

УДК 62–408

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФРАКТАЛОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ МИКРОШЛИФОВ¹

© Р. С. Ахметханов²

Статья поступила 24 октября 2014 г.

Показано применение информационных технологий в механике при анализе изображений микрошлифов. Исследована структура материала по изображению микрошлифов с применением методов теории фракталов (фрактальные оценки) и вейвлет-анализа (кратно-масштабный анализ). Фрактальные оценки и данные, полученные с помощью вейвлет-анализа, позволяют получить количественные характеристики изменений в структуре материала при накоплении повреждений или отличий структуры при различных технологических режимах обработки материалов.

Ключевые слова: микрошлиф; структура; фазы; повреждения; изображение; фрактальная размерность; показатель Хёрста; вейвлет-преобразование; кратно-масштабный анализ.

Одними из определяющих показателей эффективности работы технических объектов считаются их надежность и безопасность. В обеспечении этих показателей особая роль принадлежит оценке прочности элементов конструкции, а также их ресурса. Для этого проводят экспериментальные исследования механических характеристик материалов. При этом в некото-

рых случаях требуется анализ микрошлифов (изображений) при нагрузочных испытаниях. Изменения, происходящие внутри деформируемого материала при нагрузочных испытаниях, находят однозначное отражение и в изображениях микрошлифа.

Существует множество алгоритмов цифровой обработки изображений, основанных на различных тематических подходах. Описание изображения на основе его представления по отличительным признакам представляет собой одну из наиболее сложных задач при разработке системы распознавания образов.

¹ Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00776).

² Институт машиноведения им. А. А. Благонравова (ИМАШ РАН), Москва, Россия; e-mail: mibsts@mail.ru

Для цифровой обработки изображений в качестве характеристик можно использовать следующие меры вариаций изображения [1]:

Стандартное отклонение, определяемое для изображения как

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n_r n_c} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_c} (p_{ij} - \mu)^2}, \quad (1)$$

где μ — среднее пиксельное значение прямоугольного сегмента изображения $n_r \times n_c$; p_{ij} — пиксельное значение в i -й строке и j -м столбце.

Асимметрия, которая находится как сумма кубов разностей между пиксельными значениями и средним значением блока, нормированных величиной σ^3 :

$$\gamma = \frac{1}{n_r n_c} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_c} \frac{(p_{ij} - \mu)^3}{\sigma^3}. \quad (2)$$

Межпиксельная контрастность — характеристика, которая измеряет среднюю разность между значениями соседних пикселей.

V-характеристика, определяющая, насколько сильно отличаются значения пикселей от значения в центре рассматриваемого блока.

Максимальный градиент ∇_M , рассчитываемый как $\nabla_M = \max\{\nabla_H, \nabla_V\}$, где ∇_H и ∇_V — соответственно горизонтальный и вертикальный градиенты.

Для анализа изображений также могут применяться различные метрики. Любая метрика, заданная на множестве, состоящем из матриц одинакового размера, будет определять расстояние между изображениями. С помощью метрик характеризуются меры искажения, которые используются для сравнения изображений, например, метрика Минковского. Для матриц, представляющих собой изображения, метрика определяется выражением

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_p = \left[\sum_{mn} |A_{mn} - B_{mn}|^p \right]^{1/p}, \quad (3)$$

где $p = 1, 2, \dots, n$. При $p = 2$ метрика называется «евклидовым расстоянием между матрицами»:

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \sqrt{\sum_{mn} |A_{mn} - B_{mn}|^2}. \quad (4)$$

С помощью евклидовой метрики по аналогии с векторами можно ввести угол между матрицами \mathbf{A} и \mathbf{B} . Данную величину на практике используют для описания степени различия или корреляции матриц (изображений), равно как и объектов, которые они представляют.

