

УДК 620.171.2:539.52:539:374

## МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТАМ ТЕСТОВЫХ ФОРМОВОК КРУГЛЫХ МЕМБРАН

© Ф. У. Еникеев<sup>1</sup>, О. П. Тулупова<sup>1</sup>, В. Р. Ганиева<sup>1</sup>,  
А. К. Шмаков<sup>2</sup>, А. В. Колесников<sup>2</sup>

*Статья поступила 13 мая 2015 г.*

Рассмотрена методика идентификации стандартной степенной модели сверхпластичности результатам тестовых формовок круглых мембран при постоянном давлении с учетом влияния входного радиуса. Математическая модель технологического процесса построена в рамках основных предположений безмоментной теории оболочек. Моделирование процесса сверхпластической формовки выполнено в программном комплексе ANSYS. Методика реализована на примере алюминиевого сплава АМг6М. Предлагаемый подход позволяет получить приемлемое согласие зависимости высоты купола от времени формовки с экспериментальными данными и может быть применен к анализу результатов тестовых формовок круглых мембран в состоянии сверхпластичности. Показано, что отклонение расчетной продолжительности формовки от экспериментальной не превышает 0,3 %.

**Ключевые слова:** сверхпластичность; моделирование; реология; обработка материалов давлением; идентификация; реологические параметры; ANSYS; алюминиевый сплав.

Состояние сверхпластичности (СП) материалов вызывает большой интерес в научном мире. Публикация работы специалистов под руководством У. Бэкофена [1] открыла промышленный потенциал явления СП при обработке металлов давлением. В ней рассматривался следующий эксперимент: на листовой сплав цинка с алюминием толщиной 0,76 мм через матрицу диаметром 100 мм воздействовали давлением 0,1 – 0,2 МПа, в результате были отформованы купола вы-

сотой больше диаметра матрицы. С тех пор опубликовано много работ, посвященных основным закономерностям явления сверхпластичности.

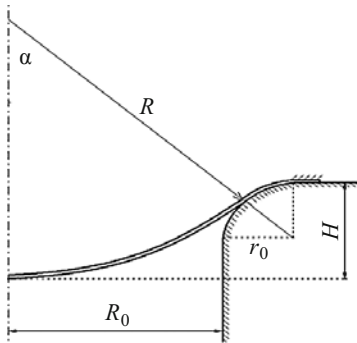
В работе [1] предложено использовать соотношение для описания механического отклика материалов в состоянии СП:

$$\sigma = K\xi^m, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — напряжение течения;  $\xi$  — скорость деформации;  $K$  — параметр материала, зависящий от среднего размера зерен и других структурных характеристик;  $m$  — параметр скоростной чувствительности.

<sup>1</sup> Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа, Россия; e-mail: venera5577@mail.ru

<sup>2</sup> Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск, Россия; e-mail: avk@istu.edu



**Рис. 1.** Расчетная схема формовки полусфер:  $R$  — текущий радиус купола;  $R_0$  — радиус матрицы;  $r_0$  — входной радиус;  $\alpha$  — угол между осью симметрии и радиусом, проведенным к центру кривизны входного радиуса матрицы

В литературе предлагается множество различных моделей сверхпластичности, но значение параметра  $m$  остается общепризнанным критерием СП и ее границы устанавливаются исходя из условия  $m > 0,3$ . Несмотря на то, что величина параметра  $m$  сильно зависит от скорости деформации, определяющее соотношение (1) часто используется при выполнении практических расчетов.

Одним из перспективных методов экспериментального определения значений реологических параметров СП является проведение технологических экспериментов. Общая схема такого подхода сформулирована в статье [2]. В работе [3] предложена численная процедура определения параметров  $K$  и  $m$  по экспериментально измеренной кривой  $H = f(t)$ , где  $H$  — высота купола, которая регистрировалась с помощью датчика линейных перемещений;  $t$  — время формовки. Эксперименты проводили на листовом промышленном титановом сплаве Ti-6Al-4V со средним размером зерен 10 мкм при температуре 925 °С.

