упругопластических деформаций / Проблемы прочности. 1999. № 3. С. 29 – 35.
5. Биргер И. А., Демьянушко И. В. Теория пластичности при неизо-термическом нагружении / Изв. АН СССР. МТТ. 1968. № 6. С. 70 – 76.
6. Махутов Н. А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. — М.: Машиностроение, 1981. — 272 с.

REFERENCES

1. Neiber G. Kонтсентрати́а напрыаженíи [Stress concentration]. — Moscow – Leningrad: Gostekhizdat, 1947. — 204 p. [in Russian].

2. Dobrovol'skii D. S. Koéffitsienty intensivnosti napryazhenii dlya tsilindricheskogo obraztsa s kol'tsevoi treshchinoi [Stress intensity factors for a cylindrical specimen with annular crack] / Zavod. Lab. Diagn. Mater. 2016. Vol. 82. N 4. P. 61 – 62 [in Russian].
3. П'юшин А. А. Пластичност' [Plasticity]. Part 1. — Moscow – Leningrad: Gostekhizdat, 1948. — 376 p. [in Russian].
4. Dobrovol'skii S. V. Énergeticheskii metod otsenki kontsentratsii napryazhenii i uprugoplasticheskikh deformatsii [The energy method for evaluation of concentration of stress and elastic-plastic deformation] / Probl. Prochn. 1999. N 3. P. 29 – 35 [in Russian].
5. Birger I. A., Dem'yanushko I. V. Teoriya plastichnosti pri neizotermicheskom nagruzhении [Plasticity theory under non-isothermal loading] / Izv. AN SSSR. MTT. 1968. N 6. P. 70 – 76 [in Russian].
6. Makhutov N. A. Deformatsionnye kriterii razrusheniya i raschet élementov konstruktсии na prochnost' [Deformation failure criteria and calculation of structural elements for strength]. — Moscow: Mashinostroenie, 1981. — 272 p. [in Russian].