Представленные количественные оценки особенностей изображений не позволяют получать данные о структуре изображения. Эти оценки не единственные, существуют другие методы, например, основанные на теории фракталов или вейвлет-преобразований. Эти методы широко используются при

сжатии объема информации при хранении изображений в компьютерных технологиях [2] вследствие того, что они позволяют выделить в изображениях их структурные масштабные особенности. Теория фракталов широко применяется в медицине, физике, механике, радиотехнике, радиолокации, аэрокосмических исследованиях при дистанционном зондировании участков земной поверхности (распознавание различных образов) и т.д.

Понятия фракталов и мультифрактального формализма, развитые в работах зарубежных и отечественных исследователей, утвердили основы фрактального анализа и в материаловедении. В настоящее время методы фрактального материаловедения применяются для описания структур материала сварных швов, усталостных изломов и областей разрушения, выделения локальных особенностей и т.п. Основанный на моделировании процессов с использованием компьютерных технологий анализ на современном уровне дает информацию об эволюции, переходах и структурных изменениях, о влиянии на структуру внешних воздействий на микро- и макроуровнях.

В 1975 г. Мандельброт определил *фрактал* как множество, размерность Хаусдорфа которого больше топологической [3, 4]. При этом для гладкой кривой фрактальная размерность $D = 1$, для гладкой поверхности $D = 2$, а для сплошного трехмерного тела $D = 3$.

Многие наблюдения природных процессов приводят к временным зависимостям или рядам измерений [5, 6]. Временные последовательности измерений величин можно исследовать с помощью метода нормированного размаха (метода Хёрста). Данный метод может быть использован и при анализе изображений.

Мандельброт показал связь показателя Хёрста и фрактальной размерности. Для самоаффинных кривых имеется связь показателя Хёрста H с локальной фрактальной размерностью D временного ряда:

$$D = 2 - H. \quad (5)$$

Для трехмерных объектов выражение (5) примет вид

$$D = 3 - H. \quad (6)$$

Например, график трехмерной броуновской поверхности имеет размерность $D = 2,5$. Параметр Хёрста H в соотношении (6) при исследовании изображений может быть определен по аналогии с процедурой его определения при обработке сигналов. Изображение задается в виде массива значений X_{ij} (целые индексы i, j характеризуют дискретизацию поля изображения по координатам x, y ; $1 < i, j < k$), который представляет собой характеристику матрицы дискретных одинаковых по размеру элементов изображений — пикселей. Индексы (i, j) представляют собой номера строк и столбцов в матрице пикселей [тем самым они задают положение пикселей на плоскости изображения (x, y)]; сама же величина X_{ij} определяет интенсивность пикселя и может принимать для серых изобра-

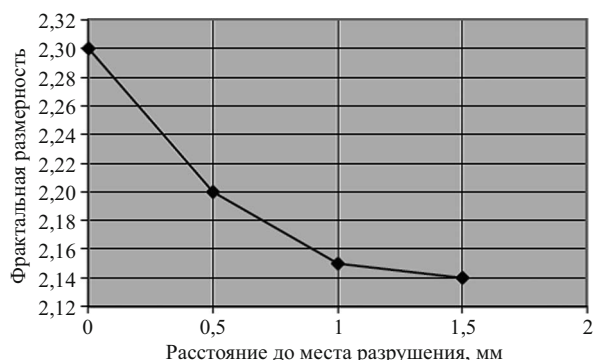


Рис. 1. Изменение величины фрактальной размерности D в зависимости от расстояния до места разрушения [8]

жений целочисленные значения в диапазоне от 0 до 255. В этом случае значение X_{ij} интерпретируется как высота рельефа в данной точке (пикселе) изображения, соответствующей индексам i, j .