Авторы работы [4] предложили альтернативный подход к идентификации модели материала (1) по результатам тестовых формовок полусфер из титанового сплава Ti-6Al-4V. В этой публикации впервые была опубликована формула

$$m = \frac{\ln(p_1/p_2)}{\ln(t_1/t_2)}, \quad (2)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — продолжительности формовки полусфер при давлении газа  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. В данной работе, как и в [3], не учитывалось влияние входного радиуса матрицы ввиду его незначительной величины ( $r_0 = 1$  мм). Однако при испытаниях алюминиевых сплавов величина входного радиуса принята равной 5 мм, что при радиусе матрицы  $R_0 = 50$  мм уже не может не приниматься во внимание при анализе процесса СП. Цель данной работы — обобщение методики идентификации свойств сверхпластичности на случай, когда влияние входного радиуса существенно.

Рассмотрим расчетную схему, представленную на рис. 1. Ее анализ проводили в предположении [4], что в зоне «деформируемый лист — штамп» происходит свободное скольжение листа по поверхности матрицы. В этом случае каждый меридиан, проходящий через полюс купола, будет иметь длину, равную  $(R + r_0)\alpha$ , которая в начальный момент  $t = 0$  составляет  $(R_0 + r_0)$ . Предполагая равнорастянутость меридиана, приходим к выводу, что в каждой своей точке он растянут в  $(R + r_0)\alpha / (R_0 + r_0)$  раз. Тогда с учетом геометрического соотношения

$$R_0 + r_0 = (R + r_0) \sin \alpha \quad (3)$$

получим текущую толщину листа в полюсе купола

$$s_a = s_0 \left[ \frac{R_0 + r_0}{(R + r_0)\alpha} \right]^2 = s_0 \left[ \frac{(R + r_0) \sin \alpha}{(R + r_0)\alpha} \right]^2 = s_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2. \quad (4)$$

Это выражение совпадает с формулой, полученной в работе [4]. Отличие заключается в ситуации на границе, где геометрическая модель противоречива.

Напряженное состояние в зоне развитой деформации характеризуется следующими компонентами напряжений:

меридиональной  $\sigma_m$  (направлена по касательной к меридиану);

тангенциальной  $\sigma_t$  (направлена по касательной к «широте»);

нормальной  $\sigma_n$  (направлена вдоль радиуса мембраны); в рамках безмоментной теории оболочек этой компонентой напряженного состояния пренебрегают.

В полюсе купола имеет место плосконапряженное состояние, когда меридиональная и окружная компоненты равны по величине ( $\sigma_m = \sigma_t$ ).

Тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = (\sigma_m \ 0 \ \sigma_t) \quad (5)$$

имеет три инварианта. При анализе процесса сверхпластического формообразования листовых материалов наибольший интерес представляет второй инвариант напряженного состояния, который в литературе принято называть «интенсивность напряжений» (будем обозначать ее далее  $\sigma_e$ ). По определению, интенсивность напряжений

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3S_{ij}S_{ij}}{2}}, \quad (6)$$

где  $S_{ij}$  — компоненты девиатора напряжений, вычисляемые по формуле

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij},$$

где  $\sigma = \sigma_{kk}/3$  — среднее напряжение (первый инвариант тензора напряжений);  $\delta_{ij}$  — символ Кронеккера.

Подставляя  $\sigma_m$  и  $\sigma_t$  в выражения (5) и (6), получили девиатор напряжений

$$S_{ij} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sigma_m - \sigma_t & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_t - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m - \sigma_t \end{pmatrix}. \quad (7)$$

При этом интенсивность напряжений

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3S_{ij}S_{ij}}{2}} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m\sigma_t}. \quad (8)$$

Например, для сферической оболочки  $\sigma_m = \sigma_t = R$ , тогда из основных уравнений безмоментной теории оболочек следует

$$\sigma_e = \sigma_m = \sigma_t = \frac{3}{2s}, \quad (9)$$

где  $R$  — текущий радиус оболочки;  $s$  — текущая толщина оболочки. Для полюса купола имеем

$$\sigma_e = \frac{pR}{2s_a}, \quad (10)$$

откуда с учетом геометрического соотношения (2) и выражения  $s_a = s_0 (\sin \alpha / \alpha)^2$  можно получить

$$\sigma_e = \frac{pR}{2s_a} = p \frac{R_0 + s_0}{2s_0} \frac{1 - r_0 \sin \alpha}{R_0 + r_0} \frac{\alpha^2}{\sin^3 \alpha}. \quad (11)$$