При исследовании микрошлифа его изображение может быть представлено в различном виде — выделены фазы, границы, остов и т.п. При этом фрактальная размерность определяется в границах: $1 < D < 2$ и $2 < D < 3$ в зависимости от плоского или трехмерного изображения. Ниже [7] приведены значения фрактальных размерностей D для поверхностей металлов, полученных различными видами обработки в разных режимах:

Вид обработки	Фрактальная размерность D
Алмазное шлифование	2,117 – 2,288
Микродуговое оксидирование	2,102 – 2,420
Электроэрозионный синтез покрытий	2,303 – 2,536
Алмазное точение с последующим электрохимическим травлением	2,085 – 2,174

В этих исследованиях измерялся рельеф поверхности. Наилучший показатель фрактальной размерности получен при алмазном точении ($D = 2,085$). На рис. 1 [8] представлен анализ значения фракталов для участков микрошлифов вблизи зоны разрушения. Область разрушения имеет наибольшее значение фрактальной размерности ($D = 2,3$).

Расчет фрактальных оценок для изображений микрошлифов приведен в работе [9], где исследовалась микроструктура алюмосиликатной керамики (АЛСК) при различных термических режимах обработки (от 750 до 1250 °С). Результаты приведены в табл. 1.

На рис. 2 описаны примеры изображения остова структуры для 750 и 1050 °С. Видно, что структуры линий остова отличаются для указанных режимов обработки материала. Этим изображениям остова соответствуют фрактальные размерности $D_{750} = 1,617$ и $D_{1250} = 1,545$. Уменьшение показателя фрактальной размерности свидетельствует о том, что структура материала менее неоднородна. Фрактальная размерность, близкая к 1,5 (например, $D_{1250} = 1,545$), характе-

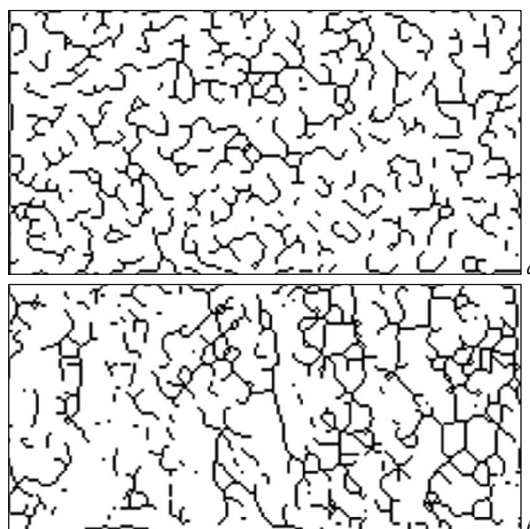


Рис. 2. Скелетные изображения структуры АЛСК при температуре обработки 750 (а) и 1250 °С (б)

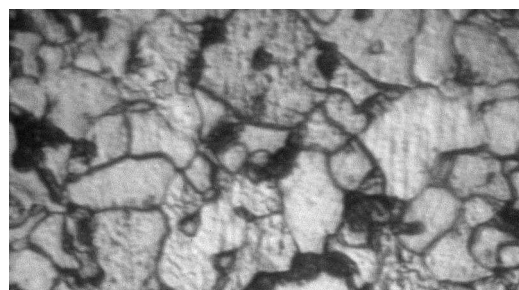


Рис. 3. Изображение микрошлифа стали 12ГС

ризует случайный (броуновский) характер структуры материала.

Приведем результаты анализа серий микрошлифов, полученных при исследовании стали 12ГС при циклических нагрузочных испытаниях [10]. Микроструктура стали 12ГС в основном состоит из феррита и перлита. На изображении микрошлифа (рис. 3) светлые зоны — это феррит, темные включения — перлит. Структура материала — зернистая, крупные зерна феррита и мелкие зерна перлита. На рис. 4 приведены изображения распределения зерен феррита (рис. 4, а) и перлита (рис. 4, б), а также границы между ними (рис. 4, в).

При исследовании изменений фрактальной размерности вычисляли показатель Хёрста и непосред-

Таблица 1. Фрактальные оценки микроструктуры АЛСК при различных режимах термообработки

Фрактальная размерность D	Температура обработки, °С				
	750	850	950	1050	1250
D_1	1,802	1,759	1,838	1,769	1,714
D_2	1,866	1,77	1,85	1,76	1,748
$D_{гр}$	1,889	1,792	1,886	1,774	1,743
$D_{ост}$	1,617	1,679	1,731	1,588	1,545

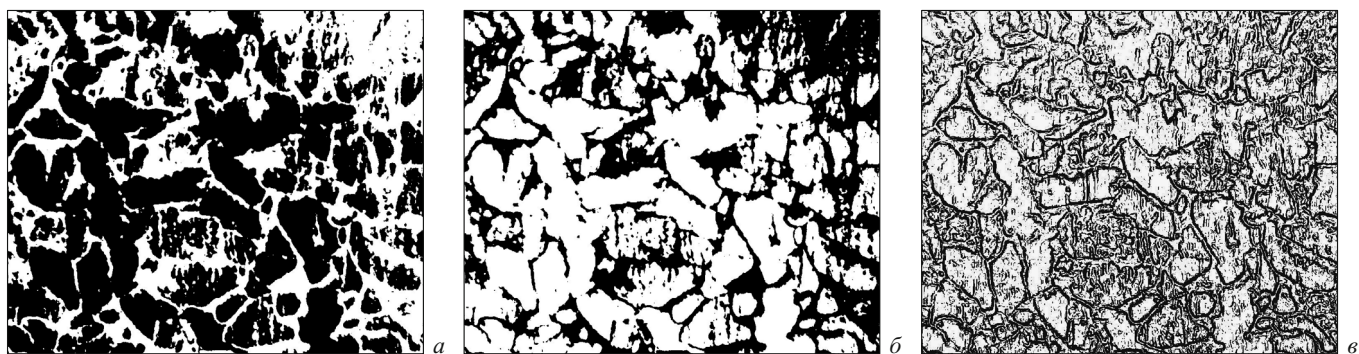


Рис. 4. Распределение зерен феррита (а) и перлита (б) фазы и границы между ними (в)

ственно фрактальную размерность D . При определении значения показателя Хёрста H в качестве исследуемых рядов использовались строки, столбцы изображения. Значение фрактальной размерности изображения вычислялось последующим усреднением данных по столбцам и строкам (вдоль образца и поперек) по всему изображению. Для оценки показателя Хёрста H использовался алгоритм, описанный в работе [4]. В табл. 2 приведены результаты расчетов усредненного показателя Хёрста при предельном числе нагружений $N = 80\,000$ циклов и фрактальной оценки для фазы феррит с помощью программы ImageJ. Для данного примера характерно то, что с возрастанием числа циклов нагружений фрактальная размерность увеличивается с 2,289 до 2,418, т.е. вид распределения характерных особенностей стремится к броуновскому (случайному). При этом фрактальная оценка границы фазы (феррит) меняется от 1,8414 до 1,8933. Эти изменения в значениях фрактальной размерности говорят также об увеличении изрезанности границ зерен данной фазы — увеличении числа микротрещин.

Результаты обработки изображений микрошлифов приведены в табл. 3 для предельного числа циклов на-

гружений $N = 48\,000$. При этом рассчитывались средние фрактальные значения для строк изображения как вдоль, так и поперек приложения нагрузки. В этом случае изменение показателя фрактальной размерности с увеличением N незначительное, но тенденция та же — показатель фрактальной размерности возрастает с увеличением числа циклов нагружений. Полученные фрактальные оценки близки к значениям первой серии исследований для диапазона нагружений от 30 000 до 60 000 циклов.

Для испытания образца с предельным числом циклов нагружений $N = 95\,000$, кроме фрактальной размерности, были вычислены и другие характеристики изображения микрошлифов (использовалась программа ImageJ): число зерен N_z , площадь S_p , периметр зерен P и их характеристики (математическое ожидание M , среднеквадратическое отклонение S_t , минимальные и максимальные значения для площади S_{\max} и периметра зерен P) (табл. 4). При этом учитывались структурные элементы (зерна) с условной площадью $S_p \geq 10$ кв. пикселей. С накоплением повреждений количество зерен увеличивается от 105 до 165, при этом площадь S_p и периметр зерен P уменьшаются, т.е. происходит разрушение зерен. Максимальная площадь зерен S_{\max} сокращается с 8956 до 2568 кв. пикселей, а периметр P их с максимального значения 426 уменьшается до 223 пикселей. Эти данные также подтверждают наличие повреждений структурных фаз материала.