В полюсе купола имеет место равнокомпонентное двухосное растяжение, поэтому интенсивность скорости деформации в куполе

$$\xi_{ea} = 2\xi_m = 2 \frac{d\alpha}{dt} \left( \frac{1}{\alpha} - \text{ctg} \alpha \right). \quad (12)$$

Если в качестве модели материала используется стандартное определяющее соотношение сверхпластичности  $\sigma = K\xi^m$ , то, обобщая его на трехмерный случай, исходя из критерия Губера – Мизеса можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_{ea} &= \frac{p(R_0 + r_0)}{2s_0} \frac{\alpha^2}{\sin^3 \alpha} \left( 1 - \frac{r_0 \sin \alpha}{R_0 + r_0} \right) = \\ &= K\xi_{ea}^m = K \left[ 2 \frac{d\alpha}{dt} \left( \frac{1}{\alpha} - \text{ctg} \alpha \right) \right]^m. \end{aligned} \quad (13)$$

Полученное выражение представляет собой дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\alpha = \alpha(t)$  и может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{p(R_0 + r_0)}{2Ks_0} \right]^n dt = \\ &= 2 \left( \frac{1}{\alpha} - \text{ctg} \alpha \right) \left[ \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha^2} \frac{1}{1 - r_0 \sin \alpha / (R_0 + r_0)} \right]^n d\alpha, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $n = 1/m$ , а давление  $p$  является функцией времени  $t$ .

Частное решение полученного обыкновенного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $\alpha(0) = 0$ , может быть представлено в квадратурах:

$$\left[ \frac{p(R_0 + r_0)}{2Ks_0} \right]^n t = 2I'_m(\alpha), \quad (15)$$

где функция  $p(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , представляет собой закон подачи давления, а  $I'_m$  — специальная функция двух переменных ( $m$  и  $\alpha$ ), которую можно записать в виде определенного интеграла

$$I'_m(\alpha) = \int_0^\alpha \left( \frac{1}{x} - \text{ctg} x \right) \left[ \frac{\sin^3 x}{x^2} \frac{1}{1 - r'_0 \sin x} \right]^n dx, \quad (16)$$

где  $r'_0 = r_0 / (R_0 + r_0)$  — безразмерный входной радиус.

Этот интеграл может быть вычислен стандартными численными методами, например, по формуле Симпсона или методом Ньютона – Кортеса.

*Методика идентификации модели Бэкофена по двум измерениям.* Высота купола  $H$  (см. рис. 1), следуя геометрическим построениям и принимая во внимание соотношение (3), составляет

$$H(t) = R - R \cos \alpha + r_0 - r_0 \cos \alpha = (R_0 + r_0) \text{tg}(\alpha/2). \quad (17)$$

Для расчета временной зависимости  $\alpha(t)$  используем соотношение (15), где  $I'_m$  вычисляется по формуле (16). Величина постоянной материала  $m = 1/n$  может быть определена по результатам двух экспериментов из выражения (2), где  $t_1$  и  $t_2$  — продолжительности формообразования листового материала до заданной высоты  $H$  при постоянном давлении  $p = p_1 = \text{const}$  и  $p = p_2 = \text{const}$  соответственно, т.е.  $H(t_1) = H(t_2)$ .

Постоянную  $K$  можно определить по формуле

$$K_1 = \frac{p_1(R_0 + r_0)}{2S_0} \left[ \frac{t_1}{2I'_m(\alpha)} \right]^m \quad (18)$$

или

$$K_2 = \frac{p_2(R_0 + r_0)}{2S_0} \left[ \frac{t_2}{2I'_m(\alpha)} \right]^m. \quad (19)$$

Используют также среднеарифметическое значение

$$K = (K_1 + K_2)/2. \quad (20)$$

Таким образом, для определения постоянных  $K$  и  $m$  достаточно провести две тестовые формовки при разных давлениях, желательно (хотя и не обязательно) до одной и той же высоты купола, например, отформовать две полусферы при двух разных давлениях.