При обработке изображения можно выделить скелетные линии (остов изображения), для которых также определяется фрактальная размерность. На рис. 5 приведены примеры остова изображения для значений N , равных 0 и 95 000 циклов. Видно, что перед

Таблица 2. Сравнительные оценки фрактальной размерности оценки шлифов

Нагружение, число циклов N	Показатель Хёрста H	Фрактальная размерность	
		$D = 3 - H$	D_1 (ImageJ)
0	0,711	2,289	1,8414
10 000	0,752	2,251	1,8812
30 000	0,793	2,211	1,8578
60 000	0,619	2,381	1,8903
80 000	0,592	2,418	1,8933

Таблица 3. Показатель Хёрста H при различном числе циклов нагружений N

Вариант микрошлифа	N				
	0	9000	18 000	30 000	48 000
H : вдоль нагрузки, $D_v = 3 - H$	0,8493	0,8247	0,7951	0,791	0,7911
H : поперек нагрузки, $D_n = 3 - H$	0,836	0,7585	0,7963	0,7074	0,7257
	2,1507	2,1753	2,2049	2,209	2,2089
	2,184	2,2415	2,2037	2,2926	2,2743

разрушением металла структура линий остова изображения более изрезанная. Этим изображениям остова соответствуют фрактальные размерности $D_0 = 1,208$ и $D_{95000} = 1,253$. В этом случае увеличение показателя фрактальной размерности также свидетельствует о том, что структура материала претерпела значительные изменения — появились микроразрушения (накопление повреждений).

Результаты исследований показывают, что фрактальные оценки чувствительны к происходящим изменениям в материале, фрактальная оценка в преддверии его предельного состояния, как правило, стремится к величине D , равной 2,0 или 2,5, в зависимости от способа анализа изображения (в двумерном или трехмерном виде). Увеличение фрактальной размерности при повышении числа циклов нагружений N образца говорит о том, что в материале появились микротрещины (повреждения).

Для анализа микрошлифов также может быть применено вейвлет-преобразование с использованием двумерных вейвлетов. Теория вейвлетов и области их применения неразрывно связаны с развитием прикладных областей современной науки: цифровая обработка сигналов и изображений, теория фильтрации и кодирования, теория сплайнов, дискретных и быстрых преобразований в приложении к медицине, механике и т.д.

В общем виде вейвлет-преобразование $W\{f(t)\}$ функции $f(t)$ состоит в разложении этой функции по базису, сконструированному из семейства функций $\psi_{ab}(t)$ [11 – 13]:

$$Wf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{ab}(t)dt. \quad (7)$$

Это семейство нормированных на $|a|^{-1/2}$ функций

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (8)$$

получено из функции-прототипа $\psi(t)$, называемой материнским вейвлетом, путем масштабных преобразований (дилатаций), определяемых действительным числом $\infty > a > 0$, и путем параллельных переносов (трансляций), обусловленных действительным числом $\infty > b > -\infty$. Числа a и b называют соответственно па-

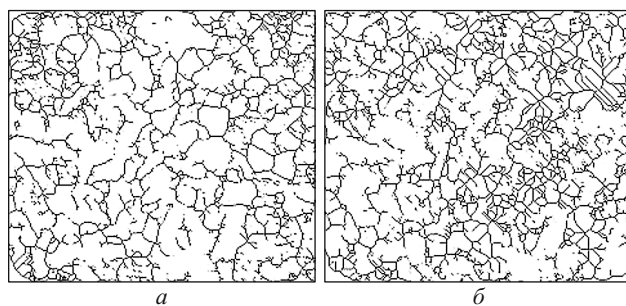


Рис. 5. Остов изображения микрошлифа при нагрузках N , равных 0 (а) и 95 000 (б) циклов

раметрами масштаба и сдвига. Результатом разложения являются вейвлет-коэффициенты, образующие массив данных S_{ij} .