**Тестирование методики.** При обработке экспериментальных данных оценки реологических параметров часто оказываются неустойчивыми относительно малых экспериментальных ошибок. Такого рода неустойчивости могут возникнуть в силу особенностей используемого метода идентификации и/или организации вычислительной процедуры. В связи с этим представляется целесообразным перед применением разработанной процедуры идентификации той или иной модели с экспериментальными данными провести ее тестирование.

Для тестирования методики сгенерируем отклик виртуального материала. С этой целью перепишем выражение (15) в следующем виде:

$$t_f = 2 \left[ \frac{2Ks_0}{p(R_0 + r_0)} \right]^n I'_m(\alpha), \quad (21)$$

где  $t_f$  — продолжительность формовки до высоты  $H$ ;  $\alpha = 2 \arctg [H/(R_0 + r_0)]$ ;  $I'_m(\alpha)$  получим из (16).

Выберем материальные постоянные из области возможных значений, чтобы сгенерировать отклик виртуального материала для круглой мембраны.

Для этого возьмем эти значения из работы [6], авторы которой провели формовку алюминиевого спла-

ва АМг6М толщиной  $s_0 = 0,945$  в матрицу радиусом  $R_0 = 50$  мм с входным радиусом матрицы  $r_0 = 5$  мм при давлении газа  $p = 5$  атм до высоты  $H = 38,4$  мм. В результате обработки экспериментальных данных были получены следующие значения реологических параметров СП:  $K = 373,87$  МПа · с<sup>m</sup>;  $m = 0,39$ . С использованием этих характеристик был сгенерирован входной набор  $\{t_i, H_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , рассчитанный по формуле (21). В табл. 1 представлены результаты расчетов постоянных  $K$  и  $m$  при различном уровне «шума», введенного в соотношения

$$t_{i\Delta} = t_i[1 + \Delta_i(\text{rnd} - 0,5)], \quad p_{i\Delta} = p_i[1 + \Delta_p(\text{rnd} - 0,5)],$$

где  $\Delta_i, \Delta_p$  — уровни шума. Из табл. 1 видно, что при нулевом уровне «шума» «вход» совпадает с «выходом», что свидетельствует о корректности работы программы. Из результатов тестирования следует, что методика устойчива при уровне шума вплоть до 50 %. В то же время методика намного более чувствительна к погрешностям измерения давления, чем погрешности измерения времени.

Вычисления определенного интеграла по формуле (16) довольно громоздки. На практике при отладке программы рекомендуется использовать результаты расчетов, приведенные в работе [4]. Согласно [4] продолжительность формовки листа из сплава Ti-6Al-4V исходной толщиной  $s_0 = 1$  мм в цилиндрическую матрицу радиусом  $R_0 = 35$  мм и глубиной  $D = 35$  мм при давлении газа, равном 5, 7 и 10 атм, оказалась равной соответственно 1500, 685 и 300 с. Если принять в расчетах указанные в работе [4] значения реологических параметров  $m = 0,43$  и  $K = 410$  МПа · с<sup>m</sup> без учета входного радиуса матрицы ( $r_0 = 0$  мм), то в результате вычислений по формуле (21) получим значения продолжительности формовки 1499,685 и 299 с соответственно. Рассчитав свойства сверхпластичности для этого же сплава с учетом входного радиуса матрицы  $r_0 = 1$  мм, по формулам (2), (18) – (20) получили значения реологических параметров  $K = 413$  МПа · с<sup>m</sup>,  $m = 0,43$ . Продолжительность формовки листа из сплава Ti-6Al-4V при давлении газа, равном 5, 7 и 10 атм оказалась равной соответственно 1499, 686, 299 с. Из полученных расчетов можно сделать вывод, что входной радиус матрицы  $r_0 = 1$  мм при  $R_0 = 35$  мм ( $r_0 = 1/35 = 0,02857$ ) не оказывает существенного влияния на значения реологических параметров. При отладке программы, реализующей описанную выше методику, получили расчетное время продолжительности формовки, близкое к экспериментальному, чем подтвердили корректность вычислений по формуле (21).

Теперь вычислим значения реологических параметров СП с использованием методики, описанной в данной работе. Авторами работы [6] были проведены тестовые формовки алюминиевого сплава АМг6М толщиной  $s_{01} = 0,86$  и  $s_{02} = 0,87$  мм в матрицу радиу-

**Таблица 1.** Результаты расчетов постоянных  $K$  и  $m$  при различном уровне «шума»

$\Delta_i$	$\Delta_p$	$K$ , МПа · с <sup>m</sup>	$m$
0,00	0,00	373,87	0,39000
0,01	0,00	372,79	0,38979
0,00	0,01	365,06	0,38658
0,01	0,01	364,01	0,38637
0,05	0,00	368,45	0,38895
0,00	0,05	332,21	0,37306
0,05	0,05	327,61	0,37206
0,10	0,00	363,00	0,38787
0,00	0,10	296,01	0,35652
0,10	0,10	288,13	0,35458
0,50	0,00	318,15	0,37797
0,00	0,50	128,00	0,23669
0,50	0,50	116,00	0,22939

**Таблица 2.** Продолжительность формовки оболочек из сплава АМг6М с учетом входного радиуса матрицы (числитель) и без учета (знаменатель)

Давление, атм	$t_{\text{exp}}$	$t_{\text{ANS}} (r_0 \text{ равно } 5 \text{ и } 0 \text{ мм})$	$\varepsilon, \%$
3,5	2515	~2522/~2392	~0,27/~4,9
4	1534	~1538/~1485	~0,25/~3,2

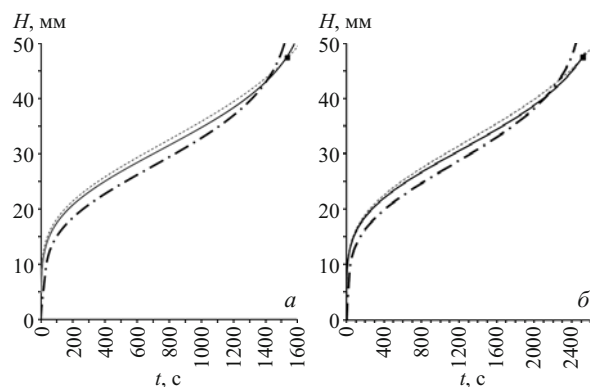
сом  $R_0 = 50$  мм с входным радиусом матрицы  $r_0 = 5$  мм. Продолжительность формовки до разрушения при давлении газа, равном 3,5 атм до высоты  $H_1 = 47,35$  мм в первом эксперименте составила 2515 с, а при давлении 4 атм до высоты  $H_2 = 47,7$  мм во втором эксперименте — 1534 с. Для проверки программы усредним значения толщины алюминиевого листа и высоты купола и примем  $s_{01} = s_{02} = 0,865$  мм,  $H_1 = H_2 = 47,5$  мм. По формуле (2) находим  $m = 0,27$ ,  $K$  вычислим по формуле (20):  $K = 171,9$  МПа · с<sup>m</sup>. Рассчитав продолжительность формовки до разрушения при давлении газа, равном 3,5 и 4 атм, получим соответственно 2515 и 1534 с. По найденным аналитическим путем реологическим параметрам выполнили моделирование процесса деформирования круглой мембраны в учебной версии «ANSYS10ED», в котором решалась краевая задача теории ползучести [5]. В расчетах использовали два типа элемента — PLANE42 и PLANE182, на контактной поверхности задавали условия свободного скольжения. В табл. 2 приведены экспериментальные данные и расчетные, полученные при моделировании в пакете ANSYS.

Видно, что с учетом входного радиуса матрицы удалось добиться точности 0,3 (без его учета точность колеблется от 3 до 5 %). На рис. 2 представлены зависимости высоты купола от продолжительности формовки, построенные по результатам аналитических расчетов и расчетов, полученных при моделировании в пакете ANSYS. Видно, что данные вычислений в ANSYS с учетом входного радиуса матрицы близки к результатам, полученным по упрощенной модели.