Вейвлет-анализ может быть применен к объектам любой размерности: временным рядам (вектор), изображениям (двухмерная матрица) и многомерным матрицам. При исследовании изображений требуется предварительная подготовка. К этому этапу исследований можно отнести все процедуры по улучшению изображения (контрастирование, выравнивание, сегментация, шумоподавление и т.п.); этот этап может быть выполнен также с помощью вейвлет-преобразований.

Для анализа изображений в вейвлет-анализе применяется кратномасштабный анализ (КМА): описание пространства $L^2(R)$ через иерархически вложенные непересекающиеся подпространства V_m , объединение которых дает в пределе все $L^2(R)$.

Кратномасштабный анализ (КМА) обладает целым рядом полезных свойств, главным из которых является возможность выделения из исходного сигнала (или изображения) его деталей различных масштабов.

Для анализа изображений вместо выражения для одномерной вейвлет-функции вида (8) можно воспользоваться двухмерным аналогом [14]

$$\psi_{ab}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \psi\left(\frac{x-b_1}{a_1}, \frac{y-b_2}{a_2}\right), \quad (9)$$

где a_1 и a_2 , b_1 и b_2 — значения a и b по каждому измерению.

Для вейвлет-преобразований дискретных изображений и построения быстрых алгоритмов обработки

Таблица 4. Изменение характеристик фрактальной размерности и зернистости микрошлифа в зависимости от числа циклов нагружений N

Нагружение N	Фрактальная размерность			Число зерен	Площадь зерен S			Периметр зерен P			
	D_1	D_2	$D_{гр}$		M	S_i	S_{max}	M	S_i	P_{min}	P_{max}
0	1,698	1,861	1,781	105	550	1441	8956	66	84,7	11,1	426
38 000	1,729	1,842	1,749	106	273	591	3611	52	53,5	10,5	274
61 000	1,754	1,827	1,810	137	234	575	3865	48	49,9	11,1	301
84 000	1,770	1,815	1,803	153	188	433	3190	44	42,5	11,1	261
95 000	1,802	1,784	1,795	165	149	365	2568	39	37,6	10,5	223

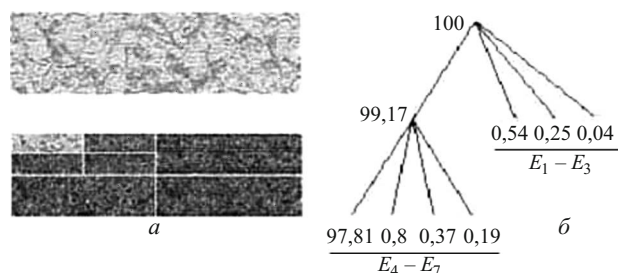


Рис. 6. Кратно-масштабный анализ изображения: *a* — разложение изображения, *б* — вейвлет-дерево [16]

следует исходить из двумерного КМА. Рассмотрим данную процедуру. Предположим, что имеется изображение размером $N \times N$. Первоначально каждая из N строк изображения делится (фильтруется) на низкочастотную (НЧ) и высокочастотную (ВЧ) половины. Термины НЧ и ВЧ использованы из анализа одномерных массивов данных (временных рядов) и определяют масштабные элементы структуры изображения. В результате получаются два изображения размером $N \times N/2$. Далее каждый столбец делится точно так же, в итоге получаются четыре изображения размером $N/2 \times N/2$ (основное) и детализирующие: НЧ по горизонтали и вертикали (НЧ₁НЧ₁), ВЧ по горизонтали и вертикали (ВЧ₁ВЧ₁), НЧ по горизонтали и ВЧ по вертикали (НЧ₁ВЧ₁), ВЧ по горизонтали и НЧ по вертикали (ВЧ₁НЧ₁). Первое из указанных выше изображений делится аналогичным образом на следующем шаге (уровне) преобразования и т.д. Так получается вейвлет-дерево. Так же может быть построено обычное дерево, когда все фрагменты изображения на следующем уровне делятся на соответствующие масштабные (частотные) составляющие. Эти деревья позволяют получить прямые количественные оценки характеристик ветвей или относительное процентное содержание этих характеристик при разных масштабах структуры изображения через коэффициенты вейвлет-преобразования $S_{w_{ij}}$. Для этого используются различные критерии, например, энергетические или энтропийные [15]. При условии, что энтропия изображения $E(S_{w_{ij}} = 0) = 0$, общее выражение для энтропии