Таким образом, предлагаемая методика идентификации реологических параметров  $K$  и  $m$ , входящих в стандартную степенную модель сверхпластичности  $\sigma = K\dot{\varepsilon}^m$  с учетом величины входного радиуса матрицы, позволяет получать однозначный результат по известным данным продолжительности формовок  $t_1$ ,  $t_2$  до высоты  $H$  при постоянном давлении газа  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. При этом продолжительность формовки алюминиевого листа до разрушения отличается от экспериментальной не более чем на 0,3 %. В то же время продолжительность формовки алюминиевого листа до разрушения без учета входного радиуса отличается от экспериментальной на 3 – 5 %.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Backofen W. A., Turner I. R., Avery D. H. Superplasticity in an Al-Zn Alloy / Trans. ASM. 1964. Vol. 57. P. 980 – 990.



**Рис. 2.** Зависимости высоты купола  $H$  от продолжительности формовки  $t$ , вычисленные по формуле (21) при  $m = 0,27$  и  $K = 171,9$  МПа · с<sup>m</sup>: *a* — при давлении газа 4 атм до высоты  $H = 47,5$  мм; *б* — при давлении газа 3,5 атм до высоты  $H = 47,5$  мм; сплошная линия — моделирование в ANSYS ( $r_0 = 5$  мм); пунктирная линия — аналитические расчеты; штрих-пунктирная линия — моделирование в ANSYS ( $r_0 = 0$  мм); маркер — экспериментальные данные

2. Васин Р. А., Еникеев Ф. У., Круглов А. А., Сафиуллин Р. В. Об идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов / Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 2. С. 111 – 123.
3. Cheng J. H. The determination of material parameters from superplastic inflation tests / J. Mater. Proc. Technol. 1996. Vol. 58. P. 233 – 246.
4. Enikeev F. U., Kruglov A. A. An analysis of the superplastic forming of a thin circular diaphragm / Int. J. Mech. Sci. 1995. Vol. 37. N 5. P. 473 – 483.
5. Еникеев Ф. У. Математическое моделирование процессов обработки давлением промышленных титановых сплавов в состоянии сверхпластичности / Изв. вузов. Цветная металлургия. 2008. № 1. С. 43 – 50.
6. Aksenov S. A., Chumachenko E. N., Kolesnikov A. V., Osipov S. A. Determination of optimal gas forming conditions from free bulging tests at constant pressure / J. Mater. Proc. Technol. 2015. Vol. 217. P. 158 – 164.

## REFERENCES

1. Backofen W. A., Turner I. R., Avery D. H. Superplasticity in an Al-Zn Alloy / Trans. ASM. 1964. Vol. 57. P. 980 – 990.
2. Vasin R. A., Enikeev F. U., Kruglov A. A., Safullin R. V. Ob identifikatsii opredelyayushchikh sootnoshenii po rezul'tatam tekhnologicheskikh éksperimentov [Of the identification of constitutive equation from the results of technological experiments] / Izv. RAN. Mekh. Tverdogo Tela. 2003. N 2. P. 111 – 123 [in Russian].
3. Cheng J. H. The determination of material parameters from superplastic inflation tests / J. Mater. Proc. Technol. 1996. Vol. 58. P. 233 – 246.
4. Enikeev F. U., Kruglov A. A. An analysis of the superplastic forming of a thin circular diaphragm / Int. J. Mech. Sci. 1995. Vol. 37. N 5. P. 473 – 483.
5. Enikeev F. U. Matematicheskoe modelirovanie protsessov obrabotki davleniem promyshlennykh titanovykh splavov v sostoyanii sverkhplastichnosti [Mathematical modeling of superplasticity metal-working processes of the commercial titanium alloys] / Izv. Vuzov. Tsvet. Metallurg. 2008. N 1. P. 43 – 50 [in Russian].
6. Aksenov S. A., Chumachenko E. N., Kolesnikov A. V., Osipov S. A. Determination of optimal gas forming conditions from free bulging tests at constant pressure / J. Mater. Proc. Technol. 2015. Vol. 217. P. 158 – 164.