$$E(S) = -\sum_i \sum_j S_{w_{ij}} \log(S_{w_{ij}}). \quad (10)$$

Тогда, например, энтропия по Шеннону (Shannon)

$$E = -\sum_i \sum_j S_{w_{ij}}^2 \log(S_{w_{ij}}^2). \quad (11)$$

Другой критерий (энергетический) может быть определен в виде

$$E = -\sum_i \sum_j \log(S_{w_{ij}}^2). \quad (12)$$

Суть этих критериев одна — большая энтропия (энергия) свидетельствует о «размазанности» сигнала по базисным функциям; малая энтропия имеет место тогда, когда большая часть нормы сигнала сосредоточена на малом числе базисных функций. В последнем случае информация о сигнале (изображении) может быть существенно сжата.

Рассмотрим примеры. На рис. 6 показаны пример кратного-масштабного разложения изображения микрошлифа АЛСК (рис. 6, *a*) и соответствующее ему вейвлет-дерево (рис. 6, *б*). КМА изображения проводился с помощью программного комплекса МАТЛАБ. В табл. 5 приведены полученные данные по КМА. Распределение энтропии для различных масштабов представлено в процентном соотношении. Полученные результаты показывают, как меняется характер структуры — количественные характеристики масштабных составляющих изображения. Характеристики меняются в пределах 8,46 – 932 %. Наибольшие изменения — в значениях $E_1 - E_3$ и $E_5 - E_7$. Учитывая фрактальные оценки для остова изображений $D_{ост}$ для режимов обработки при 750 и 1250 °С и оценивая изменения в значении E , можно сделать заключение, что при однородной структуре материала E_4 минимальное, а другие значения E максимальные, т.е. в изображении имеются в большем количестве составляющие различных масштабов. А близкие значения E_1, E_2 и E_5, E_6 для режима обработки при 750 °С показывают на симметрию масштабных элементов в изображении S по координатам x и y .

Зная фактические размеры изображения микрошлифа и число пикселей (по ширине и длине изображения), можно определить структурные размеры, обусловленные НЧ и ВЧ частями условного спектра. Увеличивая число масштабных уровней, можно получить соответствующие процентные характеристики, которые позволят оценить наиболее значимые изменения в более мелких структурных элементах изображения.

Таблица 5. Распределение энтропии по составляющим вейвлет-дерева для АЛСК, %

Температура, °С	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
750	1,53	1,75	0,17	90,02	2,64	2,89	0,99
850	0,52	0,37	0,11	95,05	0,42	0,28	0,25
950	0,44	0,64	0,09	97,24	0,42	0,88	0,28
1050	0,35	0,66	0,07	96,92	0,55	1,19	0,26
1250	0,3	0,43	0,04	97,64	0,5	0,91	0,18
				$\Delta E, \%$			
	410	373	325	8,46	528	932	450

В табл. 6 [16] приведены данные КМА для микрошлифа стали 12ГС при изменении числа циклов нагружений N от 0 до $N = 80\,000$.

Максимальные изменения в характеристиках составляющих изображения микрошлифа измеряются в пределах до 107,7 %. Если рассмотреть динамику изменения E с увеличением числа циклов нагружений, то до $N = 30\,000$ значения $E_1 - E_3$ росли, а далее уменьшались. Это связано с тем, что микроразрушения перешли на другой масштабный уровень. До $N = 30\,000$ микроразрушения представлялись незначительными вкраплениями (шумами) в изображении микрошлифа, затем они стали элементами основного изображения (произошло накопление повреждений).

Таким образом, использованные методы чувствительны к происходящим изменениям в структуре изображения микрошлифов при возникновении микроразрушений. А числовые характеристики изображений дают представление о происходящих процессах накопления повреждений в образцах.

В отличие от указанных выше методов определения количественных характеристик изображений теория фракталов дает общую оценку произошедших изменений в изображении микрошлифа с помощью количественной оценки фрактальной размерности при увеличении числа циклов нагружений N , при этом можно определить характер накопления повреждений: линейный или нелинейный. А кратно-масштабный анализ позволяет получить количественные энтропийные, энергетические (или относительные в процентах) оценки для элементов различного размера (масштаба), входящих в структуру изображения микрошлифа. При этом определяется и основное направление роста микроразрушений (повреждений металла) по изменениям в количественных характеристиках масштабных элементов вейвлет-дерева (НЧВЧ или ВЧНЧ).

Точность расчета количественных показателей, определяющих структурные и масштабные элементы изображений микрошлифов, зависит от качества подготовки микрошлифов, изображений микрошлифов, их разрешений (число пикселей на линейный размер изображения) и масштаба увеличения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новейшие методы обработки изображений. / Под ред. А. А. Потапова. — М.: Физматлит, 2008. — 496 с.

Таблица 6. Распределение энтропии по составляющим вейвлет-дерева

N	E_1	E_2	E_3	E_4
0	0,54	0,25	0,04	99,17
10 000	0,55	0,25	0,04	99,16
30 000	0,65	0,37	0,06	98,92
60 000	0,35	0,23	0,03	99,39
80 000	0,26	0,19	0,03	99,52

2. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. — М.: Издательство Триумф, 2003. — 320 с.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
4. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. — М.: Постмаркет, 2000. — 352 с.
5. Ахметханов Р. С. Численно-аналитические методы анализа динамических свойств механических систем / Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 5. С. 10 – 18.
6. Ахметханов Р. С. Применение теории фракталов и вейвлет-анализа для выявления особенностей временных рядов при диагностике систем / Вестник научно-технического развития — Национальная технологическая группа. 2009. № 1(17). С. 26 – 31.
7. http://www.lib.tsu.ru/mminfo/000063105/301/image/301_101-107.pdf.
8. Kocurova K., Hazlinger M., Stefanikova M. Microstructure and fractographic analysis of damage reasons of cogwheel / Materials Engineering. 2012. N 19. P. 82 – 87.
9. Галаев А. Б. Фрактально-вейвлетные алгоритмы и комплекс программ компьютерного анализа микро-фото-изображений текстуры композиционных наноматериалов. Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. — М.: 2013. — 17 с.
10. Ахметханов Р. С. Применение компьютерных технологий и теории фракталов в исследовании изображений микрошлифов / Проблемы машиностроения и автоматизации. 2013. № 3. С. 153 – 161.
11. Дьяконов В. Вейвлеты. От теории к практике. — М.: СОЛОН-Р, 2002. — 448 с.
12. Чуи К. Введение в вейвлеты. — М.: Мир, 2001. — 412 с.
13. Ахметханов Р. С., Никифоров А. Н. Применение вейвлет-анализа для исследования нестационарных процессов роторных систем / Проблемы машиностроения и автоматизации. 2005. № 2. С. 53 – 61.
14. Воскобойников Ю. Е. Фильтрации сигналов и изображений: фурье и вейвлет-алгоритмы (с примерами в Mathcad). — Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. — 188 с.
15. <http://www.mathworks.com/help/wavelet/ug/wavelet-packets.html> (5.10.2014).
16. Ахметханов Р. С. Применение вейвлет-преобразований для анализа одно-, двух- и трехмерных массивов данных / Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 5. С. 112 – 119.